PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 39 (1960)

SUR LE THÉORÈME DE CAYLEY — HAMILTON

Slaviša Prešić

(Reçu le 3 février 1960)

Soit P un anneau commutatif à élément unité. Désignons par P^m l'ensemble $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$ de tous les ensembles ordonnés de m éléments de P. Appelons brièvement vecteurs les éléments de l'ensemble P^m. Les éléments de l'anneau P seront désignés par x_i, y_j, x_i^j.

Nous définissons dans P^m les opérations suivantes:

I. L'addition

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m)+(y_1, y_2, \ldots, y_m)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_m+y_m);$$

II. La multiplication par scalaire $p \in P$

$$p\,(x_1, x_2, \ldots, x_m)=(p\,x_1, p\,x_2, \ldots, p\,x_m)$$

III. Une opération k-iaire φ, de la façon suivante:

Soient $a_i=(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_m^i)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ éléments quelconques de P. Alors $\varphi\,(a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k)=(x_1, \ldots, x_m)$, où les x_i sont donnés par les équations suivantes:

$$x_i=x_1^s\,A_{i1}+x_2^s\,A_{i2}+\cdots+x_m^s\,A_{im} \quad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

où s $(1 \leqslant s \leqslant k)$ est un nombre natuıel fixe. Les $A_{ij} \in P$ dépendent des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_s, \ldots, a_k$ et ne dépendent pas du vecteur a_s.

Nous allons définir les „puissances" des éléments comme il suit:

$$a^1=a, \quad a^{n+1}=\varphi\,(a, a, \ldots, a^n, \ldots, a), \tag{2}$$

où a^n occupe la s-ième place. Si nous posons $a^n=(x_1(n), \ldots, x_m(n))$, nous pouvons conclure de (2) que

$$x_i(n+1)=x_1(n)\,A_{i1}+x_2(n)\,A_{i2}+\cdots+x_m(n)\,A_{im} \qquad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

où, d'après la définition de l'opération φ, les A_{ij} sont fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Désignons par A la matrice $\|A_{ik}\|$ et par $f(r)=|r\,E-A|=r^m+\alpha_1\,r^{m-1}+\cdots+\alpha_m$ son polynôme caractéristique. Nous avons alors le théorème suivant:

Un élément quelconque a de P satisfait à l'équation

$$a^{m+1}+\alpha_1\,a^m+\cdots+\alpha_m\,a=0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Le système (3) peut être écrit sous la forme

$$X_{n+1}=A\cdot X_n \quad \text{avec } X_i=\begin{Vmatrix} x_1\,(i) \\ x_2\,(i) \\ \vdots \\ x_m\,(i) \end{Vmatrix}.$$

Nous en déduisons que

$$X_{n+1}=A^n\,X_1 \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots\,)$$

D'après le théorème de *Cayley — Hamilton,* la matrice A satisfait à l'équation

$$A^m+\alpha_1\,A^{m-1}+\cdots+\alpha_m\,E=0.$$

On en tire

$$A^m\,X_1+\alpha_1\,A^{m-1}\,X_1+\cdots+\alpha_m\,X_1=0,$$

c'est-à-dire

$$X_{m+1}+\alpha_1\,X_m+\cdots+\alpha_m\,X_1=0,$$

d'où il vient

$$x_i\,(m+1)+\alpha_1\,x_i\,(m)+\cdots+\alpha_m\,x_i\,(1)=0 \qquad (i=1,\,2,\,\ldots\,,\,m).$$

Il s'ensuit enfin

$$a^{m+1}+\alpha_1\,a^m+\cdots+\alpha_m\,a=0.$$

Le théorème est donc démontré.

S'il existe un élément I_a dans P^m tel que

$$\varphi\,(a,\,\ldots\,,\,I_a,\,\ldots\,,\,a)=a,$$

on admet alors

$$a^m+\alpha_1\,a^{m-1}+\cdots+\alpha_m\,I_a=0.$$

Notons que le théorème ci-dessus peut être démontré sans utiliser le théorème de *Cayley — Hamilton.*

REZIME

O CAYLEY — HAMILTON-OVOJ TEOREMI

Slaviša Prešić

Neka je P komutativni prsten sa jediničnim elementom. U skupu

$$P^m=\{(x_1,\,x_2,\,\ldots\,,\,x_m)\},$$

gde je $x_i\in P$, definišimo sledeće operacije:

1) sabiranje

$$(x_1,\,x_2,\,\ldots\,,\,x_m)+(y_1,\,y_2,\,\ldots\,,\,y_m)=(x_1+y_1,\,x_2+y_2,\,\ldots\,,\,x_m+y_m) \qquad (x_i,\,y_i\in P);$$

2) množenje skalarom $p \in P$

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (p x_1, p x_2, \ldots, p x_m)$$

3) jednu k-tarnu operaciju φ na sledeći način:

Neka je

$$a_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_m^i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

bilo kakav skup od m elemenata (vektora) iz P^m.

Tada je

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

gde je

$$x_i = x_1^s A_{i1} + x_2^s A_{i2} + \cdots + x_m^s A_{im}$$

dok su $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}$ funkcije vektora $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_s, \ldots, a_k$, a nisu funkcije vektora a_s.

Neka je $a = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ bilo koji vektor iz P^m. Definišimo njegove potencije pomoću:

$$a^1 = a, \quad a^{n+1} = \varphi(a, \ldots, a^n, \ldots, a),$$

gde je a^n na s -tom mestu. Tada važi stav

Element $a \in P$ zadovoljava jednačinu

$$a^{m+1} + \alpha_1 a^m + \cdots + \alpha_m a = 0,$$

gde je

$$r^{m+1} + \alpha_1 r^m + \cdots + \alpha_m = |r E - A| \quad (A = \| A_{ik} \|).$$

Navedeni stav pretstavlja proširenje *Cayley — Hamilton*-ovog stava na P^m, kad su u njemu definisane operacije 1), 2), 3). Svodi se na njega ako je $m = l^2$ (l prirodan broj) i ako je φ binarna operacija množenje matrica.