PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA - SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 47 (1960)

SUR LE NOMBRE DE CERTAINES ALGÈBRES

Slaviša Prešić

(Reçu le 10 octobre 1960)

Soit G un groupoïde tel que

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_l) = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_l) \tag{1}$$

pour tous $a_1, a_2, \ldots, a_l \in G$, les ensembles d'éléments figurant aux deux membres de cette égalité étant les mêmes et $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_l)$, $\psi(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ désignant les éléments de G obtenus d'une certaine manière au moyen des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_l$. Comme exemple d'un tel groupoïde on peut citer un groupoïde possédant la propriété que $a(bc) = (ab)c$ pour tous $a, b, c, \in G$, ou bien un groupoïde avec la propriété $a((ab)(cd)) = (da)(bc)$ pour tous $a, b, c, d, \in G$, ainsi que beaucoup d'exemples pareils. Un groupoïde dans lequel $(ab)(cd) = b(dc)$ pour tous $a, b, c, d \in G$ n'est pas l'exemple de tel groupoïde, l'élément a figurant au premier membre et ne se trouvant pas au second.

Supposons, dans ce qui suit, que G soit un groupoïde satisfaisant à une loi de la forme (1). Il existe de tels groupoïdes de tout ordre (l'ordre d'un groupoïde = le nombre de ses éléments). En effet, si nous prenons un élément a de l'ensemble G et posons $b \cdot c = a$ (b, c sont des éléments quelconques de G), alors G devient un groupoïde obéissant à toute loi de la forme (1).

Pour abréger, nous appelerons ,,groupoïde (1)'' tout groupoïde qui obéit à une loi de la forme (1).

Désignons par $B(n)$ le nombre de groupoïdes (1) non-isomorphes d'ordre fini n. Nous allons démontrer le théoréme que voici:

Théorème 1. Si les nombres naturels $p_1, p_2, \ldots, p_l$ sont tous différents, alors

$$B\left(\sum_{i=1}^{l} p_i + 1\right) > \prod_{i=1}^{l} B(p_i). \tag{2}$$

Démonstration. Soient $G_1 = \{a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{p_1}^1\}$, $G_2 = \{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{p_2}^2\}, \ldots,$ $G_l = \{a_1^l, a_2^l, \ldots, a_{p_l}^l\}$ $(G_i \cap G_j = \emptyset$ pour $i \neq j)$ des groupoïdes arbitraires satisfaisant à la loi (1). Considérons l'ensemble

$$L = \{a_1^1, \ldots, a_{p_1}^1,\ a_1^2, \ldots, a_{p_2}^2, \ldots, a_1^l, \ldots, a_{p_l}^l,\ 0\},$$

où $0 \notin \bigcup_{i=1}^{l} G_i$ est un élément quelconque. Définissons une opération binaire $a \cdot b$ comme il suit

$$a \cdot b = \begin{cases} a_\nu^i a_\mu^i & \text{si } a = a_\nu^i,\ b = a_\mu^i\ (1 \leqslant \nu,\ \mu \leqslant p_i;\ 1 \leqslant i \leqslant l), \text{ c'est-à-dire si } a \text{ et } b \\ & \text{appartiennent au même groupoïde } G_i, \\ 0 & \text{si cette condition n'est pas remplie.} \end{cases}$$

On voit immédiatement que l'opération introduite satisfait à (1). En choisissant pour $G_1, G_2, \dots, G_l$ des groupoïdes (1) différents, nous obtenons par le procédé que nous venons de décrire des groupoïdes (1) d'ordre $1 + \sum_{i=1}^{l} p_i$. Nous allons apprécier le nombre de groupoïdes non-isomorphes qui peuvent être obtenus de cette manière-là.

Désignons par $(G_1, G_2, \dots, G_l)$ le groupoïde L obtenu par le procédé mentionné au moyen des groupoïdes $G_1, G_2, \dots, G_l$. Soient G_i et G_i' deux groupoïdes (1) d'ordre p_i. On peut démontrer que de $(G_1, G_2, \dots, G_l) \cong (G_1', G_2', \dots, G_l')$ résulte $G_i \cong G_i'$ $(i = 1, 2, \dots, l)$. En effet, l'hypothèse precédente entraîne l'existence d'une application biunivoque φ de l'ensemble $L = O \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} G_i\right)$ sur l'ensemble $L' = O' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} G_i'\right)$, tel que de $a \cdot b = c$ $(a, b, c \in L)$ résulte $(\varphi a) \cdot (\varphi b) = \varphi c$ $(\varphi a, \varphi b, \varphi c \in L')$. Comme on a alors $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ pour tout $a \in L$, on a aussi, pour tout $a \in L$, $(\varphi a) \cdot (\varphi 0) = (\varphi 0) \cdot (\varphi a) = \varphi 0$. On peut conclure de là que $\varphi 0 = 0'$. Si $a_\nu^i \cdot a_\mu^i = a_\rho^i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, l;\ 1 \leqslant \nu,\ \mu, \rho \leqslant p_i)$, on a $(\varphi a_\nu^i) \cdot (\varphi a_\mu^i) = \varphi a_\rho^i \neq 0'$ d'après la remarque précédente (tenant compte du fait que l'application φ est biunivoque). Donc, φ applique le groupoïde G_i sur le groupoïde G_i' $(i = 1, 2, \dots, l)$, de sorte que $G_i \cong G_i'$ $(i = 1, 2, \dots, l)$.

Du fait que nous venons de démontrer résulte que si l'on remplace $G_1, G_2, \cdots, G_l$ par tous les groupoïdes (1) possibles d'ordres correspondents, on obtient $B(p_1) B(p_2) \cdots B(p_l)$ groupoïdes non-isomorphes. De plus, le nombre $B(1 + \sum_{i=1}^{l} p_i)$ est sûrement supérieur à ce produit, parce qu'on ne peut pas aboutir par le procédé cité au groupoïde $G = \{0, a, b, \cdots\}$ d'ordre $1 + \sum_{i=1}^{l} p_i$ où $a.b = 0$ pour tous $a, b \in G$. Notre théorème est donc complètement démontré.

Passons au cas où quelques uns des nombres $p_1, p_2, \cdots, p_l$ sont égaux. Supposons, par exemple, que $p_1 = p_2$ et que les nombres $p_3, p_4, \cdots, p_l$ soient différents entre eux et de p_1. Dans ce cas on ne pourrait pas justifier l'assertion du théorème précédent au moyen du procédé exposé. Soient

$$G_{p_1}^1,\ G_{p_1}^2, \dots,\ G_{p_1}^{B(p_1)};\quad G_{p_2}^1 = G_{p_1}^1,\ G_{p_2}^2 = G_{p_1}^2, \dots,\ G_{p_1}^{B(p_l)};$$

$$G_{p_3}^1,\ G_{p_3}^2, \dots,\ G_{p_3}^{B(p_3)}\ ; \dots ;\quad G_{p_l}^1,\ G_{p_l}^2, \dots,\ G_{p_l}^{B(p_l)}$$

tous les groupoïdes respectivement d'ordres $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Les groupoïdes $(G_{p_1}^{i_1}, G_{p_2}^{i_2}, G_{p_3}^{i_3}, \ldots, G_{p_l}^{i_l})$ et $(G_{p_2}^{i_2}, G_{p_1}^{i_1}, G_{p_3}^{i_3}, \ldots, G_{p_l}^{i_l})$ sont isomorphes, d'où la conclusion que l'on obtient par le procédé cité les groupoïdes non-isomorphes suivants:

$$
\begin{array}{llll}
(G_{p_1}^1, G_{p_1}^1), & (G_{p_1}^2, G_{p_1}^2), & \ldots, & (G_{p_1}^{B(p_1)}, G_{p_1}^{B(p_1)}) \\
(G_{p_1}^1, G_{p_1}^2), & (G_{p_1}^2, G_{p_1}^3), & \ldots & \\
\vdots & & & \\
(G_{p_1}^1, G_{p_1}^{B(p_1)-1}), & (G_{p_1}^2, G_{p_1}^{B(p_1)}), & & \\
(G_{p_1}^1, G_{p_1}^{B(p_1)}), & & &
\end{array}
$$

où le symbole $(G_{p_1}^i, G_{p_1}^j)$ désigne l'ensemble de tous les groupoïdes $(G_{p_1}^i, G_{p_2}^j, G_{p_3}^{i_3}, \ldots, G_{p_l}^{i_3})$, les symboles $G_{p_3}^{i_3}, G_{p_4}^{i_4}, \ldots, G_{p_l}^{i_l}$ épuisant tous les groupoïdes respectivement d'ordres $p_3, p_4, \ldots, p_l$. D'après ce qui précède, dans ce cas nous obtenons exactement

$$\binom{B_1(p_1)+1}{2} B(p_3) \ldots B(p_l)$$

groupoïdes non-isomorphes.

C'est par une considértion analogue que l'on peut justifier le

Théorème 2. Soient les nombres naturels $p_1, p_2, \ldots . p_l$ différents et les nombres naturels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots., \lambda_l$ arbitraires. On a alors

$$B\left(1+\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_i\right) > \prod_{i=1}^{l} \binom{B(p_i)+\lambda_i-1}{\lambda_i}. \tag{3}$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_l = 1$ le théorème 2 se ramène au théorème 1.

Soit enfin n un nombre naturel quelconque. Ce nombre (si $n > 1$) peut être représenté comme somme de nombres naturels de plusieurs façons différentes. Soient σ_1 et σ_2

$$\sigma_1: \ n = \underbrace{(p_1^1+p_1^1+\ldots+p_1^1)}_{\lambda_1^1 \text{ termes}} + \underbrace{(p_2^1+p_2^1+\ldots.+p_2^1)}_{\lambda_2^1 \text{ termes}} + \ldots + \underbrace{(p_l^1+p_l^1+\ldots+p_l^1)}_{\lambda_l^1 \text{ termes}},$$

$$\sigma_2: \ n = \underbrace{(p_1^2+p_1^2+\ldots.+p_1^2)}_{\lambda_1^2 \text{ termes}} + \underbrace{(p_2^2+p_2^2+\ldots.+p_2^2)}_{\lambda_2^2 \text{ termes}} + \ldots + \underbrace{(p_m^2+p_m^2+\ldots.+p_m^2)}_{\lambda_m^2 \text{ termes}}$$

deux telles représentations du nombre n. Si L_1 et L_2 sont deux groupoïdes (1), obtenus par le procédé mentionné, qui correspondent aux représentations différantes σ_1 et σ_2, ces deux groupoïdes sont non-isomorphes.

On déduit de ce fait et du théorème 2 pour tout n naturel l'inégalité

$$B(n+1) > \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{l} \binom{B(p_i^\sigma)+\lambda_i^\sigma-1}{\lambda_i^\sigma}, \tag{4}$$

où σ parcourt toutes les représentations différentes du nombre n comme somme de nombres naturels.

Toutes les considération précédentes peuvent être généralisés comme il suit.

Supposons que l' on ait defini dans l'ensemble S un ensemble d'opérations de longuers quelconques. Soient $\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$ et $\psi_i\,(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$ $(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i} \in S;\ i = 1, 2, \ldots, q)$ les symboles désignant les éléments de S produits, d'après une certaine loi, des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_{s_i} \in S$ au moyen des opérations introduites. Supposons encore qui si a_ν figure dans $\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$, a_ν figure nécessairement dans $\psi_i\,(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})\,(i = 1,2, \ldots, q)$.

Appelons l'ensemble S „algèbre (1)" si les équations

$$(5) \qquad \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i}) = \psi_i\,(a_1,\ a_2 \ldots, a_{s_i})$$

$$(i = 1, 2, \ldots, q;\ q \text{ nombre naturel fixe})$$

sont satisfaites pour tous $a_1, a_2, \ldots, a_{s_i} \in S$.

Si $B(n)$ désigne le nombre de toutes les algèbres (1) non isomorphes d'ordre n, alors $B(n)$ satisfait à l'inegalité (4).

Citons un exemple d'algèbre (1). Soit f une opération binaire définie dans l'ensemble S et F une opération ternaire définie dans ce même ensemble $(f(a, b,) = c;\ a, b, c \in S;\ F(a, b, c) = d;\ a, b, c, d, \in S)$. Supposons que f et F possèdent les propriétés suivantes

$$f(F(a, b, c), c) = F(a, a, f(b, c)),$$

$$f(a, f(b, c)) = F(a, b, f(c, a)) \quad \text{pour tout } a, b, c \in S,$$

Dans ce cas (S, f, F) présente un exemple d'algèbre (1).

Rezime

O BROJU IZVESNIH ALGEBRI

Slaviša Prešić

Neka je u skupu S definisano izvesno mnoštvo operacija raznih dužina.

Neka su

$$\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i}) \text{ i } \psi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i}) \quad (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{s_i} \in S;\ i = 1, 2, \ldots, q)$$

skraćenice za elemente skupa S stvorene na izvestan način pomoću elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_{s_i}$ i pomoću definisanih operacija. Nazovimo skup S „algebra (1)", ako su jednakosti (5) ispunjene za sve $a_1, a_2, \ldots, a_{s_i} \in S$. Za svaku od jednakosti (5) pretpostavljamo da su takve da ako a_ν ulazi u $\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$, onda a_ν nužno ulazi i u $\psi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$.

Ako je $B(n)$ broj svih neizomorfnih algebri (1) reda n, onda za $B(n)$ vredi nejednakost (4).

Za $B(n)$ su dobijene takođe i nejednakosti (2) i (3). Ovde su $p_1, p_2, \ldots, p_l$ međusobom različiti prirodni brojevi, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ proizvoljni prirodni brojevi.

Navodimo i jedan primer algebre (1). Neka su u S definisane binarna operacija f, $(f(a,b)=c;\ a,b,c \in S)$ i ternarna operacija F, $(F(a,b,c)=d;\ a,b,c,d \in S)$. Neka su f i F takve operacije da je

$$f(F(a,b,a),c) = F(a,a,f(b,c))$$

$$f(a,f(b,c)) = F(a,b,f(c,a)) \text{ za sve } a,b,c, \in S.$$

U ovom slučaju je (S,f,F) jedan primer algebre (1).

Asocijativni grupoid je takođe primer algebre (1), dok grupa nije.