ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la convergence des suites.*
Note (*) de M. **Slaviša B. Prešić**, présentée par M. Paul Montel.

Soient E, un espace métrique complet, k un nombre naturel fixé et $q_1, q_2, \ldots, q_k$ des nombres non négatifs dont la somme est inférieure à 1. Désignons par $F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$ l'ensemble de toutes les fonctions $f: E^k \to E$ possédant la propriété suivante :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &d(f(u_1, u_2, \ldots, u_k), f(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \\ &\quad \leq q_1 d(u_1, u_2) + q_2 d(u_2, u_3) + \ldots + q_k d(u_k, u_{k+1}), \end{aligned}$$

pour tous $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1} \in E$.

Dans le cas où $k = 1$, la condition (1) se réduit à la condition connue au moyen de laquelle on définit l'opérateur de contraction.

Théorème. — *Soit $f_n \in F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$ une suite de fonctions qui remplit la condition suivante :*

Il existe une série convergente à termes positifs a_n telle qu'on ait

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

et que l'inégalité

$$(2)\qquad d(f_{n+1}(u_1, u_2, \ldots, u_k), f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)) \leq a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

soit valable pour $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$.

Soit ensuite $x_n (x_n \in E;\ n = 1, 2, \ldots)$ une suite dont les membres satisfont à la condition

$$(3)\qquad x_{n+k} = f_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_k$ étant choisis arbitrairement. Alors :

1° *La suite x_n converge dans* E;

2° *La suite f_n converge uniformément vers la fonction limite $f \in F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$;*

3° *L'équation*

$$(4)\qquad x = f(x, x, \ldots, x)$$

possède dans E *la solution unique*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Démonstration. — 1° En posant $\Delta_n = d(x_n, x_{n+1})$ on obtient, d'après (1), (2) et (3),

$$\Delta_{n+k} \leq a_n + q_1\Delta_n + q_2\Delta_{n+1} + \ldots + q_k\Delta_{n+k-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Désignons par b_n une suite qui remplit les conditions suivantes :

$b_n > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$; $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}/b_n = 1$; $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Une telle suite existe pour toute série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nous allons prouver maintenant l'existence de deux nombres positifs K et n_0 tels qu'on ait

$$(5) \qquad \Delta_n \leqq \mathrm{K} a_n b_n \qquad (n = n_0, n_0+1, \ldots).$$

Soit q un nombre satisfaisant à la condition

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k < q < 1.$$

Étant donné que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

il existe, ce qui est facile à vérifier, un nombre naturel n_0 tel qu'on ait

$$\frac{1 + q_1 b_n + q_2 b_{n+1} + \ldots + q_k b_{n+k-1}}{b_{n+k}} < q \qquad (n \geqq n_0),$$

$$\frac{a_{n+k}}{\max(a_n, \; a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})} > q \qquad (n \geqq n_0),$$

de manière qu'on aura pour $n \geqq n_0$

$$\frac{1 + q_1 b_n + q_2 b_{n+1} + \ldots + q_k b_{n+k-1}}{b_{n+k}} < \frac{a_{n+k}}{\max(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})}$$

ou

$$(6) \qquad a_n + q_1 a_n b_n + \ldots + q_k a_{n+k-1} b_{n+k-1} < a_{n+k} b_{n+k} \qquad (n \geqq n_0).$$

Si l'on pose

$$\mathrm{K} = \max\left(\frac{\Delta_{n_0}}{\Delta_{n_0} b_{n_0}}, \frac{\Delta_{n_0+1}}{a_{n_0+1} b_{n_0+1}}, \ldots, \frac{\Delta_{n_0+k-1}}{a_{n_0+k-1} b_{n_0+k-1}}; 1\right),$$

on obtient, d'après (6),

$$a_n + q_1 \mathrm{K} a_n b_n + q_2 \mathrm{K} a_{n+1} b_{n+1} + \ldots + q_k \mathrm{K} a_{n+k-1} b_{n+k-1} < \mathrm{K} a_{n+k} b_{n+k} \qquad (n \geqq n_0).$$

En s'appuyant sur cette inégalité, on démontre la validité de (5) par induction.

Il résulte cependant à partir de (5) que la suite x_n est une suite de Cauchy, donc convergente, l'espace E étant complet.

2° A partir de la condition (2) on conclut immédiatement que la suite f_n est convergente d'une manière uniforme. Posons

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \lim_{n\to\infty} f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k).$$

On déduit de l'inégalité

$$\begin{aligned} & d(f(u_1, u_2, \ldots, u_k).\, f(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \\ & \quad \leqq d(f(u_1, u_2, \ldots, u_k), f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)) \\ & \qquad + d(f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k), f_n(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \\ & \qquad + d(f_n(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1}), f(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

qu'on a $f \in F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$, puisque $f_n \in F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $f_n \to f (n \to \infty)$.

3° Mettant à profit l'inégalité

$$\begin{aligned} & d(f(u_1, u_2, \ldots u_k), f(u, u, \ldots, u)) \\ & \leq d(f(u_1, u_2, \ldots, u_k), f(u_2, u_3, \ldots, u_k, u)) \\ & \quad + d(f(u_2, u_3, \ldots, u_k, u), f(u_3, u_4, \ldots, u, u)) \\ & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \quad + d(f(u_k, u, \ldots, u), f(u, u, \ldots, u)) \qquad (u_i, u \in E), \end{aligned}$$

valable pour $f \in F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$, on déduit immédiatement que $\lim_{n \to \infty} x_n$ est une solution de l'équation (4). L'unicité de cette solution résulte du théorème de Banach sur le point fixe. En effet, la fonction $\bar{f} (\bar{f} : E \to E)$

$$\bar{f}(u) = f(u, u, \ldots, u) \qquad (u \in E)$$

remplit, d'après (1), la condition suivante :

$$d(\bar{f}(u), \bar{f}(v)) \leq (q_1 + q_2 + \ldots + q_k) d(u, v) \qquad (u, v \in E);$$

$\bar{f}$ est donc un opérateur de contraction de l'espace métrique E.

(*) Séance du 29 mars 1965.

(*Institut mathématique,*
Knez Mihailova 35, *Belgrade, Yougoslavie.*)