Mala математичка библиотека

СЛАВИША Б. ПРЕШИЋ

РАЗНИЦЕ, I

СЛИКАРСТВО ПОЕЗИЈА МУЗИКА МАТЕМАТИКА

ЈЕЗИК, ЗАПИС, ЗНАК

ПРОСВЕТНИ ПРЕГЛЕД
БЕОГРАД, 1997

Уредник Мале математичке библиотеке
Зорица Милатовић

Рецензенти
Проф. др Светозар Милић
Слободан Вујовић, проф.

Ова библиотека конципирана је и остварена у сарадњи са
Министарством просвете Републике Србије

Мала математичка библиотека

Славиша Б. Прешић

РАЗНИЦЕ, I

Просветни преглед
Београд

У в о д

Ова књига није ни збирка задатака ни неки уобичајени уџбеник, али у некој мери јесте и једно и друго, па и треће : у њој има и истраживачких идеја, мисли о томе како се *математика и прави.* Та 'разност' је разлог што књига носи назив *Разнице.*

Ево неких њених основних одлика:

(*i*) Поменути задаци махом нису од оних који се најчешће срећу по збиркама, већ има доста нових, свежих.

(*ii*) Математика се не излаже као нешто што је већ потпуно готово, завршено , па стога нама преостаје само да то све учимо и научимо. Насупрот томе стално је присутан труд да се покаже да се она може правити, да је она -слободније речено- *и жива.* С тим у складу изложене су неке истраживачке идеје, међу којим значајно место припада тзв. *идеји преноса* (вид. Напомену 14.1). Даље, често се указује на неке ствари, раније учене, које су у доброј мери својеврсне заблуде. А такве заблуде су нам 'убациване у главу' кад наш узраст 'није био дорастао' бољим и мање укоченим објашњењима.

(*iii*) У књизи је изложена и по која досетка, али у њој претежно се иде за тим да 'се упознају што општије мисаоне стазе' и као плод да се искажу разне правилности. Тако, има опште приче о структури реалних бројева, о решавању ма каквих система линеарних једначина или неједначина, о решавању ирационалних једначина (али не само на уобичајен начин већ и на много општији), о децималској методи за тражење реалног решења дате једначине (рецимо, за 'вађење' трећег корена из 2), итд.

Књига је намењена професорима и наставницима математике, више заинтересованим ђацима, па и студентима. У ствари и не само њима, јер једна од њених битних одлика су поступност и слојевитост; па у њој скоро свако за себе може по нешто наћи.

На крају желим да се захвалим рецензентима Светозару Милићу и Слободану Вујићу на корисним примедбама и сугестијама.

Славиша Б. Прешић

Укратко о садржају:

Једнакосни докази (Раз 1- 5). Закон замене за једнакост (вид. (13.2)).

Тврђење: реални бројеви чине комплетно уређено поље (Напомена 44.1).

Коришћење таутологија и ваљаних формула (Напомене 18.1, 18.2 као и Напомена 17.1)

Решавање једначина, неједначина, уопште формула помоћу одговарајућег еквиваленцијског ланца (Раз 18, 20, 21, 23, 26, 27, 50, 53, 54 и др). Решен облик (Раз 30, 31, 33; Напомене 30.1 и 30.2). Једначине са коренима -на стандардан и на општији начин (Раз 50, 55, 56; Напомена 55.1)

$Gaus-$ов поступак за решавање система линеарних једначина (Раз 22)

$Fourier-Motzkin$ метод за решавање система линеарних неједначина (Раз 57, 58).

Децималски метод за $\sqrt[3]{2}$ и шире уз строга објашњења (Раз 41, 42, 43, 44)

Једна непозната а више једначина (Раз 27, 35). Елиминација квантора {Раз 36, Напомена 36.1, Раз 37, 38 (веза са Аналитичком геометријом), Раз 51, 55 }

Математичке индукције (Раз 61-69)

Раз 1. *Доказати једнакости*

1) $(1+2)\cdot(3+4) = 21$ 2) $21 = (1+2)\cdot(3+4)$ 3) $12-(2-3) = 3-(4-14)$

Решење. 1) Ту једнакост ћемо доказати **слева-надесно**, што значи да ћемо поћи од њене леве стране и у неколико корака је преобратити у десну страну. У сваком од тих корака се користе извесна основна својства једнакости. Један слева-надесно доказ гласи

$$\begin{aligned}(1+2)\cdot(3+4) &= 3\cdot(3+4) && \text{Јер } 1+2=3\\ &= 3\cdot 7 && \text{Јер } 3+4=7\\ &= 21 && \text{Јер } 3\cdot 7 = 21\end{aligned}$$

2) Сада очигледно није сасвим подесно правити доказ слева-надесно, већ доказ **здесна-налево**. Један такав доказ гласи

$$\begin{aligned}(1+2)\cdot(3+4) &= 3\cdot(3+4) && \text{Јер } 1+2=3\\ &= 3\cdot 7 && \text{Јер } 3+4=7\\ &= 21 && \text{Јер } 3\cdot 7 = 21\end{aligned}$$

Вероватно сте приметили да смо у ствари преписали под 1) изложени слева-надесно доказ једнакости $(1+2)\cdot(3+4) = 21$. Наиме, у општем случају: *Ако је*

$$A = C1 = C2 = \ldots = Ck = B$$

слева-надесно доказ једнакости $A = B$, *онда је то уједно и здесна-налево доказ једнакости* $B = A$. Међутим, може се догодити да 'нам неко не призна горњи здесна-налево доказ'. И ту има лека: *у општем случају "преокретањем" здесна-налево доказа настаје одговарајући слева-надесно доказ.* Наиме: *Ако је*

$$B = C1 = C2 = \ldots = Ck = A$$

здесна-налево доказ једнакости $A = B$, *онда*

$$A = Ck = \ldots = C2 = C1 = B$$

један слева-надесно доказ исте једнакости.

У складу са управо реченим за једнакост 2) један слева-надесно доказ гласи:

$$\begin{aligned}21 &= 3\cdot 7 && \text{Јер } 21 = 3\cdot 7\\ &= (1+2)\cdot 7 && \text{Јер } 3 = 1+2\\ &= (1+2)\cdot(3+4) && \text{Јер } 7 = 3+4\end{aligned}$$

Премда је у питању веома једноставан пример лако се уочава следећа општа чињеница:

Ако за извесну једнакост $A = B$ знамо да направимо један од доказа: слева-надесно или здесна-налево, онда сасвим лако од њега можемо направити онај други.

3) Ни овај пример није тежак, али у њему на први поглед није подесно правити ни слева-надесно ни здесна-налево доказ. Сада је подесно користити ову замисао:

Ради доказа неке једнакости $A = B$ може се чинити овако: доказати понаособ овакве две једнакости $A = R$ и $B = R$, где је R неки израз, тј. доказати да су A и B једнаки једном истом изразу R.

Доказе направљене по тој замисли зваћемо **ка-истом** докази. Један такав доказ једнакости 3) гласи:

Први део: $12-(2-3) = 12-(-1) = 12+1 = 13$

Други део: $3-(4-14) = 3-(-10) = 3+10 = 13$

Закључак: Како $12-(2-3) = 13$ и $3-(4-14) = 13$ то важи једнакост $12-(2-3) = 3-(4-14)$.

Није тешко увидети да се и ма који ка-истом доказ може лако "преточити" на одговарајући слева-надесно, односно здесна-налево доказ.

Напомена 1.1. До сада смо се срели са тзв. *једнакосним* доказима, чија краћа имена су: слева-надесно, здесна-налево, и ка-истом.

Раз 2. *Доказати једнакост*

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (b+c)(c+a)(a+b)$$

где су a, b, c ма који реални бројеви[1]

Решење. Ради лакшег излагања уводимо следеће ознаке:

$$L = a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc; \quad D = (b+c)(c+a)(a+b)$$

Изабрали смо слова L, D јер су то почетна слова речи леви, десни. У складу са тим ознакама наш задатак је да докажемо једнакост $L = D$.

[1] Друкчије се каже да је дата једнакост **идентитет** у односу на скуп $\mathcal{R}$ свих реалних бројева

Први начин: замисао је 'ка-истом' доказ (видети Раз 1). Наиме, средимо изразе L, D, тј. обавимо сва множења, сабирања и одузимања која нам се током сређивања буду појавила. Тако, $(b+c)^2$ ћемо заменити са $b^2+2bc+c^2$, и сл. Тако имамо:

$$\begin{aligned} L &= a(b^2+2bc+c^2)+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc \\ &= ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2+2abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (bc+ba+c^2+ca)(a+b) \\ &= bca+b^2c+ba^2+b^2a+c^2a+c^2b+ca^2+abc \\ &= ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2+2abc \end{aligned}$$

Будући да су L и D једнаки истом изразу закључујемо да важи једнакост $L=D$. Крај доказа.

У вези са изложеним решењем додајмо и ово. У складу са еквиваленцијом

$$L=D \quad \Leftrightarrow \quad L-D=0$$

доказ смо могли водити и овако: Поћи од разлике $L-D$, обавити сређивање и као завршни резултат ће се појавити 0.

Други начин: коришћењем неких чињеница о полиномима, односно овде о квадратним триномима. Размишљамо овако:

> Десна страна дате једнакости је дата у растављеном облику: као производ од три линеарна чиниоца. Посматрајмо је као полином по a. Одмах видимо да се поништава када $a=-b$ и када $a=-c$. Уколико важи једнакост $L=D$ исто својство мора имати и њена лева страна L. То се лако проверава. Тако ако $a=-b$ за израз L имамо
>
> $$L=(-b)(b+c)^2+b(c-b)^2+4b^2c=0 \quad \text{(краћим свођењем)}$$
>
> Слично се добије $L=0$ и када $a=-c$. Даље расуђујемо овако. Израз L, гледан као полином по a је квадратни трином. Будући да су му $-b$ и $-c$ корени то за L мора важити једнакост облика
>
> $$L=K(a-(-b))(a-(-c)), \text{ тј. } L=K(a+b)(a+c)$$
>
> где је K његов коефицијент уз члан a^2. Али, скоро на први поглед се види да тај коефицијент износи $b+c$. И тако заменом K са $b+c$ од израза L одмах настаје израз D. Крај доказа.

Напомена 2.1. Изрази L и D имају једну посебност: оба су симетрична по a, b, c. То додуше нисмо користили, али да се рецимо догодило да један од њих јесте а други није симетричан тада бисмо могли одмах закључити да једнакост $L=D$ не важи. Примера ради ова једнакост

$$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)=a^2+2b^2+3c^2$$

не може важити за све реалне бројеве a, b, c.

Раз 3. *Неко каже да је негде видео идентитет облика*

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)+K \;=\; (ay-bx)^2$$

где је K неки израз, али да се не може сетити који је то израз. Помозите му и одредите тај K.

Решење. Просто, дату једнакост схватите као једначину по K и потражите га. Након краћег рачуна се добије $K=-(ax+by)^2$.

Напомена 3.1. Иако је претходни пример прилично једноставан он садржи једну малу методолошку идеју. Наиме, поред околности да ми можемо решавати постављене задатке - и многи само тако и уче математику - можемо покушавати да продремо у 'мисаони склоп' појединих задатака тако што ћемо сами правити сличне задатке.

Раз 4. *Доказати једнакост* $\sqrt{3+\sqrt5}\;+\;\sqrt{3-\sqrt5}\;=\;\sqrt{10}$

Решење. Редом са L, D означимо леву и десну страну те једнакости. Тада имамо:

$$L^2=3+\sqrt5\;+\;3-\sqrt5\;+\;2\sqrt{3+\sqrt5}\sqrt{3-\sqrt5}\;=\;10, \qquad D^2=10$$

Видимо да $L^2=D^2$, па пошто су L, D такође позитивни бројеви, то закључујемо једнакост $L=D$. Подробније речено, користили смо ову условну еквиваленцију:

$$L^2=D^2 \;\Leftrightarrow\; L=D \qquad \text{(Уколико } L,\ D>0) \tag{4.1}$$

Напомена 4.1. Као што се из тог примера види поред до сада упознатих замисли доказивања једнакости имамо и следећу. *Да бисмо доказали неку једнакост $L=D$ довољно је доказати неки услов, неку формулу $Uslov$ али такав да важи импликација: $Uslov \;\Rightarrow\; L=D$.* У наредном задатку упознајемо још један -мало сложенији- пример доказивања једнакости.

Раз 5. *Доказати једнакост* $\sqrt[3]{20+14\sqrt2}\;+\;\sqrt[3]{20-14\sqrt2}=4.$

Решење. Користимо редом ознаке L, D за леву и десну страну те једнакости. Тада имамо:

$$\begin{aligned} L^3 = {} & 20+14\sqrt2\;+\;20-14\sqrt2 \\ & +3\sqrt[3]{20+14\sqrt2}\sqrt[3]{20-14\sqrt2}(\sqrt[3]{20+14\sqrt2}\;+\;\sqrt[3]{20-14\sqrt2}\,) \end{aligned}$$

тј. $L^3=20+14\sqrt2\;+\;20-14\sqrt2\;\;+3\sqrt[3]{20+14\sqrt2}\;\sqrt[3]{20-14\sqrt2}\;\cdot\;L$

одакле закључујемо да L задовољава ову x-једначину

(*) $$x^3 = 40 + 6x$$

Провером се закључује да је њено решење и D, односно број 4. Користићемо ту околност да решимо ту кубну једначину и уз то проверимо да ли њена решења L и D морају да се поклопе. Заиста,прво ћемо раставити полином $x^3 - 6x - 40$ како следи:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x - 40 &= x^3 - 6x - 40 - (4^3 - 6 \cdot 4 - 40) \qquad \text{(Одузели смо 'нулу')} \\ &= (x^3 - 4^3) \; - \; 6(x - 4) \\ &= (x - 4)(x^2 + 4x + 16 - 6) \\ &= (x - 4)(x^2 + 4x + 10) \end{aligned}$$

На основу тога закључујемо да једначина (*) има ова три решења: 4, $\;-2 \pm i\sqrt{6}$ од којих само једно реално и то 4. Али, и реалан број L јој је решење. Елем, мора важити једнакост $L = 4$. Крај доказа једнакости $L = D$.

Раз 6. *Доказати условни идентитет, односно импликацију*

Ако $a + b + c = 0$ *онда* $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \qquad (a, b, c \in \mathcal{R})$

Упутство. У складу са чињеницом да се услов $a + b + c = 0$ може решити по једној од промењљивих a, b, c дати условни идентитет се може превести на обичан, односно безуслован идентитет. Рецимо, решавањем услова $a + b + c = 0$ по c добијемо $c = -a - b$ а дати условни се своди на овај безуслован:

$$a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3ab(a + b) \qquad (a, b \in \mathcal{R})$$

који се лако доказује.

Напомена 6.1. **Уопште, на сличан начин се доказује импликација облика:**

$$(P1 \wedge P2 \ldots \wedge Pr) \Rightarrow Q$$

уколико услов $P1 \wedge P2 \ldots \wedge Pr$ можемо решити (по неким његовим промењљивим).

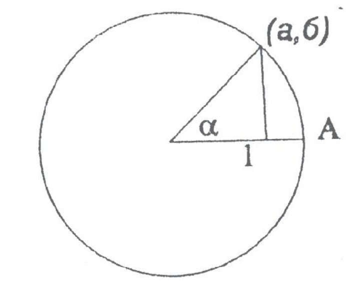
Раз 7. *Доказати импликације*

$$s = a + b + c \;\Rightarrow\; (as + bc)(bs + ca)(cs + ab) = (b + c)^2(c + a)^2(a + b)^2$$

$$(a + b + c + d = A,\; a + b - c - d = B,\; a - b + c - d = C,\; a - b - c + d = D) \\ \Rightarrow [ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2);\; AB(A^2 + B^2) = CD(C^2 + D^2)]$$

Раз 8. *Како да се подесно, што овде значи без употребе квадратног корена, задани услов $a^2 + b^2 = 1$ реши по промењљивим $a, b \in \mathcal{R}$?*

Решење. Замисао је следећа. Ако се, слободније речено, крећемо по кружници почев од њене тачке A "у смеру супротном казаљци часовника" (вид. цртеж), онда нам је положај у сваком тренутку одређен одговарајућим углом α.



Сходно томе можемо помислити да постоје неке две функције f, g тако да важе једнакости $\;a = f(\alpha), \;\; b = g(\alpha)$. У ствари, такве две функције су већ веома чувене у математици; реч је о функцијама sin и cos. Тако, важе једнакости

(*) $$a = cos\alpha, \quad b = sin\alpha$$

У ствари, тако смо већ стигли до једног решења задатка.

Напомена 8.1. **Једнакост облика (*) тачно речено има овај смисао**

> **Ако је α ма који реалан број[2], онда $a,\ b$ одређени једнакостима (*) задовољавају једнакост $a^2 + b^2 = 1$. Обратно, ако реални бројеви a, b задовољавају ту једнакост онда постоји реалан број α такав да важе једнакост (*).**

Имајући то на уму обрасце (*) можемо -са доста смањеним коришћењем сликевитости како следи. У ствари, проблем је како доказати импликацију облика

(**) $$a^2 + b^2 = 1 \;\Rightarrow\; (\exists \alpha \in R)\,(a = cos\alpha, \;\; b = sin\alpha)$$

где $\exists$ је логички *квантор*, **коме у обичном језику одговарају речи** *постоји, за неки* **и сл. Заиста, из једнакости $a^2 + b^2 = 1$ закључујемо да за број b морају да важе неједнакост $0 \le b^2 \le 1$, одакле добијамо неједнакости: $-1 \le b \le 1$. И сада користимо ово помоћно тврђење (лему):**

Лема 8.1. *Ако је x реалан број (укључно) између -1 и 1 онда постоји бар један реалан број α такав да важи једнакост $x = sin\alpha$. Уз то додајемо да међу таквим α постоји тачно један од њих који је (укључно) између $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$*

Према тој леми, број b је изразив у облику $b = sin\alpha$, са неким α. Из једнакости $a^2 + b^2 = 1$ лако добијамо $a^2 = cos^2\alpha$, одакле имамо два случаја:

$1^0 \;\; a = cos\alpha \qquad 2^0 \;\; a = -cos\alpha$

[2] Тај реалан број је у ствари *мера* одговарајућег геометријског угла

У случају 1^0 импликација (**) се одмах доказује. Међутим, у случају 2^0 имамо ове две једнакости $a = -cos\alpha$, $b = sin\alpha$. Уведимо нов угао α' овако: $\alpha' = \pi - \alpha$. Са тим углом α' претходне једнакости прелазе у ове две $a = sin\alpha'$, $b = cos\alpha'$, чиме се завршава доказ тврђења (**).

Додајмо да у тврђењу (**) знак $\Rightarrow$ сме бити замењен знаком $\Leftrightarrow$. Још општије, важи ова еквиваленција

(8.1) $$a^2 + b^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; (\exists\alpha \in R)\ (a = rcos\alpha, \quad b = rsin\alpha)$$
(a, b, r су ма који реални бројеви)

Раз 9. *Доказати импликацију*

$$(a_1^2 + b_1^2 = 1,\ a_2^2 + b_2^2 = 1, a_1a_2 + b_1b_2 = 0) \quad\Rightarrow\quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

где су a_1, a_2, b_1, b_2 ма који реални бројеви.

Решење. Изложићемо два начина: један коришћењем еквиваленције (8.1), и други 'чисто алгебарско-логички' начин. Први ће у ствари бити *директан* а други *индиректан*, односно коришћењем идеје *reductio ad absurdum*. Први начин:

Најпре уочимо следећи импликацијски ланац

$$\begin{aligned}
&(a_1^2 + b_1^2 = 1,\ a_2^2 + b_2^2 = 1, a_1a_2 + b_1b_2 = 0)\\
&\quad\Rightarrow\quad a_1 = cos\alpha, b_1 = sin\alpha, a_2 = cos\beta, b_2 = sin\beta, a_1a_2 + b_1b_2 = 0
\end{aligned}$$
(α, β су неки реални бројеви (вид. (8.1))

$$\Rightarrow\quad cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta = 0$$

$$\Rightarrow\quad cos(\alpha - \beta) = 0$$
(Коришћење добро познате тригонометријске формуле)

А сада ради доказа једнакости $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$, коришћењем неких основних тригонометријских формула, обавимо овај "рачун":

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 &= cos\alpha sin\alpha \;+\; cos\beta sin\beta\\
&= \tfrac{1}{2}(sin2\alpha \;+\; sin2\beta) \;=\; sin(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta) \;=\; 0
\end{aligned}$$

јер смо већ извели једнакост: $cos(\alpha - \beta) = 0$

Тако се првим начином завршава доказ. *Други начин:*

Да бисмо доказали дату импликацију за тренутак гледану као $P \Rightarrow Q$ доказаћемо да није могућа конјункција: P и $\neg Q$, односно да је немогућа ова конјункција:

(Kon) $$a_1^2 + b_1^2 = 1,\ a_2^2 + b_2^2 = 1, a_1a_2 + b_1b_2 = 0,\ a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0$$
где су a_1, a_2, b_1, b_2 неки реални бројеви.

Сада нам је наум да трећу једнакост решимо по a_1. Сходно томе разликујемо два случаја:

$1^0\ \ a_2 = 0, \qquad 2^0\ \ a_2 \neq 0$

У првом случају (Kon) се своди на:

$$a_1^2 + b_1^2 = 1,\ \ b_2^2 = 1,\ \ b_1b_2 = 0,\ \ a_1b_1 \neq 0$$

Лако је "посвађати" те формуле, тј. из њих извести неку противречност. Заиста, из друге и треће једнакости закључујемо једнакост $b_1 = 0$, која се очигледно свађа са "различитошћу" $a_1b_1 \neq 0$. Тако се завршава доказ у првом случају.

У другом случају најпре из треће једнакости добијамо: $a_1 = -\frac{b_1b_2}{a_2}$. Та једнакост нам допушта могућност да a_1 избацимо из (Kon). На такав начин од (Kon) после краћег "рачуна" настаје ова нова конјункција

$$b_1^2(a_2^2 + b_2^2) = a_2^2,\quad a_2^2 + b_2^2 = 1,\quad (a_2^2 - b_1^2)b_2 \neq 0$$

Међутим из прве и друге једнакости следи једнакост $b_1^2 = a_2^2$ која је очигледно противречна са различитошћу $(a_2^2 - b_1^2)b_2 \neq 0$, чиме се завршава доказ и у другом случају.

Раз 10. *Доказати импликацију*

$$(a_1^2 + b_1^2 = 1,\ a_2^2 + b_2^2 = 1, a_1a_2 + b_1b_2 = 0) \quad\Rightarrow\quad a_1^2 + a_2^2 = 1$$

Раз 11. *У књизи* П. С. Моденова: Сборник задач по специалЬном курсу элементарной математики, Москва 1957 *може се на страни 9, под бројем 4 наћи и следећи задатак:*

Доказати да из једнакости $a + b + c = 0$ следе једнакости

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc, \qquad \frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} * \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Раз 12. *Шта уопште логички значи решити неку једначину, као на пример $2 + x = 5$, где x може бити неки реалан број ?*

Одговор. Један начин одговарања је овај. Прво, замислимо, да x на све могуће начине замењујемо разним реалним бројевима, као: $1, 2, \pi, \sqrt{2}, 1/3$, итд. Друго, једначину $2 + x = 5$ схватимо као 'калуп' помоћу кога таквим замењивањима настају, праве се разне одређене једнакости као

(*) $2 + 1 = 5,\ 2 + 2 = 5,\ 2 + \pi = 5,\ 2 + \sqrt{2} = 5,\ 2 + \frac{1}{3} = 5,$ итд.

И тада решити дату једначину управо значи међу једнакостима (*) одвојити, наћи све оне које су *тачне*, и уз то запамтити одговарајуће вредности променљиве x. Очигледно је да је тачна само трећа једнакост и да тада x има вредност 3. Тај закључак се може **записати, изразити** овом логичком еквиваленцијом

(12.1) $\quad 2 + x = 5 \quad\Leftrightarrow\quad x = 3 \qquad$ (x је ма који реалан број)

Можда сумњичаво посматрате дозволу да x буде ма који реалан број ? Заиста, уколико рецимо x има вредност 4 та еквиваленција -опет својеврсни калуп- прави ову одређену еквиваленцију $2+4=5 \quad \Leftrightarrow \quad 4=3$, која је тачна благодарећи околности да се у Математичкој логици[3] узима да нека еквиваленција $p \Leftrightarrow q$ је тачна, тј. има вредност $\top$ и у случају ако оба p, q су нетачна, тј. оба имају вредност $\bot$. Приметимо да се у складу са реченим еквиваленција (12.1) може овако преизразити

$$(\forall x \in R)(2+x=5 \ \Leftrightarrow \ x=3)$$

Напомена 12.1. Додајемо још неке чињенице. *Прво,* сходно томе се да наведено објашњење заснива на појмовима *тачан, нетачан* и неким другим из 'њихове' околине, кажемо да је појам *Решити једначину* објашњен *семантички.* Поред тога постоји и тзв. *синтаксни* начин, у коме уместо појма тачан основну улогу има појам **доказан.** Да бисмо и тај начин видели, замислимо да смо структуру реалних бројева увели неким системом аксиома $Ax(\mathcal{R})$. Рецимо, најчувенији је начин који потиче од Д. Хилберта (1862-1943), једног од највећих математичара, и који се кратко описује овим речима:

Реални бројеви чине комплетно уређено поље

што ћемо подробније објаснити у Напомени 44.1.

И тада решити једначину $2+x=5$ значи: у скупу R наћи све вредности за x, рецимо у ознаци $vred$, тако да једнакости $2+vred=5$ буду доказиве помоћу таквих аксиома $Ax(\mathcal{R})$, друкчије речено, оне су *теореме* тих аксиома.

Друго, истакнимо да се употребом појма **облик** оба изложена начина могу описати овим речима:

> Решити једначину $2+x=5$, где $x \in R$, значи наћи све једнакости облика $2+x=5$ које су тачне у структури $\mathcal{R}$, односно доказиве помоћу аксиома те структуре.

Треће, јасно је да се сва досадашња прича о једначини $2+x=5$ може пренети и на случај неке ма које друге x-једначине, рецимо у ознаци $Jed(x)$. Даље, у складу са околношћу да при дефинисању појма *решити једначину* у основи учествије појам тачан, односно доказан не види се разлог зашто не бисмо сличном причом увели појам *решити неку неједначину, неки систем једначина, систем неједначина или уопште решити неку формулу.* Уз то истакнимо да се притом не мора појавити само једна непозната, као x, већ и неке друге у жељеном броју. О томе говори идући пример: Раз 13.

[3] Боље речено, тако се чини у тзв. класичној Математичкој логици. Иначе, Математичка логика има велики број разних, међу њима и некласичних, области

Раз 13. *У структури $\mathcal{R}$ реалних бројева решити дате формуле по наведеним непознатим:*

1) $x^2=4$ *по* x; 2) $a=1 \wedge a=2$ *по* a; 3) $x=1 \vee x=2$ *по* x;

4) $x>2$ *по* x; 5) $x>2 \wedge x<1$ *по* x; 6) $0.x=1$ *по* x;

7) $x+y=3 \wedge x-y=1$ *по* x,y; 8) $x+y=1$ *по* x,y

9) $x+y>3 \wedge x-y=1$ *по* x,y

Решење. 1) Та једначина има тачно два решења: 2 и -2. Сада попут (12.1) имамо ову еквиваленцију

$$x^2=4 \ \Leftrightarrow \ x=2 \ \vee \ x=-2 \tag{13.1}$$

2) Та формула, тј. конјункција две a-једначине је немогућа, тј. нема решења. 3) Уопште нека дисјункција $p \vee q$ има вредност $\top$ акко[4] p или q има вредност $\top$. Следствено, решења су 1 и 2. 4) Решења су управо сви реални бројеви већи од 2. 5) Нема решења јер нема ниједног реалног броја већег од 2 и мањег од 1. 6). Та једначина -тако се каже- **у ствари не садржи своју непознату.** Она је еквивалентна са $0=1$, па је немогућа, тј. нема решења. Можемо рећи и да је еквивалентна са $\bot$. У такве, стварно-несадржеће своје непознате, долазе рецимо и ове формуле по x: $2<1$, $0x+2<1$, $1<2+0.x$ Прве две су међу-еквивалентне, али и немогуће, док је трећа задовољена за сваки број x.
7) То је систем две линеарне једначине по x,y. Решићемо га "идејом замене". Тако, имамо овај еквиваленцијски ланац:

$x+y=3 \ \wedge \ x-y=1$

$\Leftrightarrow \quad x+y=3 \ \wedge \ x=y+1$ (Другу једначину смо решили по x)

$\Leftrightarrow \quad (y+1)+y=3 \ \wedge \ x=y+1$ (Обавили смо замену x са $y+1$, као и преписали једначину те замене. Вид. Напомену 13.1)

$\Leftrightarrow \quad y=1 \ \wedge \ x=y+1$

$\Leftrightarrow \quad y=1 \ \wedge \ x=2$

Тако закључујемо да дати систем има јединствено решење описано једнакостима $x=2$, $y=1$.

[4] По правилу писаћемо **акко** уместо: **ако и само ако**

8) У складу са еквиваленцијом $x+y=1 \;\Leftrightarrow\; y=1-x$ закључујемо:

> Једначина $x+y=1$ има бесконачно много решења при чему x може бити ма који реалан број, а одговарајући y је онда $1-x$

9) И ту формулу, систем једне једначине и једне неједначине, решавамо "идејом замене". Тако, имамо овај еквиваленцијски ланац:

$x+y>3 \;\;\wedge\;\; x-y=1$

$\Leftrightarrow \;\; x+y>3 \;\;\wedge\;\; x=y+1$ (Другу једначину смо решили по x)

$\Leftrightarrow \;\; (y+1)+y>3 \;\;\wedge\;\; x=y+1$ (Обавили смо замену x са $y+1$, као и преписали једначину те замене. Вид. Напомену 13.1)

$\Leftrightarrow \;\; y>1 \;\;\wedge\;\; x=y+1$

Тако закључујемо да дати систем има више решења одређених овако:

> y може бити ма који реалан број већи од 1, а одговарајуће x је онда $y+1$

Напомена 13.1. У вези са решавањем једначина, неједначина, уопште неке формуле $\phi(x,y,\ldots)$ по непознатим $x,y,\ldots$, истакнимо две ствари:

Прво, таква формула је **или** немогућа, тј. нема ниједно решење **или** је могућа, па онда или има тачно једно решење или их има више. Рецимо, то 'више' код система линеарних неједначина у ствари значи 'бесконачно много'. Али, рецимо, већ није тако у случају квадратних једначина, код којих се то 'више' преводи на 'два'.

Друго, при раду са једнакостима, често од велике користи може бити ово значајно својство једнакости

(13.2) *(Закон замене за једнакост)* Важи еквиваленција

$$x=A \;\wedge\; \psi(x) \quad\Leftrightarrow\quad x=A \;\wedge\; \psi(A)$$

(A је неки израз, а $\psi(x)$ нека формула, не нужно бројевна)

Речима: конјункција $x=A \;\wedge\; \psi(x)$ је еквивалентна са новом из ње настале задржавањем једнакости замене, тј. једнакости $x=A$ и замењивањем $\psi(x)$ са $\psi(A)$.

Иначе, лако се види да (13.2) важи. Заиста, ако x има ма коју вредност онда према томе да ли једнакост $x=A$ има вредност $\top$ или $\perp$ еквиваленција има исту логичку вредност као $\psi(A) \Leftrightarrow \psi(A)$, односно $\perp \;\Leftrightarrow\; \perp$; тј. увек има вредност $\top$. Крај Напомене 13.1.

Раз 14. *Решити по $x \in R$ једначину $2^x \;+\; x = 2^3 \;+3$*

Решење. Није тешко видети да број 3 јесте једно решење. Доказујемо да је и једино. Заиста, нека је a ма који број различит од 3. Тада:

> Ако $a>3$ имамо $2^a > 2^3$, па $2^a \;+\; a > 2^3 \;+\; 3$, тј. $2^a \;+\; a \neq 2^3 \;+\; 3$.
>
> Ако $a<3$ слично имамо $2^a \;+\; a < 2^3 \;+\; 3$, тј. $2^a \;+\; a \neq 2^3 \;+\; 3$.

Значи, ниједан број изузев 3 не може бити решење, па је завршен доказ јединствености тог решења.

Напомена 14.1.(методолошка) Можемо се питати, да ли такву замисао решавања има само та једначина или слично важи и за разне друге ? Да бисмо то 'прозрели' размотримо наведени доказ чији је плод : једначина $2^x + x = 2^3 + 3$ изузев 3 нема никоје друго решење. Та једначина се односи на структуру $\mathcal{R}$ па се у наведеном доказу користе разне њене чињенице, тврђења као: 3 је један од њених чланова, $+$ је операција, 2^x расте кад се x повећава, итд. Иначе, јасно је да уопште о структури $\mathcal{R}$ има бесконачно много тврђења, али услед коначности тај (па и сваки други) доказ може користити само њих коначно много. И сада је питање како да пронађемо те -речи ћемо- **упоришнице** доказа. Одмах истакнимо да у том смислу постоје разне могућности. По правилу, након налажења упоришница -а оне су плод, слободније речено, 'логичког скрозирања, логичког цеђења' дотичног доказа- гради се ново општије тврђење, за које се каже да из полазног настаје *методолошком идејом преноса.*
Рецимо, 'логичким скрозирањем, цеђењем' реченог доказа можемо изрећи ово тврђење:

> Нека је $f: R \to R$ реална функција која је растућа и нека је a ма који реалан број. Тада x-једначина $f(x) \;=\; f(a)$ има јединствено решење a.

Истичемо да је идеја преноса једна од најважнијих истраживачких, тј. методолошких идеја у математици уопште. Крај Напомене 14.1.

Раз 15. *Нека су a, b, c ма који реални бројеви. Доказати импликацију*

$$a+b+c=0 \;\Rightarrow\; b^2-4ac \geq 0$$

Као њене "примерке" извести ова тврђења

1^0 *Ако квадратна једначина $x^2+px+q=0$,где $p,\; q\; \in R$ има бар једно реално решење онда важе неједнакости*

(i) $p^2 - 4q \geq 0$; (ii) $(p+\lambda)^2 - 4(q - \lambda x) \geq 0$ ($\lambda \in R$ *је произвољан*)

2^0 *Ма које реално решење* x *кубне једначине* $x^3 + px + q = 0$ *задовољава неједнакост* $p^2 - 4xq \geq 0$

Решење. Нека a, b, c буду ма који реални бројеви. Начинимо овај импликацијски ланац

$$(*)\ a+b+c=0$$
$$\Rightarrow b = -(a+c)$$
$$\Rightarrow b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac$$
$$\Rightarrow b^2 - 4ac = (a-c)^2 \qquad \text{јер } (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2$$
$$\Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$$

из којег непосредно следи импликација $a+b+c=0 \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$.

1^0 Нека сада једначина $x^2 + px + q = 0$, где p, $q \in R$ има извесно реално решење x. Тада, бројеве a, b, c уводимо овако $a = x^2$, $b = px$, $c = q$. Будући да $a + b + c = 0$ то према доказаном важи $b^2 - 4ac \geq 0$, тј. $(p^2 - 4q)x^2 \geq 0$. Тврдимо да одатле следи $p^2 - 4q \geq 0$. Заиста, уколико $x = 0$ то из $x^2 + px + q = 0$ добијамо $q = 0$, па онда $p^2 - 4q = p^2 \geq 0$, а уколико $x \neq 0$ тада $x^2 > 0$, па из $(p^2 - 4q)x^2 \geq 0$ произлази $p^2 - 4q \geq 0$. Тако смо доказали (i). Ради доказа (ii) довољно је да се једнакост $x^2 + px + q = 0$, најпре напише у облику $x^2 + (p+\lambda)x + (q - \lambda x) = 0$, даље a, b, c уведу са $a = x^2$, $b = (p+\lambda)x$, $c = (q - \lambda x)$ и примени неједнакост $b^2 - 4ac \geq 0$.

2^0 И то се доказује на сличан начин: бројеве a, b, c уведемо са $a = x^3$, $b = px$, $c = q$ и употребимо неједнакост $b^2 - 4ac \geq 0$.

Напомена 15.1. Можда вам наведено решење изгледа помало необично. Додајмо да у основи свега јесте управо идеја преноса (вид. Напомену 14.1). Наиме, у импликацијском ланцу $(*)$ битно је само то да су a, b, c неки бројеви[5], а да ли је неки од њих решење извесне једначине то услед општости неједнакости $b^2 - 4ac \geq 0$ нема никакав значај.

Раз 16. *Нека је* $f(x) = 0$ *једначина по* $x \in R$ *где је* f *задана реална функција. Претпоставимо са су* $a_1, ..., a_n \in R$ *сва њена решења. Написати еквиваленцију попут* (13.1). *А шта би било ако би таквих решења било бесконачно много, рецимо низ:* $a_1, ..., a_n, ...$ *?*

[5] За оне који су у стању да још дубље логички скрозирају ланац $(*)$ поменимо да и од тога својства: "су бројеви" у том ланцу се користи само "парченце"

Решење. Јасно је да попут (13.1) важи оваква еквиваленција

$$(*1) \qquad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a_1 \vee ... \vee x = a_n$$

Међутим ако решења чине бесконачни низ онда бисмо могли да помислимо на одговарајућу бесконачну дисјункцију. Напомињући да се такве дисјункције проучавају у Математичкој логици, излажемо одговор уз коришћење квантора $\exists$ ('постоји'). Може се слободније рећи да је тај квантор својеврстан рођак дисјункцији. Тако, $(*1)$ се може и овако записати

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in \{1, ..., n\})\ x = a_i$$

У складу са тим, у случају бесконачног низа за једначину $f(x) = 0$ имамо ову еквиваленцију

$$(*2) \qquad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in N)\ x = a_i$$

Напомена 16.1 Истичемо да се еквиваленција попут $(*2)$ често појављује и то у још општијем облику као

$$(16.1) \qquad Jed(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \in S)\ x = \phi(p)$$

где је $Jed(x)$ једначина по x -не нужно бројевна- S известан скуп, ϕ извесна функција. Рецимо, један такав пример је

$$sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)\ x = k * \pi$$

Ту такође долази и једначина $x + y = 1$ по x, $y \in R$. Наиме, њена решења су описива једнакостима

$$x = p, \quad y = 1 - p \qquad (p \text{ је ма који реалан број})$$

На први поглед то не припада облику (16.1). Међутим, функцију ϕ -као функцију која од броја као заданог 'лика' прави 'слику', која је онда извесна уређена двојка- уводимо овом једнакошћу

$$\phi(p) = (p, 1-p)$$

Тада, пишући X и $Jed(X)$ уместо двојке (x, y) односно уместо $x + y = 1$ имамо овакву еквиваленцију облика (16.1)

$$Jed(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \in R)\ X = \phi(p)$$

Раз 17. *Решити дату формулу по* $x \in R$ *и решење исказати формулом облика* (16.1)

1^0 $\cos(x) = 0$; 2^0 $\sin(x) = \sin(\frac{1}{2})$; 3^0 $3\sin(x) = 2$; 4^0 $3\sin(x) = -2$

5^0 $3\sin(x) + 4\cos(x) = 2.5$; 6^0 $\sin(x) > \sin(1)$; 7^0 $3\sin(x) + 4\cos(x) > 2.5$

Решење. 1^0 Решења те једначине управо су сви реални бројеви облика $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где

k може бити ма који цео број $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$.. У складу са тим, еквиваленција облика (16.1) гласи

$$cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)\ x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi$$

2^0 Функцију sin привремено означимо са f. Једно од важних питања је онда управо када важи једнакост облика $f(x) = f(y)$, и слично управо када важи неједнакост $f(x) > f(y)$. Одговор је изражен следећим двема еквиваленцијама

(17.1) $\sin(x) = \sin(y) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)x = y + 2k\pi \ \vee \ (\exists k \in Z)x = \pi - y + 2k\pi$

(17.2) $\sin(x) > \sin(y) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)\ y + 2k\pi < x < \pi - y + 2k\pi$

Истичемо да су те еквиваленције (сличне вреде и за остале тригонометријске функције) веома значајне и да их треба добро запамтити рецимо, помоћу одговарајуће слике на тригонометријској кружници, помоћу њиховог графика или већ како вам падне на памет[6]. Оне су веома корисне за решавање разних тригонометријских једначина и неједначина и чак, решавање таквих формула по правилу треба обавити уз њихову помоћ. Тако за дату једначину непосредно добијемо ову еквиваленцију вида (17.1)

(*1) $\sin(x) = \sin(\frac{1}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)x = \frac{1}{2} + 2k\pi \ \vee \ (\exists k \in Z)x = \pi - \frac{1}{2} + 2k\pi$

којом су описана сва решења дате једначине (вид. Напомену 17.1)

3^0 Дату једначину најпре напишимо у облику $sin(x) = \frac{2}{3}$. Даље будући да је број $\frac{2}{3}$ позитиван и мањи од 1 то постоји тачно један реалан број α између 0 и $\frac{\pi}{2}$ такав да важи једнакост $sin(\alpha) = \frac{2}{3}$. Употребом тог угла α, који се иначе назива $arcsin(\frac{2}{3})$ (вид. Напомену 17.2.), дата једначина је записива у облику $sin(x) = sin(\alpha)$ и сва њена решења су одређена еквиваленцијом вида (17.1)

(*2) $\sin(x) = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ (\exists k \in Z)x = \pi - \alpha + 2k\pi$

где $\alpha = arcsin(\frac{2}{3})$

4^0 Ова једначина се може решити слично као претходна и то опет уз помоћ угла α, тј. $arcsin(\frac{2}{3})$. Наиме, будући да $sin(-\alpha) = -sin(\alpha) = -\frac{2}{3}$, то дату једначину можемо овако писати $sin(x) = sin(-\alpha)$ а формула решења попут $(*2)$ гласи

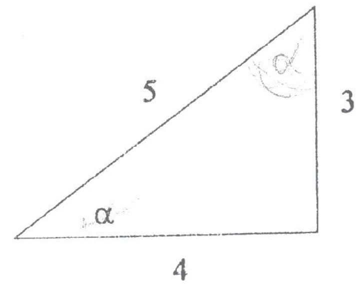
$$sin(x) = -\tfrac{2}{3} \Leftrightarrow (\exists k \in Z)x = -\alpha + 2k\pi \vee (\exists k \in Z)x = \pi + \alpha + 2k\pi$$

где $\alpha = arcsin(\frac{2}{3})$

5^0 Сада помишљамо да и ту једначину запишемо у облику $sin(x) = sin(\alpha)$, за неки α. У ту сврху се сетимо Леме 8.1 и еквиваленције (8.1). Тако, узмимо $a = 3,\ b = 4$ а r одређујемо из једначине $r^2 = a^2 + b^2$, одакле одмах добијамо

[6] Јер свако правило памћења је драгоцено, нема бољих и лошијих

$r = 5$. Да бисмо што мање формула, уопште записа морали да памтимо (па коначно ни ту лему не морамо научити) [7] нацртајмо правоугли троугао са катетама a и b :



Из њега се одмах "види" и угао α. Он је управо $arcsin(\frac{4}{5})$. Према том троуглу[8] имамо једнакости: $4 = 5sin(\alpha),\ 3 = 5cos(\alpha)$ помоћу којих дату једначину можемо овако записати

$5\cos(\alpha) * \sin(x) + 5\sin(\alpha) * \cos(x) = 2.5$ Тј. $\sin(x + \alpha) = \frac{1}{2}$, Тј. $\sin(x + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{6})$.

И сада на основу (17.1) добијамо еквиваленицију

$3\sin(x) + 4\cos(x) = 2.5$

$\Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)x = -\alpha + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ (\exists k \in Z)x = \pi - \frac{\pi}{6} + \alpha + 2k\pi$

6^0 Решава се директном применом еквиваленције (17.2) и добије се

$$sin(x) > sin(1) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)\ 1 + 2k\pi < x < \pi - 1 + 2k\pi$$

7^0 Као у решењу 5^0 најпре израз $3sin(x) + 4cos(x)$ доведимо на облик $5sin(x + \alpha)$, где $\alpha = arcsin(\frac{4}{5})$. На тај начин задана неједначина пређе у ову $sin(x + \alpha) > \frac{1}{2}$, односно ову $sin(x + \alpha) > sin(\frac{\pi}{6})$. Да бисмо нашли решења применимо еквиваленцију облика (17.2) и добијемо

$3\sin(x) + 4\cos(x) > 2.5 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)\ -\alpha + \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + \alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

где $\alpha = arcsin(\frac{4}{5})$

Напомена 17.1. Значајно је да се и еквиваленција $(*1)$, очигледно различита од еквиваленције вида (16.1) може на њу преобратити. Наиме, квантор $\exists$ има ово важно својство

[7] Да се не схватимо погрешно. Није наше гледиште да треба избегавати учење, већ да бисмо се спасли од 'големе шуме тврђења' упутно је да се понекад користимо и разним помоћним сликама, које нам омогућују упечатљивије памћење па чак и схватање

[8] Пазите у ствари користимо еквиваленцију (8.1), али нам је практичније да је "читамо" из тог троугла

$$(\exists x)\phi(x) \ \vee \ (\exists x)\psi(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)(\phi(x) \ \vee \ \psi(x))$$

где су $\phi(x)$, $\psi(x)$ ма које формуле. На основу те опште логичке еквиваленције[9] еквиваленцију $(*1)$ можемо заменити следећом

$$sin(x) = sin(\tfrac{1}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in Z)(x = \tfrac{1}{2} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \tfrac{1}{2} + 2k\pi)$$

Напомена 17.2 (допуна Леме 8.1). У раду са функцијом sin велики значај има тзв. функција $arcsin$ (чита се: аркус синус). То је својеврсна инверзна функција функције sin и уводи се овако

> Дефинише се за реалне бројеве x (укључно) између -1 и 1. За такав реалан број x под $arcsin(x)$ се схвата други број y са овим својствима

(17.3) $\quad sin(y) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$

> Посебно истакнимо да са својством (17.3) постоји тачно један y. Можемо и овако рећи : "Том y је наденуто ново име: $arcsin(x)$"

Поменимо да се и за остале тригонометријске функције на сличан начин уводе одговарајуће $arcus$ функције.

Раз 18. *Дате формуле решити по* $x \in R$

1^0 $(x-1)(x-2) > 0$; 2^0 $(x-1)(x-2) > 0, x = 3$

3^0 $(x-1)(x-3) < 0, (x-2)(x-4) < 0$; 4^0 $x^3+3x-4 > 0, x^2+x-6 = 0$

Решење. 1^0 Имамо овај еквиваленцијски ланац

$(x-1)(x-2) > 0$

$\Leftrightarrow \quad x-1 > 0, \ x-2 > 0 \quad \vee \quad x-1 < 0, \ x-2 < 0$

Користили смо ову еквивалевију о позитивности производа два реална броја

$$ab > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0, \ b > 0) \ \vee \ (a < 0, \ b < 0)$$

$\Leftrightarrow \quad x > 1, \ x > 2 \quad \vee \quad x < 1, \ x < 2$

$\Leftrightarrow \quad x > 2 \quad \vee \quad x < 1 \qquad$ Јер $x > 1, \ x > 2 \quad \Leftrightarrow \ x > 2.$

Уопште важи еквиваленција $p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q,$ уколико важи импликација $q \ \Rightarrow p$ (вид. Напомену 18.1)

На основу тога видимо да сва решења су: бројеви мањи од 1 и уз њих бројеви већи од 2. Скуповним језиком речено: Скуп свих решења је : $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

[9] То је пример тзв. ваљаних формула. За разлику од таутологија таквим формулама, каже се и логичким законима, углавном се изражавају разна својства квантора $\exists$ и $\forall$. Иначе таутологије и ваљане формуле се посебно проучавају у Математичкој логици

2^0 Будући да имамо неједначину и једначину прво помишљамо да користимо закон замене за једнакост (13.2). Тако имамо:

$(x-1)(x-2) > 0, x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3, (3-1)(3-2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

па 3 је јединствено решење.

3^0 Лако се виде еквиваленције

$(x-1)(x-3) < 0 \ \Leftrightarrow \ 1 < x, \ x < 3, \quad (x-2)(x-4) < 0 \ \Leftrightarrow \ 2 < x, \ x < 4$

па се задатак своди на тражење решења ове конјункције

$$1 < x, \ x < 3, \ 2 < x, \ x < 4$$

која је еквивалентна са $2 < x, \ x < 3$ јер: $1 < x, \ 2 < x \quad \Leftrightarrow \quad 2 < x$ и $x < 3, \ x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$

Решења су управо бројеви између 2 и 3, тј. из интервала (2.3).

4^0 Опет имамо на уму закон замене за једнакост (13.2). Наиме, уочимо еквиваленцијски ланац:

$x^3 + 3x - 4 > 0, \ x^2 + x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^3 + 3x - 4 > 0, x = 2 \ \vee \ x = -3$

$\Leftrightarrow \quad x^3 + 3x - 4 > 0, x = 2 \ \vee \ x^3 + 3x - 4 > 0, \ x = -3$

Користили смо таутологију $p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ и то слева надесно. Друкчије кажемо: обавили смо "логичко множење" (вид. Напомену 18.1)

$\Leftrightarrow \quad 2^3 + 3*2 - 4 > 0, x = 2 \ \vee \ (-3)^3 + 3*(-3) - 4 > 0, \ x = -3$

Двапут коришћен закон замене за једнакост

$\Leftrightarrow \quad \top, \ x = 2 \quad \vee \quad \bot, \ x = -3$

Јер неједнакост $2^3 + 3*2 - 4 > 0$ је тачна, тј. еквивалентна са $\top$, док неједнакост $(-3)^3 + 3*(-3) - 4 > 0$ је нетачна, односно еквивалентна са $\bot$. Имамо дисјункцију од два члана, рећи ћемо и две "или-гране". Прва је еквивалентна са $x = 2$, а друга са $\bot$ па је 'уклањамо'. Наиме, уопште ако имамо дисјункцију облика $p \vee q$ и ако знамо да је q нетачно, онда ту дисјункцију смемо заменити њеним првим чланом, "граном", односно са p

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

па је 2 јединствено решење.

Напомена 18.1 У много случајева у математици нам се уопштсјавља рад са извесном -каже се- исказном формулом, која кратко речено је грађена од неких основних саставака (тзв. исказних слова) употребом ознака основних логичких везника $\wedge$, $\vee, \neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Међу исказним формулама од највећег значаја су таутологије. То су формуле које имају вредност[10] Т за све могуће вредности њених исказних слова. Има веома много корисних таутологија. Овом приликом наводимо следеће

1^0 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow p)$

Примери коришћења: $x < 1$, $x < 2$ је еквивалентно са $x < 1$, јер $x < 1$ повлачи $x < 2$; $y = x^2$ је еквиваленто са $y = x^2, y \geq 0$, јер из услова $y = x^2$ произлази ненегативност од y, тј. $y \geq 0$. У та два примера, x, y су ма који реални бројеви

2^0 Таутологије којима се исказује "логичко множење". Ту су на пример, ове:

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

p, q, r могу бити слова, или шире ма које исказне формуле

и разне друге сличне. Иначе, рекавши "множење" значи да у мислима $\vee$ везујемо за $+$, док $\wedge$ са $*$. На такав начин "логичко множење" нас подсећа на множење збирова обичних бројевних израза. А зашто је значајно "логичко множење" ? Па, многи проблеми се своде на проблем кад је нека исказна формула тачна, и тада подесно је да се она "логичким множењем" преведе на неку дисјункцију $A \vee B \vee \ldots \vee C$, тзв. дисјунктивни облик (вид. за детаље и Напомену 18.2), јер тада полазна формула је тачна управо у случајевима кад је тачно A, кад је тачно B, итд. кад је тачно C. Ево једног примера за илустрацију

Означимо са $\phi(x, y, z)$ ову формулу $xy = 0 \wedge yz = 0 \wedge zx = 0$, где су x, y, z реални бројеви. За које њихове вредности је тачна та формула? Уочимо овај еквиваленцијски ланац:

$\phi(x, y, z)$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0) \wedge (y = 0 \vee z = 0) \wedge (z = 0 \vee x = 0)$

Користили смо еквиваленцију облика: $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, где $a, b \in R$. Сада нас очекује двапут "логичко множење"

$$\Leftrightarrow ((x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge z = 0) \vee (y = 0 \wedge y = 0) \vee (y = 0 \wedge z = 0)) \wedge (z = 0 \vee x = 0)$$

"Помножили" смо $x = 0 \vee y = 0$ са $y = 0 \vee z = 0$. Добијени "производ" помножићемо са $z = 0 \vee x = 0$. Пре тога део

[10] Претпостављамо познавање истиносних таблица

$y = 0 \wedge y = 0$ замењујемо са $y = 0$. То је у складу са таутологијом $p \Leftrightarrow p \wedge p$. Слично чинимо и са $x = 0 \wedge x = 0$, односно $z = 0 \wedge z = 0$ које се појављују током "множења". Након краћег сређивања добијемо

$\Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0) \vee (y = 0 \wedge z = 0) \vee (z = 0 \wedge x = 0))$

Одатле непосредно "читамо" све тражене вредности за x, y, z : прво, x и y су 0 а z је онда произвољно, друго y и z су 0 а x је произвољно и најзад z и x су 0 а y је произвољно

Напомена 18.2* **(допуна претходне).** Прећутали смо шта се ради са везницима $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ уколико учествују у формули. Прво, имајући на уму таутологију $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ можемо уклонити везник $\Leftrightarrow$ и уместо њега ће се јавити двапут везник $\Rightarrow$. Друго, везник $\Rightarrow$ можемо уклонити употребом ове таутологије: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$. Треће, ако се деси да знак $\neg$ стоји пред неком конјункцијом $p \wedge q \wedge \ldots \wedge r$,онда део $\neg(p \wedge q \wedge \ldots \wedge r)$ замењујемо са $\neg p \vee \neg q \vee \ldots \vee \neg r$. У ствари, ту се користи једна од тзв. De Morgan-ових таутологија, односно таутологија $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$. Слично, ако знак $\neg$ стоји пред неком дисјункцијом $p \vee q \vee \ldots \vee r$,онда део $\neg(p \vee q \vee \ldots \vee r)$ замењујемо са $\neg p \wedge \neg q \wedge \ldots \wedge \neg r$. Ту се користи друга De Morgan-ова таутологија, односно таутологија $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$. Коначно ако се деси да имамо подформулу облика $\neg\neg \ldots \neg A$ у којој се "гомилају" знакови $\neg$ онда применом таутологије $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ може број тих знакова свести на 1 или на 0. Након тога да бисмо стигли до дисјунктивног облика довољно је да довољан број пута користимо "логичко множење". Иначе у дисјунктивном облику $A \vee B \vee \ldots \vee C$ за $A, B, \ldots, C$ се допушта да буду конјункције по неколико саставака, а сваки од тих саставака је или исказно слово или негација неког таквог слова.

Да бисмо показали како се описане идеје могу користити уочавамо следећу формулу ϕ : $\neg(((p \vee q) \Rightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow r))$ и доводимо је на један дисјунктиван облик, правећи овај еквиваленцијски ланац

$\phi \Leftrightarrow \neg(((p \vee q) \Rightarrow r) \vee ((q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)))$

Прво смо уклонили $\Leftrightarrow$. А сада на три места уклањамо $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \neg((\neg(p \vee q) \vee r) \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)))$

Сада нам је намера да где год то треба знак негације "гурамо" до једног од p, q, r. То треба да учинимо са тим знаком у делу $\neg(p \vee q)$ и са оним стојећим на самом почетку

$\Leftrightarrow\ \neg(((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)))$
Сада почетни знак $\neg$ "гурамо". То има неколико малих корака. Стиже се до

$\Leftrightarrow\ ((p \vee q) \wedge \neg r) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q))$
А сада ћемо из психолошких разлога свуда знак $\vee$ привремено заменити са $+$, а знак $\wedge$ са $*$. У ствари, онда ћемо лакше обавити "множење"

$\Leftrightarrow\ ((p+q) * \neg r) * ((q * \neg r) + (r * \neg q))$

$\Leftrightarrow\ (p * \neg r + q * \neg r) * (q * \neg r + r * \neg q)$
Неке заграде смо изоставили. Сада нас чека "множење". Лако се добије

$\Leftrightarrow\ p * \neg r * q * \neg r + p * \neg r * r * \neg q + q * \neg r * q * \neg r + q * \neg r * r * \neg q$
Део $\neg r * r$, тј. $\neg r \wedge r$ је заменљив са $\perp$ па се стога други и четврти "сабирак" смеју уклонити. Такође, $\neg r * \neg r$ смемо заменити са $\neg r$ и слично $q * q$ са q. Тако добијамо

$\Leftrightarrow\ p * \neg r * q + q * \neg r$
У ствари смо стигли до дисјунктивног облика, још само треба да се вратимо старим ознакама. Тако добијамо
$\Leftrightarrow\ (p \wedge \neg r \wedge q)\ \vee\ (q \wedge \neg r)$

Приметимо да се последња формула сме заменити својом другом "граном"[11] $q \wedge \neg r$. Сходно томе видимо да формула ϕ има вредност $\top$ управо уколико : q има вредност $\top$, r има вредност $\perp$, док p може имати ма коју вредност $\top$ или $\perp$.

Раз 19. *Решити по* $x \in R$ *дате формуле*

1^0 $x=2, x^5-32=0$; 2^0 $(x-1)(x-5)(x-7)<0, (x-2)(x-4)(x-6)>0$; 3^0 $x=2, x^5-32=0, x^2>5$; 4^0 $x^2-5x+6=0, x^3-5x+1>0$;

Раз 20. *Решити по* $x \in R$ *дате формуле*

1^0 $|x|=2$; 2^0 $|x|=x$; 3^0 $x+|x-|1-x||=2$; 4^0 $|x-2|+|x-3|=1$;

Решење. 1^0 Као што знамо, $|x|$ се уводи као x уколико $x \geq 0$, односно као $-x$ иначе. Да бисмо приликом решавања једначине то искористили уз њу ћемо прикључити тачну дисјункцију: $x \geq 0\ \vee\ x<0$. Подробније речено имамо овај еквиваленцијски ланац:

$|x|=2 \quad \Leftrightarrow \quad |x|=2,\ (x \geq 0 \vee x<0)$

[11] Користимо таутологију вида $(A \wedge B) \vee B \quad \Leftrightarrow \quad B$

$\Leftrightarrow\ |x|=2, x \geq 0 \quad \vee \quad |x|=2, x<0$
Обављено "логичко множење" (вид. Напомену 18.1)

$\Leftrightarrow\ x=2, x \geq 0 \quad \vee \quad -x=2, x<0$

$\Leftrightarrow\ x=2, 2 \geq 0 \quad \vee \quad x=-2, -2<0$
Примењен двапут закон замене за једнакост (13.2).

$\Leftrightarrow\ x=2, \top \quad \vee \quad x=-2, \top$

$\Leftrightarrow\ x=2 \quad \vee \quad x=-2$

Значи сва решења су 2 и -2.

2^0 Слично претходном имамо овај еквиваленцијски ланац

$|x|=x \quad \Leftrightarrow \quad |x|=x,\ (x \geq 0 \quad \vee \quad x<0)$

$\Leftrightarrow\ |x|=x, x \geq 0 \quad \vee \quad |x|=x, x<0$

$\Leftrightarrow\ x=x, x \geq 0 \quad \vee \quad -x=x, x<0$
Коришћена дефиниција за $|x|$

$\Leftrightarrow\ \top, x \geq 0 \quad \vee \quad x=0, x<0$

$\Leftrightarrow\ x \geq 0 \quad \vee \quad x=0, 0<0$
Закон замене једнакости

$\Leftrightarrow\ x \geq 0$

па решења су управо сви ненегативни реални бројеви.

3^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи:

$x+|x-|1-x||=2$
$\Leftrightarrow\ x+|x-|1-x||=2,\ (1-x \geq 0 \quad \vee \quad 1-x<0)$
Намера нам је да се прво ослободимо унутрашњег знака $|\,|$ па смо прикључили одговарајућу тачну дисјункцију

$\Leftrightarrow\ x+|x-|1-x||=2,\ 1-x \geq 0 \quad \vee \quad x+|x-|1-x||=2,\ 1-x<0$
Обавили смо "логичко множење" (вид. Напомену 18.1)

$\Leftrightarrow\ x+|x-1+x|=2,\ 1-x \geq 0 \quad \vee \quad x+|x+1-x|=2,\ 1-x<0$
Користили смо дефиницију за $|\,|$

$\Leftrightarrow\ x+|2x-1|=2,\ 1-x \geq 0 \quad \vee \quad x+1=2,\ 1-x<0$
Примећујемо да друга $\vee$-"грана" отпада јер несагласни су услови $x+1=2$ и $1-x<0$

$\Leftrightarrow\ x+|2x-1|=2,\ 1-x \geq 0$

Сада нам је намера да се ослободимо преосталог знака $|\ |$. Опет ћемо додати одговарајућу тачну дисјункцију и после обавити "логичко множење"

$$\Leftrightarrow\ x+|2x-1|=2,(2x-1\geq 0\ \ \vee\ \ 2x-1<0),\ 1-x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ x+|2x-1|=2,2x-1\geq 0,\ 1-x\geq 0$$
$$\vee\ x+|2x-1|=2,2x-1<0,\ 1-x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ x+2x-1=2,2x-1\geq 0,\ 1-x\geq 0$$
$$\vee\ x-2x+1=2,2x-1<0,\ 1-x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ x=1,2x-1\geq 0,\ 1-x\geq 0$$
$$\vee\ x=-1,2x-1<0,\ 1-x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ x=1,1\geq 0,\ 0\geq 0$$
$$\vee\ x=-1,-3<0,\ 2\geq 0$$

Двапут примењен закон замене за једнакост (13.2)

$$\Leftrightarrow\ x=1\ \ \vee\ \ x=-1$$

па значи 1 и -1 су тражена решења.

4^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи:

$$|x-2|+|x-3|=1$$
$$\Leftrightarrow\ |x-2|+|x-3|=1,\ (x-2\geq 0\vee x-2<0),(x-3\geq 0\vee x-3<0)$$

Додали смо две одговарајуће тачне дисјункције да бисмо могли да се ослободимо оба знака $|\ |$

$$\Leftrightarrow\ |x-2|+|x-3|=1,\ x-2\geq 0,\ x-3\geq 0$$
$$\vee\ |x-2|+|x-3|=1,\ x-2\geq 0\ \ x-3<0$$
$$\vee\ |x-2|+|x-3|=1,\ x-2<0,\ x-3\geq 0$$
$$\vee\ |x-2|+|x-3|=1,\ x-2<0,\ x-3<0$$

Обавили смо "логичко множење"

$$\Leftrightarrow\ (x-2)+(x-3)=1,\ x-2\geq 0,\ x-3\geq 0$$
$$\vee\ (x-2)+(3-x)=1,\ x-2\geq 0\ \ x-3<0$$
$$\vee\ (2-x)+(x-3)=1,\ x-2<0,\ x-3\geq 0$$
$$\vee\ (2-x)+(3-x)=1,\ x-2<0,\ x-3<0$$

Користили смо дефиницију за $|\ |$

$$\Leftrightarrow\ x=3,\ x-2\geq 0,\ x-3\geq 0$$
$$\vee\ 1=1,\ x-2\geq 0\ \ x-3<0$$
$$\vee\ -1=1,\ x-2<0,\ x-3\geq 0$$
$$\vee\ x=2\ x-2<0,\ x-3<0$$

Трећа $\vee$-"грана отпада. На прву и последњу примењујемо закон замене за једнакост (13.2)

$$\Leftrightarrow\ x=3,\ 3-2\geq 0,\ 3-3\geq 0$$
$$\vee\ \top,\ x-2\geq 0\ \ x-3<0$$
$$\vee\ x=2,\ 2-2<0,\ 2-3<0$$

Отпада трећа грана

$$\Leftrightarrow\ x=3\ \ \vee\ \ x-2\geq 0,\ x-3<0$$

Та се дисјункција може "скупити"

$$\Leftrightarrow\ x-2\geq 0,\ x-3\leq 0$$

Значи тражена решења су сви чланови одсечка $[2,3]$ реалних бројева.

Раз 21. *Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на овај начин*

$$\psi(x)=\begin{cases} x, & x>2\\ 2, & 1<x\leq 2\\ 2x, & x\leq 1\end{cases}$$

Решити следеће формуле по $x\in R$

$1^0\ \ \psi(x)<x,\qquad 2^0\ \ \psi(x)+\psi(1-x)+\psi(\psi(x))=2$

Пред-решење : Очигледно је овај пример направљен уз помоћ идеје преноса (вид. Напомену 14.1).

Решење. 1^0 Да бисмо се ослободили ψ, у складу са њеном дефиницијом, уз полазну формулу ћемо "придружити" дисјункцију $x\leq 1\ \vee\ 1<x\leq 2\ \vee x>2$, тачну за сваки $x\in R$. Сходно томе имамо овај еквиваленцијски ланац

$$\psi(x)<x\ \ \Leftrightarrow\ \ \psi(x)<x,\ (x\leq 1\ \vee\ 1<x\leq 2\ \vee x>2)$$
$$\Leftrightarrow\ \psi(x)<x,\ x\leq 1\ \ \vee\ \ \psi(x)<x,\ 1<x\leq 2\ \ \vee\ \ \psi(x)<x,\ x>2$$
$$\Leftrightarrow\ 2x<x,\ x\leq 1\ \ \vee\ \ 2<x,\ 1<x\leq 2\ \ \vee\ \ x<x,\ x>2$$

Трећа "грана" отпада јер услов $x<x$ је немогућ

$$\Leftrightarrow\ x<0,\ x\leq 1\ \ \vee\ \ 2<x,\ 1<x\leq 2$$

Прва грана се своди на $x<0$, а друга је конјункција $2<x, 1<x, x\leq 2$ и своди се на немогућу конјункцију $2<x,\ x\leq 2$

$$\Leftrightarrow\ x<0$$

Значи, скуп свих решења је скуп свих негативних реалних бројева.

2^0 се решава на сличан, мало дужи, начин па решавање препуштамо читаоцу.

Раз 22. *Решити по $x,y,\ldots\in R$ дате системе*[12] *линеарних једначина*

$1^0\ \ x+y=5,\ x-y=3;\qquad 2^0\ \ 3x+2y=5,\ 4x-3y=1,\ 5x-y=4;$

[12] Истакнимо да се уместо речи 'систем' може употребити и реч: 'конјункција'

3^0 $3x+y=5,\ 4x-y=1,\ 3x-2y=4;$ 4^0 $x-y=2,\ 3x-3y=6;$

5^0 $x+y+z=6,\ 2x+y-z=1,\ y+2z=8;$

6^0 $x-y-2z+u+3v=15,\ x+y-2z-u+v=5,$
$3x-2y-6z+2u-v=4,\ x-4y-2z+4u+v=10$

Пред-решење. Изложићемо један општи поступак,тзв. *Gauss*–ов[13], којим се може решити систем линеарних једначина са произвољним бројем непознатих и једначина. У том поступку основну улогу имају следеће опште еквиваленције о реалним бројевима[14]

$$(22.1)\ (i)\quad A=0 \ \Leftrightarrow\ kA=0 \quad (\text{Уколико } k\neq 0)$$

$$(ii)\quad A=0,\quad B=0 \ \Leftrightarrow\ A=0,\quad B+\lambda A=0$$

где су $A, B, k,\ \lambda$ ма који реални бројеви. Приметите да се у првој тражи $k\neq 0$, док у другој за λ се ништа не претпоставља. Та друга еквиваленција се може доказати овако:

Ако $A=0, B=0$, онда за ма који $\lambda\in R$ важи $A+\lambda B = 0+\lambda 0=0$, па је доказан $\Rightarrow$ – део те еквиваленције. Слично, уколико важе једнакости $A=0,\ B+\lambda A=0$, тада из друге заменом A са 0 настаје ова једнакост[15] $B+\lambda 0=0$, тј. $B=0$, па је доказан и њен други део

Решење. 1^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи

$x+y=5,\ x-y=3$

$\Leftrightarrow\quad x+y=5,\ (x-y)+1*(x+y)=3+1*5$

Прву једначину смо схватили као $A=0$, а другу као $B=0$. Значи, A, B су редом $x+y-5,\ x-y-3$. За λ смо узели 1, њиме смо помножили прву **-пазите та која се множи се и преписује**- и додали другој. И тако требало је да нов систем напишемо у овом облику $(x-y-3)+1*(x+y-5)=0$ који је очигледно еквивалентан са $(x-y)+1*(x+y)=3+1*5$. Види се да смо тај међу-корак "прескочили". Може се дати и овакво објашњење. Еквиваленција (ii) се може и не-битно проширити тако да постане

$$A=D_1,\ B=D_2\ \Leftrightarrow\ B+\lambda A=D_2+\lambda D_1,$$

и онда применом те нове еквиваленције у једном кораку настаје систем $x+y=5,\ (x-y)+1*(x+y)=3+1*5$. Међутим, упркос околности

[13] *K.F.Gauss* (1777-1855) велики немачки математичар
[14] Истакнимо да исте еквиваленције важе и за комплексне бројеве
[15] У ствари смо користили закон замене за једнакост (13.2)

да у наставку претежно користимо ту нову еквиваленцију, из техничких разлога ћемо се позивати на (ii).

$\Leftrightarrow\quad x+y=5,\ 2x=8$

Другу једначину смо средили и добили једначину $2x=8$. Сада ћемо користити еквиваленцију (i) -опет уз мало не-битно одступање- и помножити обе стране друге једначине са $\frac{1}{2}$, тј. по x решити ту једначину

$\Leftrightarrow\quad x+y=5,\ x=4$

Сада смо већ нашли једну непознату, односно x. И даље настављамо "гаусовски", тј. користимо еквиваленције (i), (ii). Тако, у идућем кораку другу једначину ћемо помножити са -1 и производ додати првој. Може се рећи да на такав начин "Гаусовски" x из друге једначине замењујемо у прву. Поново истичемо да се преписује **множена** једначина, тј. овде друга. Тако добијамо

$\Leftrightarrow\quad y=1,\ x=4$

Закључак: дати систем има јединствено решење уређену двојку[16] $(4,1)$, у којој прва компонента је вредност за x, а друга за y

2^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи

$3x+2y=5,\ 4x-3y=1,\ 5x-y=4$

Сада ћемо редом двапут употребити еквиваленцију (ii) са намером да прву једначину сачувамо а да из осталих избацимо x. Ради тога у првом кораку прву једначину множимо са $\frac{-4}{3}$ и производ додајемо другој. У другом кораку прву једначину множимо са $\frac{-5}{3}$ и производ додајемо трећој. У ствари, здружено обавимо оба корака, и тако добијемо

$\Leftrightarrow\quad 3x+2y=5,\ (\frac{-4}{3}*2-3)y=\frac{-4}{3}*5+1,\ (\frac{-5}{3}*2-1)y=\frac{-5}{3}*5+4$

$\Leftrightarrow\quad 3x+2y=5,\ y=1,\ y=1$

Као што видите у новој другој и трећој једначини нема члана са x. Даље, слободније речено, једно време (до краја "првог полувремена"- што ћемо ускоро објаснити) преписујемо прву, и пажњу обраћамо на подсистем који чине преостале једначине, односно овде друга и трећа. Тако, другу множимо са -1 и производ додајемо трећој. Тако добијамо

$\Leftrightarrow\quad 3x+2y=5,\ y=1,\ 0=0$

Нов подсистем је $0=0$ и не садржи ниједну непознату и ту је крај "првог

[16] Обично у случају две и више непознатих решење се уводи као уређена двојка, тројка и сл.

полувремена". Једначина $0=0$ је еквивалентна са $\top$ па је уклањамо. Истакнимо још, да смо којим случајем уместо ње добили рецимо једначину $0=1$, еквивалентну са $\perp$, $Gauss$—ов алгоритам би се завршио закључком да је полазни систем немогућ.

$\Leftrightarrow\ \ 3x+2y=5,\ y=1$

Слободније речено до сада у првом полувремену смо ишли "одозго надоле". А у другом идемо супротно "одоздо нагоре". То овде просто значи да ћемо сада преписати нову другу једначину, помножити је са -2 (јер желимо да y избацимо из "горњих", тј. овде из прве) и производ додати првој. Тако добијамо

$\Leftrightarrow\ \ 3x=3,\ y=1$

$\Leftrightarrow\ \ x=1,\ y=1$

И тако двојка $(1,1)$ је јединствено решење полазног система. Приметимо да смо у "првом полувремену" можемо рећи имали овај редослед делања: прво x, а потом y са смислом: једну једначину која садржи x смо преписали, а онда из преосталих избацили x. Даље смо у насталом подсистему преписали једну једначину садржећу y и потом избацили y из преосталих. Наравно, могли смо се држати и друкчијег редоследа: прво y, а потом x. Рецимо, да смо тако чинили и притом као основну, "преписујућу" једначину узели трећу избегли бисмо појаву разломака.

3^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи

$3x+y=5,\ 4x-y=1,\ 3x-2y=4$

Бирамо овај редослед y, па x, и уз то намеравамо да препишемо прву. Множимо је са 1 и производ додајемо другој. Такође је множимо са 2 и производ додајемо трећој. Тако добијамо

$\Leftrightarrow\ \ 3x+y=5,\ 7x=6,\ 9x=14$

Сада у подсистему $7x=6$, $9x=14$ задржавамо другу а из осталих (овде је то само трећа) избацујемо x. У ту сврху другу множимо са $\frac{-9}{7}$ и производ додајемо трећој. Тако добијамо

$\Leftrightarrow\ \ 3x+y=5,\ 7x=6,\ 0=\frac{-9}{7}*6+14$

односно

$\Leftrightarrow\ \ 3x+y=5,\ 7x=6,\ 0=44$

Стигли смо до подсистема без непознатих- ту је крај "првог полувремена". Али, тај систем, тј. $0=44$ је немогућ, па зато "нема другог полувремена",

односно $Gauss$—ов алгоритам се завршава закључком да је полазни систем немогућ

4^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи

$x-y=2,\ 3x-3y=6$

Преписаћемо прву, помножити је са -3 и тај производ додати другој. Намера нам је да из друге уклонимо x

$\Leftrightarrow\ \ x-y=2,\ 0=0$

Као што видите желели смо да уклонимо x, а оно испаде да се и y уклања. Наравно, тако нешто није необично и може уопште да се деси при коришћењу $Gauss$—овог поступка. Преостали подсистем има само једначину $0=0$ без непознатих па је прво полувреме завршено. Уклањамо једначину $0=0$, али пошто нам је преостала само једна једначина "у другом полувремену" немамо што чинити

$\Leftrightarrow\ \ x-y=2$

Полазни систем се свео на једну једначину са две непознате па ћемо му решења одређивати овако. Једну непознату ћемо бирати по вољи, а онда другу рачунати из саме једначине. Рецимо, нека та 'по вољи непозната', каже се и **слободна**, буде y. Тада, сва решења су одређена овим једнакостима

$y=p,\quad x=2+p$ (где p је ма који реалан број)

Наравно, поред тих образаца постоје и ови у којима је x слободно

$x=p,\quad y=2-p$ (p је ма који реалан број)

5^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи

$x+y+z=6,\ 2x+y-z=1,\ y+2z=8$

Прву једначину ћемо преписати, помножити са -2 и производ додати другој. Тако ћемо из ње уклонити x. Трећа не садржи x па остаје непромењена

$\Leftrightarrow\ \ x+y+z=6,\ -y-3z=-11,\ y+2z=8$

Сада ћемо другу множити са 1 и производ додати трећој

$\Leftrightarrow\ \ x+y+z=6,\ -y-3z=-11,\ -z=-3$

$\Leftrightarrow\ \ x+y+z=6,\ -y-3z=-11,\ z=3$

Немамо више никакав подсистем, па је прво полувреме завршено. Сада идемо "одоздо нагоре", у смислу да ћемо најпре користећи трећу једначину која дефинише z из прве две избацити z. У ту сврху трећу једначину преписујемо, множимо са 3 и производ додајемо другој. Такође трећу једначину множимо са -1 и производ додајемо првој. Тако добијамо

$$\Leftrightarrow \quad x+y=3,\ -y=-2,\ z=3$$

$$\Leftrightarrow \quad x+y=3,\ y=2,\ z=3$$

Сада ћемо помоћу друге, која дефинише y, из прве избацити y. У ту сврху другу множимо са -1 и производ додајемо првој. Тако имамо

$$\Leftrightarrow \quad x=1,\ y=2,\ z=3$$

Решавање је завршено. Тројка $(1,2,3)$ је јединствено решење.

6^0 Овај пример излажемо тако да се 'осети' и општи случај решавања система линеарних једначина. Један решавајући ланац гласи

$$x-y-2z+u+3v=15,\ x+y-2z-u+v=5,$$
$$3x-2y-6z+2u-v=4,\ x-4y-2z+4u+v=10$$

Сада ћемо, у намери да помоћу прве једначине из свих преосталих избацимо x, учинити следеће : прву једначину преписати, помножити је са -1, производ додати другој, помножити је са -3, производ додати трећој и најзад помножити је са -1 и производ додати четвртој. Тако добијамо

$$\Leftrightarrow \quad x-y-2z+u+3v=15,\ 2y-2u-2v=-10,$$
$$y-u-10v=-41,\ -3y+3u-2v=-5$$

Избацивањем x настао је подсистем

$(*1)$ $2y-2u-2v=-10,\ y-u-10v=-41,\ -3y+3u-2v=-5$

у коме се такође не налази ни z; тј. и оно је избачено - тако се десило. У складу са тим, прву једначину ћемо писати тако да јој на почетку уз x буде и члан са z, тј. да она почиње са $x-2z$.

$$\Leftrightarrow \quad x-2z-y+u+3v=15,\ 2y-2u-2v=-10,\ y-u-10v=-41,$$
$$-3y+3u-2v=-5$$

Сада можемо овако рећи. *Полазни систем по непознатим* $x,\ z,\ y,\ u,\ v$ *је решен* **до на** *систем* $(*1)$ *по мањем броју непознатих* $y,\ u,\ v$ у смислу:

Ако знамо решења система $(*1)$ по непознатим $y,\ u,\ v$ онда уврштавањем њихових вредности у прву једначину она би добила облик

$(*2)$ $\qquad x-2z=const$

где је $const$ вредност израза $y-u-3v+15$ и тада бисмо лако могли наћи све одговарајуће вредности за x и z : просто једну од тих непознатих

бисмо изабрали по вољи а другу нашли помоћу $(*2)$. Допунски, ако би се десило да је систем $(*1)$ немогућ онда, јасно је да је и полазни систем такав.

У добијеном подсистему $(*1)$ сада ћемо преписати његову другу једначину $y-u-10v=-41$, помножити је са -2, производ додати његовој првој, помножити је са 3, производ додати његовој трећој. Тако добијамо

$$\Leftrightarrow \quad x-2z-y+u+3v=15,\ y-u-10v=-41,\ 18v=72,\ -32v=-128$$

Избацисмо y а оно се "само од себе" избаци и u. Сада смо у ствари решили систем $(*1)$ до на овај по v подсистем

$(*3)$ $\qquad 18v=72,\ -32v=-128$

$$\Leftrightarrow \quad x-2z-y+u+3v=15,\ y-u-10v=-41,\ v=4,\ v=4$$

Мало смо упростили подсистем $(*3)$. Сада ћемо његову прву једначину помножити са -1 и производ додати његовој другој једначини. Тако добијамо систем

$$\Leftrightarrow \quad x-2z-y+u+3v=15,\ y-u-10v=-41,\ v=4,\ 0=0$$

Стигли смо до подсистема

$(*4)$ $\qquad 0=0$

па је сада систем $(*3)$ решен до на систем $(*4)$. Међутим, то је систем без стварног учешћа непознатих. Он је могућ па га бришемо, и завршавамо прво полувреме.[17]

$$\Leftrightarrow \quad x-2z-y+u+3v=15,\ y-u-10v=-41,\ v=4$$

У другом полувремену ћемо практично остварити значење речи "решен до на", односно идемо "одоздо нагоре" и на *Gauss*−овски начин рачунамо поједине непознате. Тако, у ту сврху у првој и другој једначини уместо v ћемо заменити 4. Али, то ћемо обавити овако: трећу једначину множимо са 10 и производ додајемо другој, а потом исту једначину множимо са -3 и производ додајемо првој. Тако долазимо до система

$$\Leftrightarrow \quad x-2z-y+u=3,\ y-u=-1,\ v=4$$

Сада из друге једначине треба да нађемо y и u. Јасно је да једну од тих непознатих смемо бирати по вољи. Нека та 'слободна' буде u. Могућност њеног бирања ћемо одложити, односно само наговестити пишући трећу

[17] Иначе, да смо имали неки немогућ систем попут $0=1$ *Gauss*−ов алгоритам би се завршио закључком да полазни систем нема решења.

једначину у облику $y = u-1$. Кад би умела да прича та би једначина рекла: "Помоћу мене непозната y је изражена као функција слободне непознате u ". Тако добијамо систем

$$\Leftrightarrow \quad x - 2z - y + u = 3,\ y = u - 1,\ v = 4$$

Сада ћемо y из друге заменити у прву једначину. У ту сврху другу множимо са 1 и производ додајемо првој

$$\Leftrightarrow \quad x - 2z = 2,\ y = u - 1,\ v = 4$$

Сада из прве једначине треба да нађемо x и z. Јасно је да једну од тих непознатих смемо бирати по вољи. Нека та 'слободна' буде z. Могућност њеног бирања ћемо одложити, односно само наговестити пишући прву једначину у облику $x = 2z + 2$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2z + 2,\ y = u - 1,\ v = 4$$

У ствари, сада је полазни систем решен и, у складу са последњим чланом ланца, обрасци свих решења гласе

$$(22.2)\quad v = 4,\ u = p,\ z = q,\quad x = 2q + 2,\ y = p - 1$$

где p, q могу бити ма који реални бројеви.

Приметимо да се (22.2) може записати и у виду еквиваленције (16.1), односно

$$(22.3)\quad x - y - 2z + u + 3v = 15,\ x + y - 2z - u + v = 5,$$
$$3x - 2y - 6z + 2u - v = 4,\ x - 4y - 2z + 4u + v = 10$$
$$\Leftrightarrow \quad (\exists p, q \in R)(v = 4, u = p, z = q, x = 2q + 2,\ y = p - 1)$$

У наведеним обрасцима (22.2) непознате u и z су слободне. Међутим одбир слободних непознатих у општем случају није јединствен. Тако, овде од x и z, свеједно која, може се узети за слободну, и слично важи и за u и y. Тако, узимајући разне такве могућности све у свему се добију се 4 обрасца вида (22.2) , и наравно сваки од њих описује сва решења полазног система.

Напомена 22.1. Укратко описујемо $Gauss-$ов поступак у општем случају. Најпре један технички појам. Нека је $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k = 0$ извесна линеарна једначина по $x_1, \ldots, x_k \in R$ и $a_1, \ldots, a_n$ су неки задани реални бројеви. Тада, уколико $a_i \neq 0$ кажемо да непозната x_i **стварно учествује** у тој једначини. Рецимо, x стварно учествује у једначини $2x - z + u = 0$, док y стварно не учествује у њој.

Даље, нека је задан систем $Sis(x_1, \ldots, x_k)$ извесних линеарних једначина по непознатим $x_1,\ x_2,\ \ldots x_k \in R$. Означимо са $Stv(Sis)$ број свих његових непознатих стварно учествујућих (у макар једној од његових једначина).

Уколико важи једнакост $Stv(Sis) = 0$, тада систем ни у једној својој једначини стварно не садржи ниједну непознату, па следствено независно од вредности његових непознатих систем је еквивалентан или са $\top$ или са $\perp$. У првом случају све су му непознате слободне, тј. до решења система се долази давањем произвољних вредности његовим непознатим, а у другом случају систем је немогућ. Рецимо, првом случају припада систем $0 * x + 0 * y = 0, 0 * x + 0 * y = 0$, а другом систем $0 * x + 0 * y = 0, 0 * x + 0 * y = 1$ -оба су по $x,\ y \in R$.

Сада претпоставимо да $Stv(Sis) \neq 0$. Уочимо једну од његових стварно учествујућих непознатих x_i и једначину $b_1x_1 + \ldots + b_ix_i + \ldots + b_kx_k = 0$ у којој она стварно учествује, тј. $b_i \neq 0$. Да бисмо лакше замишљали ставимо ту једначину на прво место (испред осталих једначина). Нека је даље $c_1x_1 + \ldots + c_ix_i + \ldots + c_kx_k = 0$ прва од осталих једначина. Множењем прве једначине са $-\frac{c_i}{b_i}$ и додавањем тој једначини добиће се нова у којој x_i неће стварно учествовати. Слично урадимо са сваком од тих осталих једначина. Стићи ћемо до новог система у ознаци

$$(s1)\qquad b_1x_1 + \ldots + b_ix_i + \ldots + b_kx_k = 0,\quad Sis_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

где је Sis_1 део, односно подсистем који стварно не садржи x_i (а можда и неке друге непознате). У складу са тим важи неједнакост

$$(s2)\qquad Stv(Sis_1) < Stv(Sis).$$

Полазни систем је еквивалентан са системом $(s1)$, а тај систем има решења ако и само ако његов подсистем Sis_1 има решења по својим стварно учествујућим непознатим. Заиста, свако решење подсистема Sis_1 лако се може допунити до решења и прве једначине у $(s1)$. У ту сврху треба уз помоћ прве једначине израчунати x_i као и све оне друге непознате које стварно не учествују у Sis_1. Ако се деси да треба израчунати више њих, тада се све изузев једне изаберу по вољи (тј. оне су слободне), а преостала се израчуна из прве једначине. Другим речима, питање решавања полазног система (Sis) се своди на питање решавања система (Sis_1). Међутим, у складу са неједнакошћу $(s1)$ имамо прелаз на лакши случај, рећи ћемо имамо и **спуст**.

Алгоритам се даље наставља на подсистему Sis_1 и у наредном кораку опет се догоди 'спуст', јер у преосталом подсистему се смањи број његових стварно учествујућих непознатих. Тако слично настављамо све док се не деси једна од ове две могућности

(j) Добијен подсистем "је празан", тј. нема ниједну једначину

(jj) Добијен подсистем није празан, али нема ниједну стварно учествујућу непознату

У излагању разних примера у Раз 22 на таквом месту алгоритма смо говорили да

се завршава "прво полувреме". Међутим, ако се деси случај (jj) и уз то добијени "константски" подсистем је немогућ, тј. еквивалентан са $\perp$, другог полувремена нема и $Gauss-$ов алгоритам се завршава закључком да је полазни систем $Sis(x_1, ..., x_k)$ немогућ. У противном случају, а такође и у случају (i) помоћу замисли "одоздо нагоре" (вид. Раз 22, посебно његов 6^0 пример) корак-за-кораком се направе обрасци свих решења.
И тада се јаве две могућности: систем нема ниједну слободну непознату, односно има неке слободне непознате, рецимо у ознаци $v_1, ..., v_s$. У првом случају систем има извесно јединствено решење попут $(v_1, ..., v_k)$ и он је тада еквивалентан са системом $x_1 = v_1, \; ..., \; x_k = v_k$. У другом случају се добију обрасци попут (22.2) којим се -може се тако рећи- неслободне непознате дефинишу као извесни линеарни изрази (линеарне комбинације) од слободних, чије вредности могу бити произвољни реални бројеви. Такође истичемо да у општем случају важи еквиваленција вида (22.2)

На крају додајемо и следеће. Изложени $Gauss-$ов поступак је "двополувременски". Добра страна тога је што након првог полувремена се одлучује питање могућности датог система, а лоша је што ако рецимо знамо да је полазни систем могућ, онда зашто "ићи и одозго надоле и обратно" а не решити систем ходањем у једном правцу (?). У ствари могућа је таква модификација и њу излажемо на једном примеру у Раз 23. Крај Напомене 22.1.

Раз 23. *Решити по* $x, y, z \in R$ *систем*

$$x + y + z = 3, \; 2x + y - 2z = 1, \; x - y + 3z = 3$$

Решење. Решење ћемо изложити $Gaus-$овски али 'једносмерно', значи без 'два полувремена'. Један такав решавајући ланац гласи

$$x + y + z = 3, \; 2x + y - 2z = 1, \; x - y + 3z = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y + z = 3, \; -y - 4z = -5, \; -2y + 2z = 0$$

Прву једначину смо преписали, помножили је са -2 и производ додали другој, затим је помножили са -1 и производ додали трећој. Сада ћемо -што није битно- другу једначину помножити са -1, а трећу са $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad x + y + z = 3, \; y + 4z = 5, \; -y + z = 0$$

Сада ћемо преписати другу, помножити је са 1 и производ додати трећој. Али, такође ћемо је помножити са -1 и производ додати првој. Приметите, да тако у новој првој x ће "остати као што је било", односно у облику $x + ...$

$$\Leftrightarrow \quad x + z = 2, \; y + 4z = 5, \; 5z = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x + z = 2, \; y + 4z = 5, \; z = 1$$

Трећу смо -што није битно- помножили са $\frac{1}{5}$. Сада преписујемо трећу, множимо је са -4 и производ додајемо другој, после тога множимо је са -1 и производ додајемо првој. Приметите да све то нема никакво дејство на y у другој, као ни на x у првој

$$\Leftrightarrow \quad x = 1, \; y = 1, \; z = 1$$

Систем је решен, уређена тројка $(1, 1, 1)$ му је јединствено решење.

Напомена 23.1. Изложени 'једносмеран' $Gauss-$ов алгоритам је у ствари близак *алгоритму замене,* али је од њега тешнички сређенији, простији. Иначе, тај алгоритам замене кратко описан гласи:

Из једне једначине система једну непознату, рецимо то је x, изразимо преко осталих. Даље свуда, тј. у свим осталим једначинама x заменимо његовим изразом. Добијемо подсистем који не садржи x. У њему опет помоћу извесне једначине једну његову непознату, рецимо то је y изразимо преко осталих (наравно међу њима није x). Даље, свуда (то се односи и на једначину која је узета за 'одредницу' x-а) y заменимо његовим изразом, итд. итд. Иначе, тај алгоритам почива на општем закону замене за једнакост (вид. (13.2))

Раз 24. *Решити дате системе*

1^0 $3x = 6, \; 3x = 6$ *по* $x \in R$, $\quad 2^0$ $3x = 6, \; 3x = 7$ *по* $x \in R$,

3^0 $x + y = 3, x + y = 3$ *по* $x, y \in R$ $\quad 4^0$ $x + y = 3, x + 2y = 4, x - y = 1$ *по* $x, y \in R$

5^0 $x - 2y + z = 0, \; 2x - 3y - z = 1, 3x - y - z = 5$ *по* $x, y, z \in R$

6^0 $x - 2y + z = -1, \; 2x + y + 2z = 3, \; 3x - y + 3z = 0$ *по* $x, y, z \in R$

7^0 $x + y - z = 1, x - y + z = 1, 2x + y - z = 2, 3x + 2y - z = u$ *по* $x, y, z, u \in R$

8^0 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \; x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 0$ *по* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$

Раз 25 (наставак Раз 22). *Доказати импликацију*

$$x - y - 2z + u + 3v = 15, \; x + y - 2z - u + v = 5,$$
$$3x - 2y - 6z + 2u - v = 4, \; x - 4y - 2z + 4u + v = 10$$
$$\Rightarrow \quad 3x - 3y - 6z + 3u + 2v = 17$$

где су x, y, z, u, v *ма који реални бројеви.*

Упутство. У тој импликацији гледаној као $P \Rightarrow Q$ део P је управо систем 6^0 у Раз 22. Користити обрасце (22.2). Препоручујемо да и сами направите неколико сличних задатака.

Раз 26. *Решити по $x \in R$ једначину*

1^0 $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2=0$; 2^0 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x+x^2}=0$;
3^0 $(x^2-25x+46)^4+(x^2-21x+38)^2=0$

Решење. 1^0 Један начин је да се "залетимо", тј. средимо леву страну и решимо одговарајућу квадратну једначину. Али, да ли је то неопходно ? Наиме, дата једначина -приближно описана речима- гласи: Збир неких квадрата је једнак 0, односно она је облика $A^2+B^2+C^2=0$. *Квадрат сваког реалног броја је ненегативан !* Стога таква једнакост може да наступи ако и само ако $A=0,\ B=0,\ C=0$. На основу тога дата једначина је еквивалентна са системом: $x-1=0,\ x-2=0,\ x-3=0$, који је очигледно немогућ. Значи, дата једначина је немогућа.

2^0 Како по својој дефиницији (вид. Напомену 47.1) квадратни корен неког ненегативног реалног броја је такође **ненегативан**, у вези са датом једначином имамо овај еквиваленцијски ланац

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x+x^2}=0;$$
$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2-2x+1}=0,\quad \sqrt{1-2x+x^2}=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x^2-2x+1=0,\quad 1-2x+x^2=0$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-1)^2=0,\quad (1-x)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x=1$$

па је 1 јединствено решење дате једначине.

3^0 Расуђивањем сличним у претходна два решења лако се види да је дата једначина еквивалентна са овим системом једначина

$$x^2-21x+38=0,\quad x^2-25x+46=0$$

То су две квадратне једначине са истом непознатом x. Основно је питање да ли оне имају заједничко решење. Занимљиво је да ради расправљања тог питања не морамо решавати ниједну од тих једначина. Постоји боља идеја ! Наиме, те две једначине схватимо као две линеарне једначине по непознатим x и x^2. Са том замисли, и користећи $Gauss-$ов поступак (вид. Раз 22) имамо овај еквиваленцијски ланац

$$x^2-25x+46=0,\quad x^2-21x+38=0$$

Прву једначину ћемо преписати, помножити је са -1 и производ додати другој. Тако ћемо из ње избацити x^2. Тако имамо

$$\Leftrightarrow\quad x^2-25x+46=0,\quad 4x-8=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-25x+46=0,\quad x=2$$

Сада пошто смо 'кандидатско' x нашли, то ћемо x у првој једначини заменити са 2. Тачно речено, користимо закон замене за једнакост (13.2)

$$\Leftrightarrow\quad 2^2-25*2+46=0,\quad x=2$$
$$\Leftrightarrow\quad 0=0,\quad x=2$$
$$\Leftrightarrow\quad \top,\quad x=2$$
$$\Leftrightarrow\quad x=2$$

Закључак је да полазна једначина има 2 као јединствено решење.

Раз 27. Замисао : једна непозната, а две или више алгебарских једначина[18] *Решити дате системе једначина по $x \in R$*

1^0 $x^3+3x^2-4x-6=0,\quad 2x^3-5x^2+3x+10=0$

2^0 $x^3+2x^2-x-2=0,\quad x^3+3x^2-4=0$

3^0 $x^2+x-3=0,\quad x^2+x-4=0$

4^0 $x^5+x-2=0,\quad x^2+3x-4=0,\quad x^3-3x+2=0$

Решење. У основи користимо поступак сличан $Gaus-$овом за системе линеарних једначина (вид. Раз 22). Тако, поступно правимо еквиваленцијски ланац тако да на крају стигнемо до неке - за решавање - просте једначине, можда линеарне:

1^0 $x^3+3x^2-4x-6=0,\quad 2x^3-5x^2+3x+10=0$

'Трудимо са' да те две једначине гледамо као две линеарне по непознатим $x^3,\ x^2,\ x$. Прву преписујемо, множимо са -2 и производ додајемо другој. Тако добијамо

$$\Leftrightarrow\quad x^3+3x^2-4x-6=0,\quad -11x^2+11x+22=0$$

Битно је да се примети да смо од система две кубне једначине прешли на простији случај: систем кубне и квадратне. Друкчије ћемо рећи да смо направили 'спуст' са случаја $(3,3)$ на случај $(3,2)$

$$\Leftrightarrow\quad x^3+3x^2-4x-6=0,\quad x^2-x-2=0$$

Мало смо другу једначину упростили (помножили је са $-\frac{1}{11}$) Сада овако помишљамо. 'Спустили' смо се до $(3,2)$, кад бисмо се некако могли 'спустити' на $(2,2)$, тј. добити две квадратне једначине. То је могуће ! У ту сврху, другу ћемо преписати , затим је помножити са $-x$ и производ

[18] Напомињемо да током излагања решавања дајемо и два 'међу-упутства'

додати првој. Као што видите чинимо тако да у првој уклонимо x^3. Тако имамо

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2-2x-6=0, \quad x^2-x-2=0$$

Успели смо. Начинили смо спуст са $(3,2)$ на $(2,2)$. А сада ћемо најпре прву мало упростити множећи је са $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2-x-3=0, \quad x^2-x-2=0$$

У овом кораку ћемо преписати другу, помножити је са -2 производ додати првој, и тако начинити још један спуст: прећи ћемо на случај $(1,2)$, тј. једне линеарне и једне квадратне једначине

$$\Leftrightarrow \quad x^2-x-2=0, \quad x+1=0$$

Могли бисмо наћи x из друге, итд. Међутим, намерно 'се спуштамо' и даље. Сада ћемо од случаја $(1,2)$ прећи на случај $(1,1)$. У ту сврху, препишимо другу, помножимо је са $-x$ и производ додајмо првој. Тако добијамо

$$\Leftrightarrow \quad x+1=0, \quad -2x-2=0$$

Спустили смо се на случај $(1,1)$. Али, слично чинимо и даље. Преписаћемо прву, помножити је са 2 и производ додати другој. Тако добијемо

$$\Leftrightarrow \quad x+1=0, \quad 0=0$$

Једначина $0=0$ је еквивалентна са $\top$, па је изостављамо

$$\Leftrightarrow \quad x+1=0$$

И овде је крај спуста. Видимо да дате кубне једначине имају -1 као једино заједничко решење

Међу-упутство 27.1. Претпоставимо да смо слично као у изложеном решењу током решавања неког система једначина у једном кораку стигли до неког оваквог система

$$Ax^m+\ldots=0, \qquad A\neq 0$$
$$Bx^n+\ldots=0, \qquad B\neq 0$$

где је прва једначина је степена m, друга једначина степена n, при чему $m>n$. Значи, ту се јавља случај (m,n). Да бисмо начинили спуст другу једначину преписујемо, множимо је са $-\frac{A}{B}x^{m-n}$ и производ додајемо првој. Тако ћемо код прве уклонити члан Ax^m. Иначе, ту се претпоставља да су Ax^m, односно Bx^n најстарији чланови горњих једначина.

Што се тиче образложења поступка наведимо да се користе опште еквиваленције

(22.1), јер иако током рада не знамо шта је x ми стално претпостављамо да је то неки реалан број.

2^0 Правимо следећи еквиваленцијски ланац

$$x^3+2x^2-x-2=0, \quad x^3+3x^2-4=0$$

Другу преписујемо, множимо са -1 и производ додајемо првој

$$\Leftrightarrow \quad x^3+3x^2-4=0, \quad -x^2-x+2=0$$

Другу преписујемо, множимо са x и производ додајемо првој

$$\Leftrightarrow \quad -x^2-x+2=0, \quad 2x^2+2x-4=0$$

Мало ћемо упростити те једначине, прву помножити са -1, а другу са $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+x-2=0, \quad x^2+x-2=0$$

Прву ћемо преписати, помножити са -1 и производ додати другој

$$\Leftrightarrow \quad x^2+x-2=0, \quad 0=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+x-2=0, \quad \top$$

Као што видите, успут нам се јавила једначина $0=0$, без стварног учешћа непознате x. Та једначина је еквивалентна са $\top$ па ћемо је уклонити

$$\Leftrightarrow \quad x^2+x-2=0$$

Шта сада радити, како се даље спуштати ? Одговор: Дошавши на једну једначину нема више никаквог спуста, поступак се завршава. Овде то значи да дате кубне једначине имају тачно два заједничка решења. То су 1 и -2, решења квадратне једначине $x^2+x-2=0$

Међу-упутство 27.2. Поступак решавања више алгебарских једначина по једној непознати завршава се у два случаја

1^0 Успут се појави нека немогућа "константска" једначина попут $0=1$. Тада полазни систем је такође немогућ.

2^0 Систем се свео на једну једначину. Тада њена решења су тражена решења система

3^0 Уочимо овај еквиваленцијски ланац

$$x^2+x-3=0, \quad x^2+x-4=0$$

Прву преписујемо, множимо са -1 и производ додајемо другој

$$\Leftrightarrow \quad x^2+x-3=0, \quad -1=0$$

Дати систем је немогућ јер смо стигли до немогуће "константске" једначине $-1=0$

6^0 Имамо три једначине, али можемо као и у претходним примерима до краја радити "гаусовски". Међутим, лакше ће нам бити да најпре радимо са његовим подсистемом од друге и треће једначине. За њега имамо овај еквиваленцијски ланац

$x^2+3x-4=0,\quad x^3-3x+2=0$

Прву преписујемо, множимо са $-x$ и производ додајемо другој

$\Leftrightarrow\quad x^2+3x-4=0,\quad -3x^2+x+2=0$

Прву преписујемо, множимо са 3 и производ додајемо другој

$\Leftrightarrow\quad x^2+3x-4=0,\quad 10x-10=0$

$\Leftrightarrow\quad x^2+3x-4=0,\quad x-1=0$

И сада будући да смо стигли до линеарне, најпре ћемо њу решити. Добијамо 1 као једино решење. У ствари још остаје само провера да ли је 1 решење и осталих једначина. Желећи да имамо стално еквиваленцијски ланац ту проверу обављамо позивањем на закон замене за једнакост (13.2)

$\Leftrightarrow\quad 1^2+3*1-4=0,\quad x=1$

$\Leftrightarrow\quad \top,\quad x=1$

$\Leftrightarrow\quad x=1$

И тако уочени подсистем се своди на $x=1$. Стога је полазни систем еквивалентан са

$$x^5+x-2=0,\ x=1$$

а овај на основу закона замене за једнакост са

$$1^5+1-2=0,\ x=1$$

односно са

$$\top,\ x=1$$

и коначно са $x=1$, па значи полазни систем је могућ и 1 му је једино решење.

Напомена 27.1 Укратко описујемо општи поступак решавања система у ознаци $Sis(m,n)$ (где $m\geq n$) две једначине степена m и n по једној непознатој (у ознаци x). У опису користимо две помоћне променљиве P и Q. Поступак (алгоритам) гласи:

Корак 0. Ставимо $P=m,\ Q=n$.

Корак 1. Нека најстарији чланови једначина буду Ax^P, односно Bx^Q. Преписујемо једначину нижег степена, тј. степена Q, множимо је са $-\frac{A}{B}x^{P-Q}$ и производ додамо преосталој једначини, тј.оној степена P. Та ће се једначина променити и могу настати три случаја

1^0 Добили смо константску једначину (као $0=1,\ 0=2$ и сл) која је немогућа. Тада се алгоритам завршава закључком да полазни систем $Sis(m,n)$ нема решења.

2^0 Добили смо константску једначину $0=0$. Алгоритам се завршава закључком да се полазни систем $Sis(m,n)$ своди на једну једначину, овде је то једначина степена Q.

3^0 Ново-добијена једначина је степена P', где $0<\ P'\ <\ P$. Уочавамо нови систем од те једначине и старе једначине степена Q. Ставимо: ново P је $max(P',Q)$, а ново Q је $min(P',Q)$ и са новим системом идемо на Корак1.

Уз описани алгоритам додајемо и следеће 'мало' побољшање. Ако се догоди да дођемо до система чија једна једначина је линеарна, рецимо $x=a$, онда је боље да алгоритам завршимо употребом закона замене за једнакост (13.2). То значи да тај систем означен рецимо овако $x=a,\ \ \phi(x)$ заменимо са $x=a,\ \ \phi(a)$, где $\phi(x)$ представља другу једначину система.

Такође истичемо и следеће. Употребом појма *дељења два полинома* наведени алгоритам се може нешто скратити. Наиме, ако имамо систем

$(*)\qquad p_1(x)=0,\quad p_2(x)=0$

при чему $p_1(x),\ \ p_2(x)$ су редом степена $n,\ m$ са $n\leq m$, онда можемо овако чинити. Полином $p_2(x)$ поделимо полиномом $p_1(x)$, и тако добијемо известан количник $q(x)$ и остатак $r(x)$. Тада важи једнакост $p_2(x)=p_1(x)q(x)+r(x)$ па $(*)$ добија облик

$$p_1(x)=0,\quad p_1(x)q(x)+r(x)=0$$

што је еквивалентно са

$(**)\qquad p_1(x)=0,\quad r(x)=0$

Као што се види, прву једначину смо преписали, помножили са $-q(x)$ и производ додали другој. На такав начин се од $(*)$ прелази у једном кораку, наравно уз претпостављен алгоритам дељења два полинома.

Раз 28 (наставак претходног). *Дате једначине решити по* $x \in R$

1^0 $x^2 - 8x + 15 = 0, \quad x^2 - 7x + 12 = 0$

2^0 $x^2 - 8x + 15 = 0, \quad x^3 - 6x^2 + 4x + 15 = 0$

3^0 $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0, \quad x^4 + x^3 - x - 1 = 0$

4^0 $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0, \quad x^4 + x^3 - x - 1 = 0, \quad x^5 - x^2 - x + 1 = 0$

Раз 29. *Шта математички значи: Решити по* $x \in R$ *једначину* $ax = b$ *где су* a, b *реални* **параметри**?

Решење. Да бисмо лакше схватили одговор, претпоставимо да су реални бројеви само : $0, 1, 2$. Тада постављено питање значи:

Решити све ове посебне једначине

$$\begin{array}{lll} 0x = 0, & 0x = 1, & 0x = 2 \\ 1x = 0, & 1x = 1, & 1x = 2 \\ 2x = 0, & 2x = 1, & 2x = 2 \end{array}$$

И наравно, слично али теже замисливо, важи и кад 'параметри' a, b "прођу" преко свих реалних бројева. И сада се можемо питати: *Како скупно решити бесконачно много појединачних једначина ?* И ту се сада појављује једна помало у математици тајанствена ствар:

(29.1) Самих једначина заиста има бесконачно много али се оне могу поделити у **коначно** много класа, при чему се надаље једначине из исте класе решавају на исти начин.

Одређено речено, као што је добро знано, разликујемо ове три класе

Класа 1 са одредницом: $a \neq 0$ Ту су све оне једначине $ax = b$ чији коефицијент a није 0. За њих важи еквиваленција $ax = b \Leftrightarrow x = b/a$, тј. број b/a им је јединствено решење.

Класа 2 са одредницом: $a = 0, b \neq 0$. Ту долазе једначине као $0x = 1$, $0x = -2$, $0x = \sqrt{2}$, итд. Све су оне немогуће, рећи ћемо еквивалентне са $\perp$.

Класа 3 са одредницом: $a = 0, b = 0$. Ту спада само једначина $0x = 0$, којој је сваки реалан број решење.

Раз 30 (наставак претходног). *Одговарајућим еквиваленцијским ланцем решити по* $x \in R$ *једначину* $ax = b$ *где су* a, b *реални параметри*

Решење. Један еквиваленцијски начин решавања гласи:

$ax = b \quad \Leftrightarrow \quad ax = b, \quad (a \neq 0 \vee a = 0)$

Да бисмо потражили x из задане једначине морамо разматрати два случаја: $a \neq 0$, односно $a = 0$. То логички значи да уз задану једначину треба да придружимо дисјункцију тих случајева.

$\Leftrightarrow \quad ax = b, a \neq 0 \ \vee \ ax = b, a = 0$

Обавили смо "логичко множење" (вид. Напомену 18.1)

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0, \ x = b/a \ \vee \ ax = b, a = 0$

Уколико $a \neq 0$ тада важи еквиваленција $ax = b \Leftrightarrow x = b/a$, тј. другим речима важи ова импликација:

$$a \neq 0 \Rightarrow (ax = b \Leftrightarrow x = b/a).$$

Међутим у складу са таутологијом

$$(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \quad \Leftrightarrow \quad ((p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r))$$

имамо еквиваленцију $ax = b, a \neq 0 \Leftrightarrow x = b/a, a \neq 0$, управо коју смо и користили.

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0, x = b/a \ \vee \ a = 0, 0.x = b$

На другу "грану", тј. део: $ax = b, a = 0$ користили смо (13.2), односно закон замене за једнакост. Стигли смо до једначине $0.x = b$ која **стварно** не садржи непознату x. У ствари та једначина се своди на потребан и довољан услов да она има решење. Тај услов може, али и не мора да важи. Следствено, треба да разликујемо два случаја, па ћемо стога уз другу грану придружити дисјункцију $b = 0 \vee b \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0, x = b/a \ \vee \ a = 0, 0.x = b, \ (b = 0 \vee b \neq 0)$

$$\begin{array}{ll} \Leftrightarrow & a \neq 0, x = b/a \\ & \vee \ a = 0, b = 0, 0.x = b \\ & \vee \ a = 0, b \neq 0, 0.x = b \end{array}$$

Добили смо три "гране". На почетку сваке од њих стоји услов који јој је у ствари одредница

$$\begin{array}{ll} \Leftrightarrow & a \neq 0, x = b/a \\ & \vee \ a = 0, b = 0, \top \\ & \vee \ a = 0, b \neq 0, \perp \end{array}$$

Могли смо код друге гране уместо $\top$ ставити једначину $x = x$, односно ма коју једначину којој су решења сви реални бројеви. Слично, код треће гране смо могли уместо $\perp$ ставити ма коју немогућу једначину.

Као што видите те гране кад би умеле да причају рекле би: ако $a \neq 0$ полазна једначина је еквивалентна са једначином $x = b/a$, ако $a = 0, b = 0$ еквивалентна са $\top$, и најзад ако $a = 0, b \neq 0$ еквивалентна је са $\perp$.

Напомена 30.1. Премда је разматран пример прилично прост у наведеном еквиваленцијском решавању се крије неколико општих замисли које ћемо сада изложити. Тако, нека је $For(x, y, ..., a, b, ...)$ ма која једначина, неједначина, систем таквих или уопште нека формула којој су $x, y, ...$ непознате, док су $a, b, ...$ параметри. Наравно и за непознате и за параметре су унапред дате њихови скупови, области. Тада, као и у изложеном примеру трудимо се да коришћењем разних општих еквиваленција на крају изведемо неку еквиваленцију облика

$$(30.1)\quad \begin{aligned} For(x,y,...,a,b,...) \;\Leftrightarrow\; & Uslov_1(a,b,...),\ Res_1(x,y,...)\\ \vee\; & Uslov_2(a,b,...),\ Res_2(x,y,...)\\ & \vdots\\ \vee\; & Uslov_k(a,b,...),\ Res_k(x,y,...) \end{aligned}$$

где су $Uslov_i(a, b, ...)$ извесне формуле, услови по параметрима $a, b, ...,$ док $Res_i(x, y, ...)$ су формуле које се сматрају **решеним** у односу на непознате $x, y, ...$. За $Uslov_1(a, b, ...), ..., Uslov_k(a, b, ...)$ се тражи да **у свакој "тачки"** $(a, b, ...)$ **тачно један од њих буде испуњен.** Иначе, ако у некој "тачки" важи $Uslov_i(a, b, ...)$ онда за ту вредност параметара $a, b, ...$ решења су одређена са одговарајућом формулом $Res_i(x, y, ...)$. Ево неких формула по x које сматрамо решеним: $x = a$, $\perp$, $\top$, $x > a$ и сл.
Може се рећи да уопште при решавању неке формуле $For(x, y, ..., a, b, ...)$ по $x, y, ...$ основни проблем је како пронаћи еквиваленцију попут (30.1), То све зависи од врсте формула која се решава. Поменимо још да ћемо се у вези са еквиваленцијом типа (30.1) такође и овако изражавати: за њену десну страну ћемо рећи да је **један решен облик** полазне формуле $For(x, y, ..., a, b, ...)$. Сходно томе, питање решавања неке такве формуле се просто своди на тражење неког њеног решеног облика. Крај Напомене 30.1.

Напомена 30.2. У многим случајевима се, ради добијања еквиваленције облика (30.1) користе ове замисли:

Ако у извесном кораку за решавање по некој непознатој се јавља потреба "гранања", тј. такво решавање се не може обавити на један начин, већ се појављују разни случајеви $Sluc_1, ..., Sluc_m$, тада обављамо оваква два корака у еквиваленцијском решавању

$$(30.2)\quad \begin{aligned} & For(x,y,...,a,b,...)\\ \Leftrightarrow\; & For(x,y,...,a,b,...),\ (Sluc_1 \vee Sluc_2 \vee ... \vee Sluc_m)\\ \Leftrightarrow\; & For(x,y,...,a,b,...),\ \ Sluc_1\\ & \vee\ For(x,y,...,a,b,...),\ \ Sluc_2\\ & \vdots\\ & \vee\ For(x,y,...,a,b,...),\ \ Sluc_m \end{aligned}$$

Друкчије речено, обавили смо "логичко множење" (вид. Напомену 18.1).

Друга замисао је следећа. Претпоставимо да је $Posl(For)$ извесна формула која је последица формуле $For(x, y, ..., a, b, ...)$. Тада можемо користити ову еквиваленцију

$$(30.3)\quad For(x,y,...,a,b,...) \;\Leftrightarrow\; For(x,y,...,a,b,...), Posl(For)$$

Трећа замисао је ова. Може се догодити да $For(x, y, ..., a, b, ...)$ постане $For(0, 0, ..., a, b, ...)$, коју ћемо краће означити и овако $Uslov(a, b, ...)$. Тада у таквој формули ниједна њена непозната више стварно не учествује. Онда је јасно да $For(x, y, ..., a, b, ...)$ има решења ако и само ако важи услов $Uslov(a, b, ..., c)$. Када тај услов важи онда се решења састоје од произвољно одабраних вредности за непознате. Тај корак расуђивања се логички може исказати овим кратким еквиваленцијским ланцем

$$(30.4)\quad \begin{aligned} & For(x,y,...,a,b,...)\\ \Leftrightarrow\; & For(x,y,...,a,b,...),\ (Uslov(a,b,...) \vee \neg Uslov(a,b,...))\\ \Leftrightarrow\; & For(x,y,...,a,b,...),\ Uslov(a,b,...)\\ & \quad \vee\ For(x,y,...,a,b,...), \neg Uslov(a,b,...)\\ \Leftrightarrow\; & Uslov(a,b,...),\ \ \top\\ & \quad \vee\ \neg Uslov(a,b,...),\ \ \perp \end{aligned}$$

Ту смо са $\top$ означили ма коју формулу испуњену за све вредности њених променљивих. Рецимо, код линеарних једначина уместо тог $\top$, можемо ако хоћемо употребити једначину као $x = x$. Слично, са $\perp$ смо записали да дата формула нема решење. Код линеарних једначина уместо $\perp$ можемо употребити коју немогућу једначину попут $0 * x = 1$, $\ x = x + 1$.

Четврта замисао 'пристиже'. Када при решавању неке формуле са параметрима, неки од параметара добије извесну вредност тада је подесно учинити како описујемо. Нека, рецимо, параметар a има вредност $vred$. Тада у складу са законом замене за једнакост (13.2) треба користити овакву еквиваленцију

$$(30.5)\ For(x,y,...,a,b,...), a = vred \Leftrightarrow a = vred, For(x,y,...,vred,b,...)$$

Раз 31. *Дате формуле решити по $x, y, ... \in R$, у којима су $a, b, ...$ реални параметри*

1^0 $(a-1)(a-2)x = b(a-2)$, 2^0 $ax+y=1,\ x+ay=a^2$, 3^0 $ax > b$

Решење. 1^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи

$(a-1)(a-2)x = b(a-2)$

$\Leftrightarrow$ $(a-1)(a-2)x = b(a-2), ((a-1)(a-2) = 0 \vee (a-1)(a-2) \neq 0)$

Полазна једначина је облика $Px = Q$, па смо разликовали случајеве $P = 0$, $P \neq 0$, логички речено: додали смо дисјункцију $P = 0 \vee P \neq 0$, која је овде гласила $(a-1)(a-2) = 0 \vee (a-1)(a-2) \neq 0$

Даље обављамо "логичко множење"

$\Leftrightarrow$ $(a-1)(a-2)x = b(a-2),\ (a-1)(a-2) = 0$

У наредном кораку ћемо у складу са еквиваленцијом $(a-1)(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = 2$ ту грану ,слободније речено, преобратити у две гране

$\vee$ $(a-1)(a-2)x = b(a-2),\ (a-1)(a-2) \neq 0$

У наредном кораку, у тој грани ћемо искористити еквиваленцију $(a-1)(a-2) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1, a \neq 2$

$\Leftrightarrow$ $(a-1)(a-2)x = b(a-2),\ a = 1,$

У наредном кораку у тој грани ћемо $a = 1$ преписати и у првој једначини заменити a са 1 - примена закона замене за једнакост (13.2), можемо рећи и еквиваленције вида (30.5). Слично ћемо чинити и у другој грани

$\vee$ $(a-1)(a-2)x = b(a-2),\ a = 2$

$\vee$ $(a-1)(a-2)x = b(a-2),\ a \neq 1,\ a \neq 2$

У овој грани у идућем кораку x исказујемо одговарајућим разломком

$\Leftrightarrow$ $a = 1,\ 0 * x = -b$

Сада је прилика да се за ту грану користи ланац вида (30.4)

$\vee$ $a = 2,\ 0 * x = 0$

$\vee$ $a \neq 1,\ a \neq 2,\ x = \frac{b(a-2)}{(a-1)(a-2)}$

$\Leftrightarrow$ $a = 1,\ 0 * x = -b,\ (b = 0 \vee b \neq 0)$

$\vee$ $a = 2,\ 0 * x = 0$

$\vee$ $a \neq 1,\ a \neq 2,\ x = \frac{b(a-2)}{(a-1)(a-2)}$

$\Leftrightarrow$ $a = 1,\ 0 * x = -b,\ b = 0$

У наредном кораку у тој грани преписујемо $b = 0$ и користимо (30.5) (уместо a нама се јавља b)

$\vee$ $a = 1,\ 0 * x = -b,\ b \neq 0$

У наредном кораку једначина $0 * x = -b$ постаје немогућа, па ћемо је заменити са $0 * x = 1$, а можемо ако хоћемо и са $\perp$

$\vee$ $a = 2,\ 0 * x = 0$

$\vee$ $a \neq 1,\ a \neq 2,\ x = \frac{b(a-2)}{(a-1)(a-2)}$

$\Leftrightarrow$ $a = 1,\ b = 0,\ 0 * x = 0$

$\vee$ $a = 1,\ b \neq 0,\ 0 * x = 1$

$\vee$ $a = 2,\ 0 * x = 0$

$\vee$ $a \neq 1,\ a \neq 2,\ x = \frac{b(a-2)}{(a-1)(a-2)}$ Завршетак

Написали смо 'Завршетак' јер смо стигли до решеног облика, односно еквиваленције типа (30.1). И тако закључак је следећи. Имамо ове случајеве

(i) $a = 1,\ b = 0$. Тада дата једначина има сваки број као своје решење.

(ii) $a = 1,\ b \neq 0$. Једначина је немогућа.

(iii) $a = 2$ Сваки број је решење дате једначине.

(iv) $a \neq 1, a \neq 2$. Једначина има јединствено решење $\frac{b(a-2)}{(a-1)(a-2)}$

2^0 Уз коришћење $Gauss$—овог поступка (вид. Раз 22), један решавајући еквиваленцијски ланац гласи

$ax + y = 1,\ x + ay = a^2$

Другу једначину преписујемо, множимо са $-a$ и производ додајемо првој

$\Leftrightarrow$ $x + ay = a^2,\ y(1-a^2) = 1 - a^3$

$\Leftrightarrow$ $x + ay = a^2,\ y(1-a^2) = 1 - a^3,\ (1 - a^2 = 0 \vee 1 - a^2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow$ $x + ay = a^2,\ y(1-a^2) = 1 - a^3,\ (a = 1 \vee a = -1 \vee 1 - a^2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow$ $x + ay = a^2,\ y(1-a^2) = 1 - a^3,\ a = 1$

$\vee$ $x + ay = a^2,\ y(1-a^2) = 1 - a^3,\ a = -1$

$\vee$ $x + ay = a^2,\ y(1-a^2) = 1 - a^3,\ a \neq 1, a \neq -1$

У наредном кораку у свим гранама где је параметар a добио вредност, а то су овде прва и друга, користимо еквиваленцију вида (30.5)

$$(*)\quad \Leftrightarrow\; x+y=1,\;\; y*0=0,\;\; a=1$$
$$\vee\; x-y=1,\;\; y*0=2,\;\; a=-1$$
$$\vee\; x+ay=a^2,\;\; y(1-a^2)=1-a^3,\;\; a\neq 1, a\neq -1$$

Прве две гране су 'готове', односно доведене на решен облик. Зато даље решавамо трећу грану, привремемо је означавамо са Tri и за њу чинимо посебан решавајући еквиваленцијски ланац

$$Tri \;\Leftrightarrow\; x+ay=a^2,\;\; y=\tfrac{1-a^3}{1-a^2},\;\; a\neq 1, a\neq -1$$

Другу смо једначину помножили са $\frac{1}{1-a^2}$, тј. решили је по y. Сада ћемо то y заменити у првој. Али, да не бисмо губили еквиваленцијски ланац то ћемо учинити у духу $Gauss-$овог поступка (вид. Раз 22). Тако, другу једначину преписујемо, множимо са $-a$ и производ додајемо првој. Након малог рачуна добија се

$$\Leftrightarrow\;\; x=-\tfrac{a}{1+a},\;\; y=\tfrac{1+a+a^2}{1+a},\;\; a\neq 1, a\neq -1$$

Тако грана Tri је доведена на решен облик. Враћамо се на место $(*)$ и тамошњу трећу грану замењујемо добијеним решеним обликом. Тако полазна формула је еквивалентна са

$$(a=1, x+y=1)\;\vee\;(a=-1,\perp)$$
$$\vee\;(a\neq 1, a\neq -1,\; x=-\tfrac{a}{1+a},\;\; y=\tfrac{1+a+a^2}{1+a})$$

Имамо решен облик. Наиме, у случају $a=1$ систем се своди на једну једначину $x+y=1$, чија се сва решења могу овако одредити $x=p$, $y=1-p$, где p може бити ма кој реалан број. Даље, ако $a=-1$ полазни систем је немогућ, а у преосталом случају кад a није ни 1 ни -1 систем има јединствено решење исказано наведеним разломцима.

3^0 Један решавајући еквиваленцијски ланац гласи

$ax>b$ Пошто имамо неједначину разликујемо три случаја $a<0,\ a=0, a>0$

$$\Leftrightarrow\;\; ax>b, (a<0\;\vee\; a=0\;\vee\; a>0)$$
$$\Leftrightarrow\;\; ax>b, a<0\;\vee ax>b,\; a=0\;\vee ax>b,\; a>0)$$
$$\Leftrightarrow\;\; a<0,\; x<\tfrac{b}{a}\;\vee a=0,\; 0*x>b\;\vee\; a>0,\; x>\tfrac{b}{a}$$

Користили смо условне еквиваленције облика

$ax>b \;\Leftrightarrow\; x>\frac{b}{a}$ (Ако $a>0$); $\qquad ax>b\;\Leftrightarrow\; x<\frac{b}{a}$ (Ако $a<0$)

Сада ћемо у другој грани користити идеју (30.4), тј. разликовати случајеве *важи* $b<0$, односно *не важи* $b<0$

$$\Leftrightarrow\;\; a<0,\; x<\tfrac{b}{a}\;\vee a=0,\; 0*x>b\,(b<0\vee b\geq 0)\vee\; a>0,\; x>\tfrac{b}{a}$$
$$\Leftrightarrow\;\; a<0, x<\tfrac{b}{a}\;\vee a=0,\; b<0, \top\;\vee a=0,\; b\geq 0, \perp\;\vee\; a>0,\; x>\tfrac{b}{a}$$

Стигли смо до решеног облика који "прича": дата формула је немогућа ако $a=0,\ b\geq 0$. Ако $a<0$ решење јој је сваки реалан број мањи од $\frac{b}{a}$, а ако $a>0$ онда решење је сваки реалан број већи од $\frac{b}{a}$. Најзад, ако $a=0, b<0$ решење је сваки реалан број.

Раз 32. *Дате формуле решити по $x, y, \ldots \in R$, у којима су $a, b, c, d, e\ldots$ реални параметри*

$1^0\ ax=a\quad 2^0\ ax=b,\ cx+dy=e\quad 3^0\ ax-by=0,\ a^2x-by=ab$

$4^0\ ax+by=a+b,\ cx+dy=c+d\quad 5^0\ ax+by=c,\ cx+dy=e$

$6^0\ x+y+z=6,\ ax+4y+z=5,\ 6x+(a+2)y+2z=13$

$7^0\ ax+y+z=1,\ x+ay+z=a,\ x+y+az=a^2$

$8^0\ ax<b, cx>d\quad 9^0 ax+by<c\quad 10^0 ax+by<c, x+y=d$

Раз 33. *Решити по $x\in R$ једначину $ax^2+bx+c=0$, где су $a,\ b,\ c$ реални параметри*

Решење. Правимо овај еквиваленцијски ланац

$ax^2+bx+c=0$

$$\Leftrightarrow\;\; ax^2+bx+c=0, (a\neq 0\;\vee\; a=0)$$

Наум нам је да одвојимо случајеве кад дата једначина јесте односно није квадратна

$$\Leftrightarrow\;\; ax^2+bx+c=0,\; a\neq 0\quad\vee\quad ax^2+bx+c=0,\; a=0$$

Због услова $a\neq 0$ у првој грани имамо квадратну једначину. Треба обавити дискусију да ли је њена дискриминанта негативна или ненегативна. У другој грани задржаћемо једнакост $a=0$, и у осталом делу те гране a заменити са 0. То је примена закона (13.2) за једнакост

$$\Leftrightarrow\;\; ax^2+bx+c=0,\; a\neq 0,\; (b^2-4ac<0\;\vee b^2-4ac\geq 0)$$
$$\vee\;\; bx+c=0,\; a=0$$

$$\Leftrightarrow\;\; ax^2+bx+c=0,\; a\neq 0,\; b^2-4ac<0$$
$$\vee\;\; ax^2+bx+c=0,\; a\neq 0,\; b^2-4ac\geq 0$$
$$\vee\;\; bx+c=0,\; a=0$$

$$\Leftrightarrow\;\; a\neq 0,\; b^2-4ac<0,\; \perp$$
$$\vee\;\; a\neq 0,\; b^2-4ac\geq 0,\; (x=\tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\;\vee\; x=\tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$$

$$\vee \ bx+c=0,\ a=0$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ & a\neq 0,\ b^2-4ac<0,\ \perp\\ & \vee\ a\neq 0,\ b^2-4ac\geq 0,\ x=\tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ & \vee\ a\neq 0,\ b^2-4ac\geq 0,\ x=\tfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ & \vee\ bx+c=0,\ a=0\end{aligned}$$

Сада ћемо у трећој грани применити резултат из Раз 30 -додуше ознаке се разликују, што није битно

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ & a\neq 0,\ b^2-4ac<0,\ \perp\\ & \vee\ a\neq 0,\ b^2-4ac\geq 0,\ x=\tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ & \vee\ a\neq 0,\ b^2-4ac\geq 0,\ x=\tfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ & \vee\ a=0,\ b\neq 0,\ x=-\tfrac{c}{b}\\ & \vee\ a=0,\ b=0, c=0,\ x=x\\ & \vee\ a=0,\ b=0, c\neq 0,\ \perp\end{aligned}$$

Тако смо стигли до решеног облика односно еквиваленције облика (30.1)

Раз 34 *Решити по $x\in R$ дату формулу, где су a,b,c реални параметри*

1^0 $ab=c$ 2^0 $x=a,\ b=c$ 3^0 $x=a,\ x=b$

Решење. 1^0 То је једначина која стварно не садржи непознату и следствено јасно је следеће: она је могућа ако и само ако важи услов $ab=c$ и у потврдном случају x може бити ма који реалан број. Међутим, нама је битно да -ако можемо- и ту једначину решимо налазећи еквиваленцију вида (30.1), тј. довођењем те једначине на решен облик. То је могуће учинити како следи:

$ab=c$

$\Leftrightarrow\ ab=c,\ x=x$

Додали смо једначину $x=x$ тако да сада x стварно учествује. Међутим, тај део поручује да једначина $x=x$ подразумева присуство услова $ab=c$. А шта ако тај услов не важи? Одговор треба да буде да онда x -као решење- не постоји. Тај део расуђивања ћемо записно остварити како следи

$\Leftrightarrow\ ab=c,\ x=x\ \ (ab=c\ \vee\ ab\neq c)$

Хоћемо да правимо "раскрсницу", односно случајеве по *Дати услов важи* односно *не важи*, па смо "додали" дисјункцију $ab=c\ \vee\ ab\neq c$

$\Leftrightarrow\ ab=c,\ x=x\ \ \vee\ \ ab\neq c, \perp$

Истичемо да се слично ради и у општем случају, односно

(34.1) Ако је $Usl(a,b,...)$ x-једначина која x стварно не садржи, онда важи

ова еквиваленција вида (30.1)

$$Usl(a,b,...)\ \Leftrightarrow\ Usl(a,b,...), x=x\ \ \vee\ \ \neg Usl(a,b,..),\ \perp$$

2^0 Формула $x=a,\ b=c$ је већ у ствари решена по x и - слободније речено - то решење за x тражи присуство услова $b=c$. У складу са тим, слично као у претходном примеру лако се прави решен облик вида (30.1) и гласи

$$x=a,\ b=c\ \ \Leftrightarrow\ \ b=c,\ x=a\ \ \vee\ \ b\neq c, \perp$$

У општем случају имамо овакво тврђење

(34.2) Ако је $Usl(a,b,...)$ x-једначина која x стварно не садржи, онда важи ова еквиваленција вида (30.1)

$$x=t, Usl(a,b,...)\ \Leftrightarrow\ Usl(a,b,...), x=t\ \ \vee\ \ \neg Usl(a,b,..),\ \perp$$

где је t ма који израз (несадржећи x)

3^0 Непосредно имамо

$$\begin{aligned} x=a,\ x=b\ \ &\Leftrightarrow\ \ x=a, a=b && \text{(По (13.2))}\\ &\Leftrightarrow\ \ a=b,\ x=a\ \ \vee\ \ a\neq b,\ \perp && \text{(По (34.2))}\end{aligned}$$

чиме је дата формула доведена на решен облик.

Раз 35 (наставак Раз 27) *Замисао : једна непозната, а више једначина. Решити по $x\in R$ дату формулу у којој $a,b,c,...$ су реални параметри*

1^0 $ax=b,\ cx=d$ 2^0 $ax=b,\ cx^2+dx+e=0$

3^0 $ax^2+bx+c=0, px^2+qx+r=0$

Решење. Прво, услед присуства параметара ваља разликовати разне случајеве попут 'једначина јесте или није квадратна, јесте или није линеарна' и сл. Друго, у основи се користи алгоритам изложен у Напомени 27.1, као и тврђења (34.1) и (34.2). Истичемо да је осетљиво место кад постоји могућност да у некој грани свуда нестане непозната. Управо тада је прилика да се употреби (34.1) (видети и решење формуле 1^0).

1^0 Правимо овај еквиваленцијски ланац

$ax=b,\ cx=d$

$\Leftrightarrow\ ax=b,\ cx=d,\ (a\neq 0\ \vee\ a=0)$

Наум нам је да из прве нађемо x и заменимо у другу. Али, због тога морамо разликовати случајеве $a\neq 0$ и $a=0$

$\Leftrightarrow\ ax=b,\ cx=d,\ a\neq 0\ \ \vee\ \ ax=b,\ cx=d, a=0$

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0,\ cb = ad,\ x = \frac{b}{a} \quad \vee \quad a = 0,\ b = 0,\ cx = d$

Речени наум остварисмо. Сада ћемо слично чинити са једначином $cx = d$ у другој грани

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0,\ cb = ad,\ x = \frac{b}{a} \quad \vee \quad a = 0,\ b = 0,\ cx = d,\ (c \neq 0 \vee c = 0)$

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0,\ cb = ad,\ x = \frac{b}{a}$
$\vee \quad a = 0,\ b = 0,\ cx = d,\ c \neq 0 \quad \vee \quad a = 0,\ b = 0, cx = d,\ c = 0$

У другој грани ћемо, благодарећи присуству услова $c \neq 0$, x наћи из $cx = d$. 'Тренутно не дирамо' трећу грану, јер ту треба бити додатно обазрив- што ћемо објаснити

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0,\ cb = ad,\ x = \frac{b}{a}$
$\vee \quad a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0,\ x = \frac{d}{c} \quad \vee \quad a = 0,\ b = 0,\ cx = d,\ c = 0$

Сада смо у прилици да у трећој грани, користећи $c = 0$, у осталим саставцима те гране c заменимо са 0. Али, тако у тој грани губимо x, а њега управо тражимо. Из тог разлога у духу (34.1) чинимо овако. Заменом c са 0 видимо да се x губи управо у делу $cx = d$, који се том заменом преводи на $d = 0$. И сада, да не бисмо губили x на основу (34.1) $d = 0$ замењујемо са $d = 0,\ x = x \ \vee\ d \neq 0,\ \bot$. Тако добијамо

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0,\ cb = ad,\ x = \frac{b}{a}$
$\quad \vee \quad a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0,\ x = \frac{d}{c}$
$\quad \vee \quad a = 0,\ b = 0,\ c = 0, (d = 0, x = x \ \vee d \neq 0, \bot)$

$\Leftrightarrow \quad a \neq 0,\ cb = ad,\ x = \frac{b}{a}$
$\quad \vee \quad a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0,\ x = \frac{d}{c}$
$\quad \vee \quad a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 0,\ x = x$
$\quad \vee \quad a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ d \neq 0,\ \bot$

Као што видите, дошли смо до решеног облика, тј. еквиваленције облика (30.1).

2^0 (Упутство) Кратко речено, прво треба разликовати случајеве $a \neq 0$, односно $a = 0$. У првом случају x, нађено из прве једначине, треба заменити у другу. И ту је крај тог случаја. У другом случају уз преписивање једнакости $b = 0$ треба скоро преписати решење Раз 33.

3^0 (Упутство) Кратко речено, прво треба разликовати случајеве $a = 0$, односно $a \neq 0$. У првом случају се у ствари пребацујемо на претходни задатак 2^0, а у другом случају треба учинити како следи. Преписати прву једначину, помножити је са $-\frac{p}{a}$ и производ додати другој, којој ће се изгубити квадратан члан. У ствари, тако опет долазимо на задатак типа 2^0.

Раз 36. *Из дате формуле ϕ уклонити (елиминисати) кванторе, тј. наћи формулу ψ која не садржи кванторе и еквивалентна је са ϕ.*

1^0 $(\exists x \in R)\ x = 2$, $\quad 2^0$ $(\exists x \in R)\ x = x + 1$,

3^0 $(\exists x \in R)\ (x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = 0,\ \ 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10 = 0)$

4^0 $(\exists x \in R)\ (x = a,\ x = b)$ $\quad 5^0$ $(\exists x \in R)\ x^2 + 1 = 0$, $\quad 6^0$ $(\exists x \in C)\ x^2 + 1 = 0$,

7^0 $(\exists x \in R)\ ax + b = 0$ $\quad 8^0$ $(\exists x \in R)\ x^2 + ax + b = 0$,

9^0 $(\forall x \in R)\ (x > 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0)$, 10^0 $(\forall x \in R)(\exists y \in R)\ ay = x$

у којима су a, b реални параметри

Решење. 1^0 Елиминанта, односно формула ψ је $\top$. 2^0 Елиминанта је $\bot$.
3^0 Овде, а и многим другим задацима елиминације, је подесно користити идеје из Раз 27 и Раз 35 ("једна непозната а више једначина"). Овај пример је директно у вези са 1^0 из Раз 27. Зато имамо овај еквиваленцијски ланац

$(\exists x \in R)\ (x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = 0,\ \ 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10 = 0)$

Ту сада треба "решавати две $x-$једначине", односно у ствари x избацити из једне од њих. То смо већ чинили у Раз 27, 1^0, па ћемо преписати крај

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in R) x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \top$ Елиминанта је $\top$

4^0 Слично претходном имамо еквиваленцијски ланац

$(\exists x \in R)\ (x = a,\ x = b)$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in R)\ (x = a,\ a = b)$

Применом закона замене за једнакост (13.2)

$\Leftrightarrow \quad ((\exists x \in R)\ x = a) \quad \wedge \quad a = b$

Јер x не учествује у саставку $a = b$. Уопште имамо овај логички закон за квантор 'постоји'

$(36.1) \qquad (\exists x)\ (\alpha(x)\ \wedge\ \beta) \quad \Leftrightarrow \quad ((\exists x)\ \alpha(x))\ \wedge\ \beta$

уколико x не учествује у формули β

$\Leftrightarrow \quad a = b$ Јер саставак $(\exists x \in R)\ x = a$ је тачан

Елиминанта је $a = b$. Може се овако рећи: она исказије потребан и довољан услов да $x-$систем $x = a$, $x = b$ има решење.
5^0 Елиминанта је $\bot$ јер у скупу R једначина $x^2 + 1 = 0$ је немогућа. 6^0 Елиминанта је $\top$ јер једначина $x^2 + 1 = 0$ је могућа у скупу C-комплексних бројева. 7^0 Сада се у основи користи Раз 30 и према њему лако се закључује да елиминанта је $a \neq 0 \ \vee \ a = 0, b = 0$. Она исказује поребан и довољан услов да једначина $ax + b = 0$ буде могућа. 8^0 Елиминанта је $a^2 - 4b \geq 0$
9^0 Елиминанта је $\top$ или $\bot$, већ према томе да ли за све реалне бројеве x важи или не важи импликација $x > 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$. Није тешко видети да важи, па резултат је $\top$. 10^0 У ствари је питање шта је потребан и довољан услов

по a, b тако да за сваки $x \in R$ једначина $ay = x$ има решење по $y \in R$. Одговор је $a \neq 0$ и то је тражена елиминанта.

Напомена 36.1. Желимо да истакнемо да је питање елиминисања квантора (кад је то могуће) једно од значајних питања у Математици уопште, а да се посебно проучава у Математичкој логици. С тим у вези је на нашем језику изашла књига **Хилбертови проблеми и логика**, Математичка библиотека 48, Завод за уџбенике, Београд, 1986. год. а написали су је наши познати математички логичари: *Жарко Мијајловић, Зоран Марковић и Коста Дошен.* У њој читалац може наћи разне занимљиве чињенице, међу њима и о питању елиминације квантора.

? **Раз 37.** *Елиминисати кванторе из дате формуле*

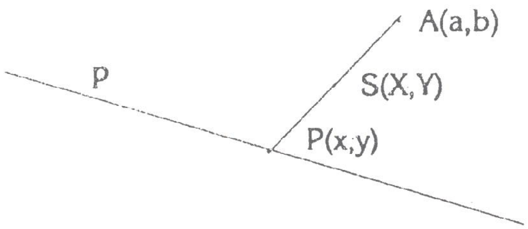
1^0 $(\exists x \in R)$ $(x = a,\ x > b)$, 2^0 $(\exists x \in R)$ $(x^2 - 5x + 6 = 0,\ x = a)$,

3^0 $(\exists x \in N)$ $(x^2 - 5x + 6 = 0,\ x^3 - x - 6 = 0,\ x = a)$, 4^0 $(\exists x \in R)\ x^2 = a$,

5^0 $(\exists x \in R)$ $(\exists y \in R)$ $x^2 + y^2 = a$, 6^0 $(\forall x \in R)$ $xa = x$,

7^0 $(\exists x \in R)$ $(\exists y \in R)$ $(x + y = 3,\ x - y = 1,\ x^2 + y^2 = a)$

Раз 38.- Аналитичка геометрија : *Дати су права p и тачка A. Одредити геометријско место тачака S које настају као средишта дужи AP, кад тачка P "иде" по правој p.*



Решење. Нека права p има ову једначину $px + qy + r = 0$, где су $p,\ q,\ r$ задани реални бројеви, не сви једнаки 0, што је записиво са $p^2 + q^2 + r^2 \neq 0$. Тачка $S(a, b)$ не припада тој правој па важи неједнакост $pa + qb + r \neq 0$. Означимо са $S(X, Y)$ средиште дужи SP, кад "тачка P иде по правој" p. Ставили смо те речи под наводе (вид. Напомену 38.2.) јер не одговарају уобичајеном строгом изражавању, али с друге стране су ближе изворном изражавању творца Аналитичке геометрије **R. Descartes**-а (1596-1650) једног од највећих француских математичара и философа(вид. Напомену 38.1.) Означимо са Sk скуп свих тако насталих тачака S. Тада једно одређење скупа Sk у духу реченог гласи:

$(X, Y) \in Sk$ ако и само ако (X, Y) је средиште дужи AP, при чему тачка P "иде" по правој p

Употребом квантора 'постоји' тај запис се може овако превести

$(X, Y) \in Sk \iff (\exists x,\ \exists y)\ (px + qy + r = 0,$ и (X, Y) је средиште дужи чији су крајеви (a, b) и $(x, y))$

односно овако

$$(X, Y) \in Sk \iff (\exists x,\ \exists y)\ (px + qy + r = 0,\ X = \tfrac{x+a}{2},\ Y = \tfrac{y+b}{2})$$

И сада нас чека задатак избацивања квантора из десне "половине" те еквиваленције. Тако имамо

$(\exists x,\ \exists y)\ (px + qy + r = 0,\ X = \frac{x+a}{2},\ Y = \frac{y+b}{2})$

Из двеју разломачких једначина наћи ћемо x и y и заменити у прву једначину

$\iff (\exists x,\ \exists y)\ (px + qy + r = 0,\ x = 2X - a,\ y = 2Y - b)$

$\iff (\exists x,\ \exists y)\ (x = 2X - a,\ y = 2Y - b,\ p(2X - a) + q(2Y - b) + r = 0)$

Примена закона замене за једнакост (13.2)

$\iff (\exists x,\ \exists y)\ (x = 2X - a,\ y = 2Y - b) \wedge p(2X - a) + q(2Y - b) + r = 0$

Примена еквиваленције (36.1) о квантору $\exists$

$\iff p(2X - a) + q(2Y - b) + r = 0$

Јер део $(\exists x,\ \exists y)\ (x = 2X - a,\ y = 2Y - b)$ је тачан

$\iff 2pX + 2qY + (-pa - qb + r) = 0$

Стигли смо до елиминанте, која представља праву -тражено геометријско место тачака.

Напомена 38.1. Корак који је учинио Р. Декарт један је од првих такве врсте у читавом развоју Математике. Његова аналитичка геометрија остварује плодну везу између, слободније речено, два математичка мисаона света: Геометрије и Алгебре. У даљем развоју та веза је била значајна за обе области, али посебно за геометрију. Тако, благодарећи тој Декартовој идеји 'обројавања' геометрије, питање њене непротивречности је "преточено" на питање непротивречности аритметике.

Даље, једно од тежих питања је да ли у решавању геометријских задатака морају преовлађивати разне досетке, или за неке њене делове постоје извесни алгоритми, па дакле и програми на рачунару ?

И што је веома занимљиво, одговор је потврдан. Наиме, А.Тарски (1902- 1983), један од највећих математичких логичара нашег века, 1949. године је пронашао такав алгоритам за 'елементарну геометрију и алгебру'. Кратко речено, то су делови школске геометрије и алгебре у којима се не користе неке "бесконачне конструкције" са реалним бројевима, као што је то случај са Канторовим принципом уметнутих одсечака (вид. Напомену 44.1). Алгоритам је изложен у његовом чланку *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry, Berkeley and Los Angeles, 1951*[19]

Иначе, у основи кад је у питању геометрија Тарсков план је овакав

Користећи Декартову идеју "обројавања' геометрије задано геометријско питање се "преточи" на одређено алгебарско-логичко питање које се може овако краће срочити: да ли се из одређених услова, формула -у којима учествују знаци основних рачунских радњи, даље знаци $=$, $<$, као и логички знаци $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$, $\forall$- могу избацити квантори.

Истакнимо да је та чињеница била основни разлог што смо до сада у Раз 27, Раз 35, Раз 36 толико простора посветили питању "једна непозната, а више једначина" као и питању елиминисања квантора.

Напомена 38.2. Подвлачимо да у Математици уопште докази морају бити строги, значи искључиво на језику математичких формула, следствено без употребе слика и других помагала. Али, 'ходање по свету Математике' тек у завршном делу, кад се 'плод' (теорема) 'осети, направи' изискује строго доказивање, док у осталим деловима то је веома занимљиво и тешко 'ходање' у коме нам су везивање за неки свет слика, елем и за слободније изражавање, често веома драгоцени. Кратко и слободније речено: мислимо на световима разних мисаоних слика, али кад 'смислимо' онда се 'спуштамо' на 'спрат' језика у коме 'смишљено' *исказујемо, изражавамо* и на крају строго доказујемо. Нешто слично, бар за сада, не могу чинити рачунари, па је то главни разлог што у области Вештачке интелигенције 'не цветају руже'.

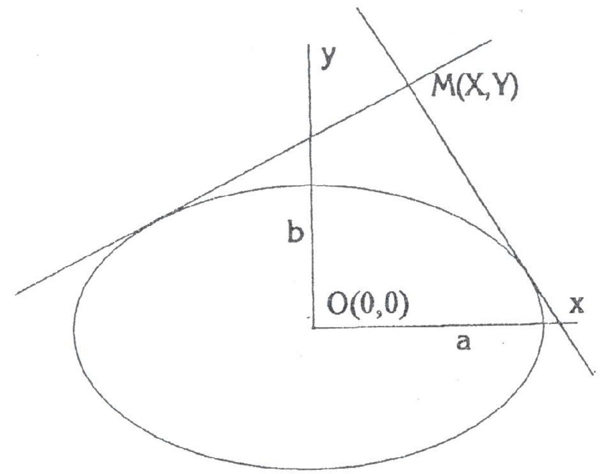
Међутим, треба бити опрезан у оцењивању језика, формула, (писане) логике, јер -посебно истакнимо- многе драгоцене чињенице смо открили у великој мери благодарећи њима. Наиме, од вајкада се у Математици радило и са самим **речима, записима**, рецимо у случају изражавања бројева одређеним записима (десетичним и др.) , даље у случају полинома и слично. И тада управо такви записи су нам снажно помогли у развијању разних делова Алгебре . У новије време иста идеја 'записности' (синтаксности) је присутна у Математичкој логици. Има много значајних случајева где је коришћење средстава

[19] О томе погледати и у књизи Хибертови проблеми и логика (вид. Напомену 36.1)

те логике веома плодно. У њој се поред осталог проучава појам алгоритма. Савремено рачунарство (Computer Science) у највећој мери је 'алгоритмика'.

Завршно речено: и од маштовитих мисаоних слика и од спретно коришћених записа могу се 'убрати' лепи плодови. Крај Напомене 38.2.

Раз 39. *Дата је елипса са полуосама a и b. Одредити геометријско место тачака из којих се та елипса "види" под правим углом*



Решење. Даћемо уобичајено решење.[20] Наиме, једначина дате елипсе гласи

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и уколико нека права са једначином

$$y = kx + n$$

додирује ту елипсу онда управо важи овај *услов додиривања*

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$

Даље, уочимо све праве које пролазе кроз тачку $M(X, Y)$ и додирују дату елипсу.

[20] Наравно, могуће је решавање преко идеје сличне оној у претходном Раз 38, тј. уочавањем додирних тачака, рецимо у ознаци (x_1, y_1) и (x_2, y_2), исказивање одговарајућих услова: те тачке су на елипси, праве $(X,Y)-(x_1,y_1)$ и $(X,Y)-(x_2,y_2)$ додирују елипсу и затим из добијених једначина елиминисање x_1, x_2, y_1, y_2.

Њихова једначина гласи

$$(*1) \qquad y - Y = k(X - x)$$

Применом услова додиривања добијемо ову једначину за одређивање броја k, тзв. коефицијента правца ('нагиба')

$$a^2k^2 + b^2 = (Y - kX)^2$$

односно

$$(*2) \qquad k^2(a^2 - X^2) + \ 2kXY \ + \ (b^2 - Y^2) \ = \ 0$$

Сада постављамо услов: та једначина има реална решења и приде њихов производ износи -1 (јер добијене k_1- и k_2-тангенте треба да буду под правим углом. Ти услови се исказују овако

$$X^2Y^2 - (a^2 - X^2)(b^2 - Y^2) \geq 0, \quad \frac{b^2-Y^2}{a^2-X^2} = -1$$

односно

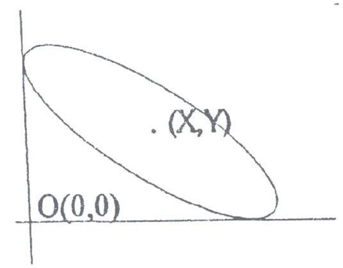
$$\frac{X^2}{a^2} \ + \ \frac{Y^2}{b^2} \geq 1, \quad X^2 + Y^2 = a^2 + b^2$$

Други услов "каже" да тачка $M(X, Y)$ припада кружници Kr центра $O(0,0)$, полупречника $\sqrt{a^2+b^2}$, а први да се та тачка не налази унутар дате елипсе. Пошто други услов повлачи први то коначно закључујемо да тражено геометријско место тачака је кружница Kr.

Наведено уобичајено решење има једну "рупу". Наиме, са $(*1)$ нису обухваћене све праве пролазеће кроз тачку M. Недостаје вертикална права са једначином $x = X$. Међутим, није тешко видети да би та права и на њу управна права 'донеле' још ове тачке $(-a, b)$, $(-a, -b)$, $(a, -b)$, (a, b). Како те тачке припадају кружници Kr закључујемо да Kr је тражено геометријско место тачака.

Напомена 39.1. Како се то десило да Kr ипак садржи те тачке ? Разлог је тананији. Наиме, у вези са једначином $(*1)$ пропустили смо да напишемо услов $a^2 - X^2 \neq 0$, који "каже" да је $(*2)$ заиста квадратна једначина по k.

Раз 40. *Елипса одређених полуоса a, b се налази у првом квадранту и "клиза" се додирујући обе координатне осе. Наћи геометријско место њеног центра.*



Решење. Ово ће бити помало неуобичајено решење које се ослања на решењу из претходног Раз 39. Наиме, према Раз 39. елипса, полуоса a, b се из неке тачке види под углом од 90^0 управо ако

Та тачка је на удаљењу $\sqrt{a^2+b^2}$ од центра елипсе

Примењујући ту чињеницу закључујемо да између тачака $(0,0)$ и (X, Y) (према слици) удаљење треба да износи $\sqrt{a^2+b^2}$. Пошто је то константа закључујемо да тражено геометријско место тачака је кружница $X^2 + Y^2 = a^2 + b^2$, односно у ствари један њен део (сами одгонетните који).

Раз 41. *Одредити на две децимале $\sqrt[3]{2}$.*

Решење. У ствари, треба на две децимале наћи позитивно решење једначине

$$(Jed) \qquad x^3 = 2$$

Излажемо једну општу, тзв. *децималску методу.* У почетном кораку тражимо два суседна цела броја између којих се налази тражено решење. Овде су то бројеви 1 и 2 јер $1^3 \ < \ 2$, док $2^3 \ > \ 2$. И тако за сада за решење x имамо закључак: $1 \ < \ x \ < \ 2$. У складу са тим x можемо изразити овако

$$(Dec_0) \qquad x = 1 + \tfrac{c_1}{10}, \qquad \text{где је } c_1 \in (0, 10) \text{ непознат број.}$$

Заменом тог x-израза у једначину (Jed) она, након кратког рачуна, постаје

$$(Jed_1) \qquad 300c_1 \ + \ 30c_1^2 \ + \ c_1^3 \ = \ 1000$$

Привремено означимо леву страну те једначине са $L(c_1)$. Поступамо овако: редом за c_1 дајемо вредности $0, 1, 2, ..., 9$ и станемо на првој таквој вредности i за коју $L(i) < 1000$ док $L(i+1) > 1000$. Будући да $L(1) = 332 < 1000$, $L(2) = 728 < 1000$, $L(3) = 1197$ то закључујемо да тражено i износи 2. Другим речима закључили смо следеће $2 \ < \ c_1 \ < \ 3$, што можемо исказати и овом једнакошћу $c_1 = 2 + c_2/10$ где $c_2 \in (0, 10)$ непознат број. Заменом тог c_1-израза у (Dec_0) добијамо овај закључак

$$(Dec_1) \qquad x = 1 + \ \tfrac{2}{10} \ + \ \tfrac{c_2}{100}, \qquad \text{где је } c_2 \in (0, 10) \text{ непознат број.}$$

У наредном кораку c_1-израз заменимо у једначину (Jed_1) која, након кратког рачуна, постаје

$$(Jed_2) \qquad 43200c_2 + 360c_2^2 + c_2^3 = 272000$$

Поступамо слично као при одређивању c_1. После кратког рачуна закључи се неједнакост $5 < c_2 < 6$, коју исказујемо овом једнакошћу $c_2 = 5 + c_3/10$ где $c_3 \in (0.10)$ непознат број. Заменом тог c_2-израза у (Dec_1) добијамо овај закључак

$$(Dec_2) \quad x = 1 + \tfrac{2}{10} + \tfrac{5}{100} + \tfrac{c_3}{1000}, \qquad \text{где је } c_3 \in (0,10) \text{ непознат број.}$$

У ствари, решили смо задатак, односно $\sqrt[3]{2}$ на две децимале износи 1.25.

Иначе, на основу изложеног јасно је да настављањем сличног поступка можемо одредити трећу, четврту, пету, итд. децималу тог корена.

Напомена 41.1. Приметимо да изложени децималски поступак не зависи битно од једначине $x^3 = 2$, односно он се може пренети[21] и на случај ма које полиномске тј. алгебарске једначине $p(x) = 0$. Дајемо кратак опис у општем случају. Прво одређујемо (или нам је то већ задано) цео број c_0 тако да тражено решење x задовољава неједначину $c_0 \leq x < c_0 + 1$ и да $p(x)$ има различите знаке на крајевима интервала $[c_0, c_0 + 1]$. Без смањења општости, претпостављамо да $p(c_0) \leq 0$ и $p(c_0 + 1) > 0$.

Уколико $p(c_0) = 0$ поступак се завршава јер решење је већ нађено. У противном, слично као у горњем примеру, најпре уз помоћ те неједнакости x изразимо у облику $c_0 + c_1/10$, где $c_1 \in (0, 10)$ непознат број. Заменом тог x-израза у једначину $p(x) = 0$ из ње настаје нова једначина по c_1, рецимо у ознаци $L(c_1) = D$, где на левој страни се налазе чланови који садрже $c_1, c_1^2, \ldots$ али не и слободан члан који је пребачен на десну страну. И тада као у Раз 41 редом рачунамо $L(i)$ и $L(i + 1)$ за $i = 0, 1, 2, \ldots, 9$ и станемо на првом i за који важи $L(i+1) > D$. Тако смо у ствари одредили прву децималу и она износи i. Уколико се деси да $L(i) = D$, алгоритам стаје јер решење је нађено, оно је $c_0 + i/10$. У противном, имамо неједнакост $i < c_1 < i + 1$. Из ње имамо $c_1 = i + c_2/10$ где је $c_2 \in (0, 10)$ непознат број. Заменом c_1 у $L(c_1) = D$ из ње настаје нова једначина по c_2 из које на -као до сада- сличан начин тражимо c_2, односно другу децималу, итд. У општем случају алгоритам се зауставља ако добијена вредност за i управо јесте решење одговарајуће једначине $L(i) = D$.

[21] То је случај употребе идеје преноса (вид. Напомену 14.1)

Напомена 41.2. У тзв. *конструктивној математичкој анализи* сматра се да је неки реалан број a конструктиван уколико за сваки посебан $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ имамо алгоритам којим можемо израчунати његову n-ту децималу. Рецимо, у складу са поступком изложеним у Раз 41 видимо да $\sqrt[3]{2}$ је конструктиван број. Општије, то исто важи и за реална решења полиномских једначина. Занимљиво је да су и многе значајније математичке константе, као π, e такође конструктивни реални бројеви.

Раз 42. *Неједначина $x^3 < 9$ важи у "тачки" 2. Доказати да она важи и у некој њеној околини $(2-\epsilon, 2+\epsilon)$, где $\epsilon > 0$ известан реалан број. Наћи бар један такав ϵ.*

Решење. Јасно је да неједначина $x^3 < 9$ важи кад је x мање од 2, па је проблем наћи бар један $\epsilon > 0$ тако да она важи за све $x \in (2, 2+\epsilon)$. Расуђивање које ћемо употребити је један од примерака типичних за област Теорије реалних функција, Математичке анализе и за њих се слободније може рећи да теку "логички уназад". Наиме, кад уопште желимо да постигнемо да важи неки услов, формула p тада правимо "уназад-импликацијски ланац" $p \Leftarrow q \Leftarrow \ldots \Leftarrow r$ тако да завршни r одређује извесна решења за p. У разматраном задатку p је управо конјункција $h > 0,\ (2 + h)^3 < 9$. За њу имамо следећи уназад-импликацијски ланац:

$$h > 0,\ (2 + h)^3 < 9$$

$$\Leftarrow \quad h > 0,\ 8 + 12h + 6h^2 + h^3 < 9$$

$$\Leftarrow \quad h > 0,\ 8 + 12h + 6h + h < 9,\ h < 1$$

Да бисмо "побегли" од кубне неједначине по h за тај h смо поставили додатну претпоставку $h < 1$, благодарећи којој здруженој са $h > 0$ важе неједнакости $h^2 < h$, $h^3 < h$. На основу њих видимо да једно *горње ограничење (мајоранта)* израза $8 + 12h + 6h^2 + h^3$ је онда израз $8 + 12h + 6h + h$. И наравно, ако је мајоранта мања од 9, онда и сам израз је такав. Управо то је искоришћено у последњој "карици" ланца. Истичемо да је уопште такав корак расуђивања типичан у Теорији реалних функција, односно Математичкој анализи.

$$\Leftarrow \quad h > 0,\ 19h < 1,\ h < 1$$

$$\Leftarrow \quad 0 < h < 1/19$$

Уназад расуђивање је завршено и видимо да се за ϵ сме узети $1/19$. Наводимо још један начин. Најпре ћемо уочити разлику $(2 + h)^3 - 2^3$ и у случају $h > 0$ за њу потражити извесну мајоранту која је по p што простија; по могућству да има облик Kh ,где је $K > 0$ нека константа. Заиста:

$$(2+h)^3 - 2^3 = ((2+h)-2)((2+h)^2 + (2+h)2 + 2^2) \quad \text{(Разлика кубова)}$$
$$\leq h(3^2 + 3 * 2 + 2^2) \quad \text{(Уз претпоставку } h \leq 1)$$
$$\leq 19h$$

И тако, свакако важиће $(2+h)^3 < 9$, где $h > 0$ ако важи $2^3 + 19h < 9, h > 0, h \leq 1$, тј. важи $0 < h < 1/19$, па ϵ износи[23] $1/19$. Крај другог начина. Наравно и тај се начин може преизразити тако да тече као уназад-импликацијски ланац.

Напомена 42.1. Има много формула које имају слично својство као неједнакост $x^3 < 9$ у тачки 2. У складу са тим уводимо ову дефиницију:

(42.1) Нека је $\psi(x)$ нека формула по $x \in R$, која важи у извесној тачки a. Тада кажемо да та је формула *околинска* у тачки a уколико постоји околина $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, где ϵ известан позитиван број, тако да $\psi(x)$ важи за све $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Уколико додатно бар један такав ϵ је ефективно налазив онда кажемо да $\psi(x)$ у тачки a важи *конструктивно околински.*

Примера ради, у складу са наведеним доказом, неједнакост $x^3 < 9$ конструктивно околински важи у тачки 2. Крај Напомене 42.1.

Раз 43. *Доказати да је свака од наведених формула* конструктивно околинска *за сваки реалан број a (наравно, за онај за који и важи)*

$$1^0 \;\; x^3 < b, \quad 2^0 \;\; x^3 > b, \quad 3^0 \;\; x^n < b, \quad 4^0 \;\; x^n > b$$

(b дат реалан број док $n = 1, 2, 3, \ldots$)

Упутство. Рецимо, други начин из Раз 42 (тј. начин са идејом коришћења обрасца разлике степена) се свакако може и овде употребити.

Напомена 43.1. Нека је S скуп свих решења извесне формуле $\psi(x)$ која је околински тачна у сваком од тих решења. Значи, такав скуп S има ово својство: *са сваком својом тачком садржи и неку њену околину.* То својство се узима као одредница тзв. *отворених* скупова. Дакле, S је отворен скуп. Истичемо да су отворени скупови необично значајни у математици, и да једна њена област, тзв. *Топологија* поред осталог посебно проучава такве скупове.

Раз 44. (продужетак Раз 41.) *Претпоставимо да смо децималски поступак наставили "до бесконачности" и тако одредили све деци-*

[23] Истичемо да уопште није било неопходно да и овим начином добијемо исту вредност за ϵ

мале $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ броја $\sqrt[3]{2}$. Тачно речено, на такав начин смо одредили низ одсечака

$$[c_0, c_0+1], \quad [c_0 + \tfrac{c_1}{10}, c_0 + \tfrac{c_1+1}{10}], \quad \ldots \quad [c_0 + \tfrac{c_1}{10} + \ldots + \tfrac{c_n}{10^n}, c_0 + \tfrac{c_1}{10} + \ldots + \tfrac{c_n+1}{10^n}], \ \ldots$$

Доказати да је тим низом одређен тачно један реалан број чији куб је 2.

Доказ. За одсечке ћемо користити овакве краће ознаке $[r_n, r'_n]$. Њихов низ има ова два својства

1^0 То је низ *уметнутих* одсечака, тј. важе инклузије

$$[r_{n+1}, r'_{n+1}] \subseteq [r_n, r'_n] \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \ldots$$

2^0 Дужина $n-$тог одсечка износи $1/10^n$ и тежи 0 кад n тежи ∞.

На основу Cantor[24] -овог принципа уметнутих одсечака (вид. Напомену 44.1) закључујемо да постоји тачно један реалан број ϱ који припада сваком од одсечака, тј. који задовољава ову двоструку неједнакост

$$(*1) \qquad r_n \leq \varrho < r'_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Поред тога према њиховим дефиницијама r_n, r'_n задовољавају неједнакости

$$(*2) \qquad r_n^3 \leq 2 < r'^3_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Управо на основу $(*1)$ и $(*2)$ доказаћемо једнакост $\varrho^3 = 2$. Претпоставимо супротно. Тада наступа један од ових случајева

$$(i) \;\; \varrho^3 < 2, \qquad\qquad (ii) \;\; \varrho^3 > 2$$

Случај (i). Замисао нам је -слободније речено- да од ϱ "мало" одемо удесно, у неку тачку $\varrho + h$ тако да и у њој буде $(\varrho+h)^3 < 2$, али онда помишљамо "ту негде близу биће" неки r'_n, али за њега већ не би могла да важи слична неједнакост. У складу са том замисли најпре ћемо под претпоставком $0 < h < 1$ проценити разлику $(\varrho+h)^3 - \varrho^3$ и потражити јој по h линеарну мајоранту. Заиста, за $0 < h < 1$ најпре имамо:

$$(\varrho+h)^3 - \varrho^3 = h((\varrho+h)^2 + (\varrho+h)\varrho + \varrho^2)$$
$$< h((\varrho+1)^2 + (\varrho+1)\varrho + \varrho^2)$$

Сад нам је наум да се "ослободимо" ϱ

$$< h((1.3+1)^2 + (1.3+1) * 1.3 + 1.3^2)$$

јер из $(*2)$ за $n = 1$ добијамо $\varrho < 1.3$

$$< 10h$$

[24] (1845-1918), велики немачки математичар, оснивач Теорије скупова, односно теорије (по величини) разних бесконачности

И тако, за $0 < h < 1/10$ важи неједнакост $(\varrho + h)^3 < \varrho^3 + 10h$. Користећи ту процену израза $(\varrho + h)^3$ правимо овај уназад-импликацијски ланац:

$$(\varrho + h)^3 < 2 \quad \Leftarrow \quad \varrho^3 + 10h < 2 \quad \Leftarrow \quad 10h < 2 - \varrho^3 \quad \Leftarrow \quad 10h < 1$$

Последња "карика" важи јер према $(*1)$, за $n = 1$ имамо: $\varrho^3 > 1$. На такав начин доказали смо да ϵ заиста сме да буде $1/10$.
Према досадашњем расуђивању, важи неједнакост

$$(*3) \qquad (\varrho + h)^3 < 2 \qquad \text{кадгод } 0 < h < 1/10$$

Пошто $r_2 \le \varrho < r_2'$ и $r_2' - r_2 = 1/100 < 1/10$ то на основу $(*3)$ закључујемо неједнакост $r_2'^3 < 2$ што је противречно са $(*2)$ кад $n = 2$. Тако смо доказали да је немогуће да буде случај (i), тј. $\varrho^3 < 2$.

Случај (ii), тј. $\varrho^3 > 2$. Сада нам је замисао - слободније речено - да од ϱ "мало" одемо улево, у неку тачку $\varrho - h$ тако да и у њој буде $(\varrho - h)^3 > 2$, али с друге стране помишљамо "ту негде близу биће" неки r_n, а за њега већ не би могла да важи слична неједнакост. У складу са том замисли, најпре ћемо под претпоставком $0 < h < 1$ проценити разлику $\varrho^3 - (\varrho - h)^3$ и потражити јој по h линеарну мајоранту. Заиста:

$$\begin{aligned}\varrho^3 - (\varrho - h)^3 &= h(\varrho^2 + \varrho * (\varrho - h) + (\varrho - h)^2)\\ &< h * (\varrho^2 + \varrho * \varrho + \varrho * \varrho) \qquad \text{Јер } \varrho - h < \varrho\\ &< 12h \qquad \text{Јер } \varrho < c_0 + 1, \text{ тј. } \varrho < 2\end{aligned}$$

И тако смо доказали неједнакост $\varrho^3 - (\varrho - h)^3 < 12h$, односно $(\varrho - h)^3 > \varrho^3 - 12h$, па неједнакост$(\varrho - h)^3 > 2$ ће свакако бити испуњена уколико $\varrho^3 - 12h > 2$, односно

$$h < \tfrac{1}{12}(\varrho^3 - 2) \quad \text{и} \quad 0 < h < 1$$

где на десној страни прве неједнакости "стоји" одређен позитиван реалан број. И тако, према досадашњем расуђивању важи неједнакост

$$(*4) \quad (\varrho - h)^3 > 2 \quad \text{кадгод } 0 < h < \epsilon \quad \text{где} \quad \epsilon = \min(1, \tfrac{1}{12}(\varrho^3 - 2))$$

Сада

$(*5)$ Означимо са n_0 природан број за који важи неједнакост $\frac{1}{10^{n_0}} < \epsilon$

Са таквим n_0 имамо: $\varrho - r_{n_0} \le \frac{1}{10^{n_0}} < \epsilon$, односно $\varrho - \epsilon < r_{n_0}$ па за r_{n_0} мора да важи $r_{n_0}^3 > 2$ што се не слаже са $(*2)$ кад $n = n_0$. Крај доказа у другом случају.

Напомена 44.1. Укратко ћемо говорити о структури $\mathcal{R}$ реалних бројева за коју смо већ рекли да је комплетно уређено поље (вид. Напомену 12.1.) Прво ћемо

објаснити појам *поља*. Језик[25] таквог поља се састоји од знакова

$$+, \qquad *, \qquad -, \qquad 1/, \qquad 0, \qquad 1, \qquad =$$

где $+$, $*$ су бинарни операцијски знаци, $-$ и $1/$ су знаци унарних операција, 0, 1 знаци констаната, и $=$ знак једнакости. Аксиоме поља гласе:

$$\begin{array}{lll}(44.1) \quad (A_1) & x + y = y + x, & x * y = y * x\\ (A_2) & (x + y) + z = x + (y + z), & (x * y) * z = x * (y * z)\\ (A_3) & x + 0 = x, & x * 1 = x\\ (A_4) & x + (-x) = 0, & x \ne 0 \Rightarrow x * \frac{1}{x} = 1\\ (A_5) & \multicolumn{2}{c}{x * (y + z) = x * y + x * z}\\ (A_6) & 1 \ne 0 & \end{array}$$

Уз те аксиоме се уводе и ове дефиниције, у којима скраћеница **з.з.** стоји уместо речи : *замена за*

$$x - y \ \ \textbf{з.з.} \ \ x + (-y), \qquad \frac{y}{x} \ \ \textbf{з.з.} \ \ y * \frac{1}{x} \quad (\text{Ако } x \ne 0)$$

За једнакост[26] се претпостављају ове аксиоме

$$\begin{aligned}&x = x, \quad x = y \ \Rightarrow \ y = x; \quad x = y, \ y = z \ \Rightarrow \ x = z\\ &x = y \ \Rightarrow \ -x = -y; \quad x = y \ \Rightarrow \ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \quad (\text{Ако } x, \ y \ne 0)\\ &x = y, z = u \ \Rightarrow \ x + z = y + u; \quad x = y, z = u \ \Rightarrow \ x * z = y * u\end{aligned}$$

На основу аксиома поља (уз коришћење аксиома једнакости) доказују се све разноразне једнакости и идентитети који се уче у основној и средњој школи. Рецимо, у такве долазе: $(-x)(-y) = x * y$, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, и др. Даље разна 'правила' за разломке као $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac+bd}{bd}$. Али, пазите та - као и свака друга са разломцима- једнакост је *условна*, односно важи уколико су сви имениоци различити од 0. Међутим, у наведеном примеру довољно је претпоставити $bd \ne 0$, јер опет на основу аксиома поља[27] су доказиве ове две значајне еквиваленције

$$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \ \vee \ b = 0; \qquad ab \ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \ne 0 \wedge b \ne 0$$

И разна тврђења 'рачунице' као $2 + 2 = 4$, $5 * 2 = 10$, и др. се такође доказују из аксиома поља. Ту се иначе подразумевају дефиниције попут 2 **з.з.** $1 + 1$, 3 **з.з.** $2 + 1$, и сл. Рецимо, један доказ за $2 + 2 = 4$ гласи

[25] Некада се говорило 'основни појмови', али употребом појма 'језик' излагање добија на строгости и јасноћи
[26] Ретко у којој књизи ћете наћи аксиоме једнакости
[27] У даљем се слично краће изражавамо, односно употребу аксиома једнакости увек подразумевамо, али то посебно не наводимо

$$2+2 = 2+(1+1) \quad \text{(Дефиниција за 2)}$$
$$= (2+1)+1 \quad \text{(Коришћење асоцијативног закона за $+$, тј. првог у (A_2))}$$
$$= (3+1) \quad \text{(Јер 3 је замена за $2+1$)}$$
$$= 4 \quad \text{(Јер 4 је замена за $3+1$)}$$

Међутим, разна тврђења о бројевима која садрже појам *позитиван, већи* и сл. нису доказива из наведених аксиома поља. Тако, из аксиома поља је неизведиво $1 > 0$, јер ако би "поље умело да прича", могло би да каже : "Не разумем о чему причаш, јер појам > 0 није дефинисан на мом језику". Али, та и многе друге неједнакости су доказиве у *уређеном* пољу. То је поље чији језик има још релацијски знак > 0 ("позитиван") и у вези са њим ове две аксиоме

(U_1) $\qquad$ *или* $x > 0$ *или* $x = 0$ *или* $-x > 0$

(U_2) $\qquad$ $(x > 0,\ y > 0) \ \Rightarrow\ (x+y > 0,\ x*y > 0)$

Уз те аксиоме, за једнакост додајемо ову нову аксиому

$$x = y \ \Rightarrow\ (x > 0 \ \Leftrightarrow\ y > 0)$$

Даље релације "негативан", "већи" "мањи" уводимо овако

$$x < 0 \text{ з.з. } -x > 0, \quad x > y \text{ з.з. } x - y > 0, \quad x < y \text{ з.з. } y - x > 0$$

$$x \geq y \text{ з.з. } x > y \lor x = y, \quad x \leq y \text{ з.з } x < y \lor x = y$$

Помоћу аксиома уређеног поља можемо доказати многа тврђења о неједнакостима; рецимо разна 'конкретна'(тј. без променљивих), као $1 > 0,\ 2 > 0,\ -3 < 0,\ 1/2 > 0$ и др, али и разна са променљивим као $x^2 \geq 0$; $(x+y)^2 \geq 2xy$ итд. Рецимо, један доказ неједнакости $1 > 0$ гласи:

> По аксиоми (U_1) постоји тачно једна од ових могућности $1 > 0, 1 = 0, -1 > 0$. Друга могућност отпада јер аксиома (A_6) "каже" $1 \neq 0$. Да бисмо завршили доказ изводимо да и трећа могућност повлачи неку противречност. Заиста, по аксиоми (U_2) имамо: $-1 > 0, -1 > 0 \Rightarrow (-1)(-1) > 0$, тј. $1 > 0$, јер како већ рекосмо доказиво је $(-x)(-y) = xy$. Доказ је завршен јер по (U_1) не може бити и $-1 > 0$ и $1 > 0$.

Да су нам којим случајем у аксиоматској изградњи 'зграде бројева' довољни рационални бројеви, могли бисмо се зауставити на аксимама уређеног поља. Али, $\sqrt{2}$ "уме да прича" и каже: "А како ћеш без мене измерити дијагоналу квадрата странице 1" ? И управо проблем *мерења* нас тера да *употпуњујемо, комплетирамо* аксиоме уређеног поља. Истичемо да у том смислу постоје разни начини, који се састоје у додавању једне (две или више) тзв. *аксиома потпуности (комплетности).*

Најпре описујемо начин помоћу појма *најмањег горњег ограничења, супремума.* Наиме, нека је $\mathcal{F}$ неко уређено поље и S скуп неких његових чланова. Тада кажемо

> Скуп S је ограничен одозго уколико постоји један члан g поља $\mathcal{F}$ такав да за ма који члан $x \in S$ важи неједнакост $x \leq g$. За такав g се каже да је једно горње ограничење скупа S. Посебно може се догодити да међу свим горњим ограничењима постоји најмање, односно супремум скупа S.

Тада тзв. *супремум аксиома* гласи

(Sup) *Сваки непразан одозго ограничен скуп $S \subseteq F$ има супремум*

И тако стигосмо до једне аксиоматике комплетно уређеног поља. Подсећамо њој припадају аксиоме $(A_1)-(A_6)$, (U_1), (U_2) и најзад (Sup) аксиома. Зграда реалних бројева је сада саздана. Како смо у Напомени 12.1 рекли тај аксиоматски начин одређивања појма број потиче од Д. Хилберта.

На темељу тих аксиома се гради велика и лепа математичка 'зграда' : Теорија реалних функција, Математичка анализа у којој основну улогу имају појмови, као *конвергентан, лимес, непрекидност, диференцијабилност, интеграл, бесконачан ред,* итд.

Међу прве последице аксиома комплетно уређеног поља долази:

(Архимедова[28] аксиома) $\quad$ *Ако $x, y > 0$ онда постоји $n \in \{1,2,3,...\}$ такав да $nx > y$*

Занимљиво је да из те аксиоме извире могућност увођења децималског развоја, па елем и децималске методе[29]. Даље, у значајне последице аксиома комплетно уређеног поља долази следећа

($Cantor$–ов принцип уметнутих одсечака) $\quad$ *За сваки низ $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ \dots\ \supseteq I_n \dots$ међусобно уметнутих одсечака[30] постоји члан поља заједнички свим тим одсечцима. Уколико уз то дужина одсечка I_n тежи 0 кад n тежи ∞, тај заједнички члан је јединствен*

Истичемо да се тај принцип веома често користи кад нам се укаже потреба да направимо неки реалан број. Рецимо, такав је случај у децималској методи решавања једначина.

[28] Архимед(-287? до -212), највећи математичар и физичар старе Грчке
[29] Рецимо, и корак $(*5)$ у Раз 44 почива на тој аксиоми
[30] Подсећамо, *одсечак, сегмент* - у ознаци $[a, b]$ (са $a \leq b$) - је скуп свих x за које $a \leq x \leq b$

Међутим, занимљиво је такође да тај принцип здружен са Архимедовом аксиомом може да замени (Sup)-аксиому, односно као аксиоме комплетно уређеног поља могу се узети: $(A_1)-(A_6)$, (U_1), (U_2), Архимедова аксиома и $Cantor$-ов принцип уметнутих одсечака. Крај Напомене 44.1.

Раз 45. *Нека је f реална функција дефинисана у извесној околини $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ реалног броја a. Претпоставимо да важи*

(45.1) $\qquad |f(a+h)-f(a)| \le K|h| \qquad$ *кадгод* $\; |h| \le \epsilon$

где K је нека задана позитивна константа. Нека је даље C извесна задана константа. Тада:

> *Ако у "тачки" a важи $f(a) > C$ (или важи $f(a) < C$) постоји и може се одредити околина $(a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$ тако да за сваки x из те околине важи неједнакост $f(x) > C$, (односно[31] $f(x) < C$).*

Пред-доказ. Отворено признато, уопште не мора да буде лако разматрање многих питања Математичке анализе. У складу са тим често је подесно да се замишљају разне помоћне слике којим се трудимо да лакше "видимо" поставку питања и евентуално "добијемо" и замисао решавања. Тако, не треба избегавати употребу речи "тачка", јер нас то подсећа на коришћење бројевне праве. Друго, треба навикнути на то да се $|\cdot|$ може користити да се њиме изрази неко удаљење. Тачно речено, $|a-b|$ управо означава удаљење "тачака" a и b. У складу са тим (45.1) можемо и овако замишљати: за задани број $f(a)$ број $f(a+h)$ је од њега удаљен највише $K|h|$, тј. $f(a+h)$ се налази у распону од $f(a)-K|h|$ до $f(a)+K|h|$. Следствено, ако $f(a) > C$ онда за неки мали $|h|$ вероватно ће такође важити $f(a+h) > C$ за све $x \in (a-h, a+h)$. У ствари, сада имајући на уму ту слику и "виђење" правимо строг доказ.

Доказ. Нека $f(a) > C$. Тада из (45.1) добијамо $f(a+h)-f(a) > -K|h|$, односно $f(a+h) > f(a)-K|h|$, па ако за $|h|$ поставимо услов $K|h| < f(a)-C$ закључићемо $f(a+h) > C$. Сходно томе, за ϵ_0 узмимо $min(\epsilon, (f(a)-C)/K)$. Тада за све $x \in (a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$ мора важити $f(x) > C$. Крај доказа у случају $f(a) > C$.

Нека $f(a) < C$. Тада из (45.1) добијамо $f(a+h)-f(a) < K|h|$, односно $f(a+h) < f(a)+K|h|$, па ако за $|h|$ поставимо услов $K|h| < C-f(a)$ закључићемо $f(a+h) < C$. Сходно томе, за ϵ_0 узмимо $min(\epsilon, (C-f(a))/K)$. Тада за све $x \in (a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$ мора важити $f(x) < C$. Крај доказа и у случају $f(a) < 0.C$.

Посебно истакнимо добијене обрасце за ϵ_0:

[31] Другим речима, свака од неједнакости је околинска у духу (42.1)

(45.2) $\qquad \epsilon_0 = min(\epsilon, (f(a)-C)/K)$ уколико $f(a) > C$,
$\qquad\qquad \epsilon_0 = min(\epsilon, (C-f(a))/K)$ уколико $f(a) < C$

Напомена 45.1. Услов облика (45.1) је тзв. *Lipschitz*−ов услов. Додуше општи такав услов уместо израза $K|h|$ садржи израз $K|h|^\alpha$, где α (са $0 < \alpha \le 1$) је константа.

Напомена 45.2. На овом месту истакнимо да иоле озбиљније расуђивање о реалним бројевима често изискује рад са "погодбеним неједнакостима", попут: 'Да би важила извесна неједнакост довољно је да важи нека друга, и томе слично'. Следствено, треба се клонити од формалног, "површинског" рада и решавања разних задатака (о кореннима, логаритмима, лимесима, итд.)

Напомена 45.3. У пред-доказу Раз 45 смо за разматрање и решавање разних питања препоручили коришћење разних 'мисаоних слика'.Наравно, та препорука се не односи једино на рад са реалним бројевима. Истичемо да уопште таква способност грађења и плодног коришћења разних мисаоних слика је једна од основних особености човека и у томе је прва и главна разлика између њега и рачунара. Јер коначно -бар за сада- рачунари не умеју да 'мисле у свету неких слика'. У ствари, то је основни разлог што се област тзв. Вештачке интелигенције тако споро и тешко развија.

Раз 46. *Нека је реална функција f дефинисана са $f(x) = x^k$, где $k = 0, 1, \ldots$ је константа. Доказати да у сваком датом интервалу $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, где[32] $a-\epsilon \ge 0$ функција f задовољава услов вида* (45.1)

Доказ. Коришћењем обрасца за разлику k−тих степена за ма који $h \in (-\epsilon, \epsilon)$ непосредно имамо

$$|(a+h)^k - a^k| = |h| * |((a+h)^{k-1} + (a+h)^{k-2} * a + \ldots + (a+h) * a^{k-2} + a^{k-1})|$$

$$\le |h| * k * (a+\epsilon)^{k-1}$$ Јер a, $a+h$ су позитивни и $\le a+\epsilon$.

Стога за њихове степене имамо неједнакости
$0 < a^i$, $(a+h)^i \le (a+\epsilon)^i$, где $i = 2, 3, \ldots$.

Доказ је завршен јер за K можемо узети $k * (a+\epsilon)^{k-1}$.

Раз 47. *Нека $a > 0$ дат реалан број и $k \in N$ дат природан број. Доказати да x-једнаина $x^k = a$ има у скупу $\mathcal{R}$ јединствено позитивно решење.*

Доказ. Најпре ћемо доказати да једначина $x^k = a$ у скупу $\mathcal{R}$ има најмање једно

[32] У ствари та претпоставка није битна

позитивно решење. Употребићемо децималску методу описану у Напомени 41.1. Али, најпре морамо наћи "нулту" децималу c_0 тј. наћи цео број c_0 тако да важе неједнакости $c_0^k \leq a$, $(c_0+1)^k > a$. У ту сврху, x-у редом дајмо вредности $0, 1, 2, ...$ и станимо на оној вредности m за коју се догоди да важи неједнакост[33] $m^k > a$. Тада узимамо да $c_0 = m - 1$. Надаље децималском методом се одређује низ r_n, где $r_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + ... + \frac{c_n}{10^n}$, $c_1, ..., c_n \in \{0, 1, ... 9\}$ тако да важе ове неједнакости[34]

$$(*1) \qquad r_n^k \leq a < (r_n + \tfrac{1}{10^n})^k \qquad \text{где} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Сада уочимо низ одсечака $[r_n, r'_n]$ где $r'_n = r_n + \frac{1}{10^n}$. То је низ уметнутих одсечака, јер очигледно важе инклузије $[r_{n+1}, r'_{n+1}] \subseteq [r_n, r'_n]$, и уз то дужина $n-$тог од њих износи $\frac{1}{10^n}$ и тежи 0 кад n тежи бесконачности. Према $Cantor-$овом принципу уметнутих одсечака постоји реалан број ϱ такав да важи неједнакост

$$(*2) \qquad r_n \leq \varrho < r_n + \tfrac{1}{10^n} \qquad (n = 0, 1, ...)$$

Тврдимо да важи једнакост $\varrho^k = a$. Заиста у супротном случају важила би једна од неједнакости $\varrho^k > a$, односно $\varrho^k < a$. Међутим, као што ћемо видети свака од њих доводи до противречности.

Нека прво буде $\varrho^k > a$, тј $f(\varrho) > 0$. На основу Раз 46 и Раз 45 за све $x \in (\varrho - \epsilon_0, \varrho)$ важиће $x^k > a$. Нека n_0 природан број такав да $1/10^{n_0} < 2\epsilon_0$. Тада, r_{n_0} је један члан интервала $(\varrho - \epsilon_0, \varrho)$ па и за њега мора важити неједнакост $r_{n_0}^k > a$ што према $(*1)$ је немогуће. Сада, нека $\varrho^k < a$. На основу Раз 46 и Раз 45 за све $x \in (\varrho, \varrho + \epsilon_0)$ важиће $x^k < a$. Нека n_0 природан број такав да $1/10^{n_0} < 2\epsilon_0$. Тада, r'_{n_0} је један члан интервала $(\varrho, \varrho - \epsilon_0)$ па и за њега мора важити неједнакост ${r'_{n_0}}^k < a$ што према $(*1)$ је немогуће.

И тако је доказано да ϱ, које је иначе позитивно, заиста задовољава једнакост $\varrho^k = a$. Да бисмо доказали јединственост претпоставимо да и неки други реалан позитиван број ϱ_1 задовољава једнакост $\varrho_1^k = a$. Тада, ако $\varrho > \varrho_1$ на основу обрасца за разлику $k-$тих степена лако се закључује да $\varrho^k - \varrho_1^k > 0$ што доводи до немогуће неједнакости $a - a > 0$. Значи немогуће је да буде $\varrho > \varrho_1$. Слично се доказује немогућност и обратне неједнакости $\varrho_1 > \varrho$. Тиме се завршава целокупан доказ.

[33] Такав m мора да постоји, јер прво на основу Архимедове аксиоме за неки $t \in N$ важи $t * 1 > a$, а с друге стране важи неједнакост $t^k \geq t$, па за исти t свакако важи $t^k > a$. Речени m је онда најмањи t за који важи неједнакост $t^k > a$.

[34] Иначе, ако се за неки n деси $r_n^k = a$, тада узимамо $c_{n+1} = c_{n+2} = ... = 0$ па опет важи $(*1)$.

Напомена 47.1. У складу са тврђењем у Раз 47 са $\sqrt[k]{a}$ (речима: $k-$ти корен из a) означавамо јединствено позитивно $x-$решење једначине $x^k = a$. Рецимо, $\sqrt[7]{5}$ означава позитиван реалан број чији седми степен износи 5. У математици се -под одређеним условима- појам корена дефинише и за непозитивне реалне бројеве. Тако, најпре у складу са околношћу да је 0 јединствено решење једначине $x^k = 0$ (за $k = 2, 3, ...$) уводи се $\sqrt[k]{0}$ као 0. Међутим, у случају негативних бројева настају одређене тешкоће. Наиме,

> *Ако је k паран природан број, односно број облика $2m$ где $m = 1, 2, ...$ и ако је a негативан број, онда $x-$једначина $x^{2m} = a$ је немогућа у скупу R, јер ако x има ма коју вредност из R, онда ма који његов паран степен је позитиван или нула; дакле никад негативан. Из тог разлога у скупу R не можемо дефинисати паран корен из негативног броја. Истакли смо 'у скупу R', јер такво дефинисање је могуће, али у ширем скупу C комплексних бројева. Тако, рецимо, 'главни' комплексан број i уведен је као решење једначине $x^2 = -1$.*

Сличне тешкоће не искрсавају кад је k непаран природан број, односно број облика $2m - 1$, где $m = 1, 2, ...$ Наиме, ако је a задан негативан реалан број, онда једначина $x^{2m-1} = a$ има јединствено решење, додуше негативно што није битно. Заиста, та једначина након множења обе њене стране са -1 постаје $(-x)^{2m-1} = (-a)$ и због $-a > 0$ има по $-x$ јединствено позитивно решење рецимо у означи ϱ. Број $-\varrho$ је онда решење једначине $x^{2m-1} = a$ и уз то јединствено, што се лако види.
У складу са реченим уколико $a < 0$ уводи се $\sqrt[2m-1]{a}$ као решење једначине $x^{2m-1} = a$.

Напомена 47.2 (наставак претходне). У вези са степенима и коренима укратко истичемо неке важне чињенице

$$(47.1) \quad (i) \quad x > y \quad \Leftrightarrow \quad x^n > y^n \qquad (\text{Ако } x, y \geq 0, n = 1, 2, ...)$$

$$(ii) \quad x = y \quad \Leftrightarrow \quad x^n = y^n \qquad (\text{Ако } x, y \geq 0, n = 1, 2, ...)$$

$$(iii) \quad x > y \quad \Leftrightarrow \quad x^{2m-1} > y^{2m-1} \qquad (\text{где } m = 1, 2, ...)$$

$$(iv) \quad x = y \quad \Leftrightarrow \quad x^{2m-1} = y^{2m-1} \qquad (\text{где } m = 1, 2, ...)$$

$$(47.2) \quad (i) \quad y = \sqrt[2m]{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^{2m} = x, \ x \geq 0, \ y \geq 0 \qquad (\text{где } m = 1, 2, ...)$$

$$(ii) \quad y = \sqrt[2m-1]{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^{2m-1} = x \qquad (\text{где } m = 1, 2, ...)$$

Раз 48. *Доказати једнакост $\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ = \sqrt{ab}$ где a, b могу бити ма који ненегатвни бројеви.*

Доказ изводимо на два начина. Први начин је са идејом да се

(48.1) Увођењем нових ознака дата једначина "ослободи коренова"

Тако, најпре због $a, b \geq 0$ постоје $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ као и $\sqrt{ab}$, јер из $a, b \geq 0$ проистиче $ab \geq 0$. Даље, уведимо ове ознаке

$$A = \sqrt{a}, \quad B = \sqrt{b}, \quad C = \sqrt{ab}$$

Сходно томе преостаје да се докаже једнакост $AB = C$. Заиста имамо овај импликацијски ланац :

$A = \sqrt{a},\ B = \sqrt{b},\ C = \sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad A^2 = a,\ B^2 = b,\ C^2 = ab$

Сада нам је намера да из тих једнакости избацимо a, b, c како бисмо дошли до тражене везе између $A,\ B,\ C$

$\Rightarrow\ C^2 = A^2 * B^2,\ \ a$ и b из прве две једнакости смо заменили у трећу

$\Rightarrow\ C^2 = (AB)^2,$ јер $A^2 * B^2 = (AB)^2$

$\Rightarrow\ C = AB,$ на основу $(47.1)\ (ii)$

чиме се завршава доказ првим начином. У другом начину полазимо од претпоставке $a,\ b \geq 0$ и правимо еквиваленцијски ланац:

$\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ = \sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow\ \ (\sqrt{a}\ \sqrt{b})^2\ = (\sqrt{ab})^2$

На основу $(47.2)(i)$ јер по својој дефиницији квадратни корен неког ненегавивног броја је ненегативан, што даје ове неједнакости $\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \geq 0$ и $\sqrt{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow\ \ ab = ab$, јер $(\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2\ (\sqrt{b})^2 = ab$ и слично: $(\sqrt{ab})^2 = ab$

$\Leftrightarrow\ \ \top$ Крај доказа другим начином

Напомена 48.1. Приметимо да се тврђење у Раз 48 природно проширује на тврђење у коме уместо квадратног корена стоји ма који паран корен, али опет уз услов ненегативности за a, b. Кратко речено, ма који доказ поред дефиниције корена користи и одговарајућу 'степенску' једнакост: $(ab)^k = a^k b^k$.

Раз 49. *Неко је најпре доказао:*

$(*1)$ *За сваки реалан број x постоји тачно један реалан број y такав да важи једнакост $2x + 3y - 5 = 0$*

па је у складу са тим увео једну нову функцију ϕ овако:

$(*2) \qquad y = \phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y - 5 = 0$

Даље он тврди да та функција има ово својство: $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b) - \frac{5}{3}$, где a, b могу бити ма који реални бројеви.

Прво, да ли је он правилно поступио, тј. да ли стварно важи $(*1)$ и да ли у том случају смемо неку функцију ϕ дефинисати еквиваленцијом $(*2)$? Даље, да ли тако настала функција ϕ заиста има наведено својство ?

Напомена 49.1. Тај задатак није тежак али садржи неке важне опште мисли. Наиме, прво, кад год хоћемо да уведемо неку реалну функцију ϕ -дефинисану за сваки $x \in R$-, онда најпре морамо доказати нешто попут $(*1)$. Друго, након спроведеног доказа такве чињенице смемо извесном еквиваленцијом попут $(*2)$ увести ту функцију. Осећајући да је управо речено по мало расплинуто 'након логичког цеђења' дајемо следећу општу 'логичку причу':

Нека је $Uslov(x, y)$ нека формула, неки услов о реалним бројевима x, y. Тада ако важи

$(*3) \qquad (\forall x \in R)(\exists_1 y \in R)\ Uslov(x, y)$

Речима: За сваки $x \in R$ постоји јединствен[35] $y \in R$ такав да важи $Uslov(x, y)$

онда једну функцију изабраног имена, рецимо, ϕ смемо увести помоћу еквиваленције

$(*4) \qquad y = \phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad Uslov(x, y)$

Истичемо да је тако кратко описан један од најважнијих начина дефинисања функција; каже се заданих 'имплицитно[36]

Наводимо још један пример дефиниције вида $(*4)$. Тако, нека $Uslov(x, y)$ означава услов исказан овом формулом

$(*5) \qquad (x > 0\ \wedge\ y = x)\ \vee\ (x = 0\ \wedge\ y = 0)\ \vee\ (x < 0\ \wedge\ y = -x)$

Тада прво није тешко проверити да важи $(*3)$. Рецимо, ако x има вредност 3 тада се тај услов своди на $y = x$, тј. $y = 3$, док ако x има вредност -3 онда се услов своди на $y = -x$, што даје $y = -(-3)$, тј. $y = 3$. У ствари, ако x има ма коју вредност, онда према томе да ли је она *позитивна, нула, или*

[35] $\exists_1$ одговара речима: постоји јединствен

[36] Међутим, рецимо функција f уведена са $f(x) = x^2 + x - 25$ је пример функције задане обрасцем, односно каже се и задане 'експлицитно'

негативна услов $(*5)$ се своди на $x,\ 0,\ -x$. Другим речима том услову одговара добро позната функција $|\cdot|$. Еквиваленција вида $(*4)$ изгледа

$$y = |x| \quad \Leftrightarrow \quad (x > 0 \ \wedge \ y = x) \ \vee \ (x = 0 \ \wedge \ y = 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ y = -x)$$

Додајмо и следеће. Уколико уместо $(*3)$ имамо овакав општији услов

$(\forall x \in A)(\exists_1 y \in B) Uslov(x, y)$ где су $A,\ B$ неки подскупови скупа R

онда се еквиваленцијом вида $(*4)$, али сада $x \in A,\ y \in B$ исправно уводи једна функција која пресликава скуп A у скуп B. Приметимо да се такав случај јавио кад смо појам $k-$тог корена најпре увели за случај позитивних бројева. Значи, тада A је скуп свих позитивних реалних бројева, B -тако се десило- је скуп једнак истом A. Слично, такав случај се јавио при дефинисању функције $arcsin(x)$ (вид. Напомену 17.2)

Раз 50. *Дату формулу решити по* $x \in R$

$1^0 \quad \sqrt{x-2} = x - 4; \qquad 2^0 \quad \sqrt{x-2} > x - 4$

Решење. 1^0. *Први начин: импликацијски.* Полазимо од дате једначине, формуле и корак-за-кораком тражимо њене последице, све док не стигнемо до неке из које можемо наћи вредности непознатих. Ако тако дођемо до извесних вредности, онда даље треба сваку понаособ проверити да ли јесте или није решење и одабрати оне које заиста јесу решења. У датом задатку имамо:

$\sqrt{x-2} = x - 4$

$\Rightarrow \ (\sqrt{x-2})^2 = (x-4)^2$ Јер $a = b \ \Rightarrow \ a^2 = b^2$ - Аксиома једнакости (вид. Напомену 44.1)

$\Rightarrow \ x - 2 = (x-4)^2$ Према дефиницији корена важи уопште $(\sqrt{a})^2 = a$

$\Rightarrow \ x^2 - 9x + 18 = 0$

$\Rightarrow \ x = 3 \ \vee \ x = 6$

Решавањем претходне једначине стигли смо до два "кандидата" ("могућника") за решења. Провером се лако види да први отпада, а други остаје, па је 6 једино решење. *Други начин: еквиваленцијски.* То значи да полазећи од дате једначине, формуле корак-за-кораком правимо еквиваленцијски ланац све док не стигнемо до извесне формуле, једначине 'у решеном облику', тј. облику из кога непосредно 'читамо' решења. Одмах истичемо да ће сада основну улогу имати еквиваленција вида $(47.2)\ (i)$, коју у случају квадратног корена и посебно наводимо

$$(50.1) \quad y = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x, \ x \geq 0, \ y \geq 0$$

Један речени еквиваленцијски ланац гласи:

$\sqrt{x-2} = x - 4$

$\Leftrightarrow \ (x-2)^2 = x - 4, \ x - 2 \geq 0, \ x - 4 \geq 0$ Примена еквиваленције (50.1)

$\Leftrightarrow \ x^2 - 9x + 18 = 0, \ x \geq 4$ Јер $x - 4 \geq 0 \ \Rightarrow \ x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \ (x-3)(x-6) = 0, x \geq 4$ Јер $x^2 - 9x + 18 = (x-2)(x-3)$

$\Leftrightarrow \ (x - 3 = 0 \ \vee x - 6 = 0), x \geq 4$

$\Leftrightarrow \ (x - 3 = 0, x \geq 4) \ \vee \ (x - 6 = 0, x \geq 4)$

Обавили смо "логичко множење", тј. од формуле облика $p \wedge (q \vee r)$ прешли на формулу облика $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (вид. Напомену 18.1)

$\Leftrightarrow \ x = 6$ Јер "или-грана" $x - 3 = 0, x \geq 4$ је немогућа, а друга "грана" се своди на $x = 6$

И тако полазна једначина је еквивалентна са $x = 6$, па 6 је њено јединствено решење.

2^0. Најпре, а и у директној вези са $(47.1)\ (i)$, подвлачимо следећу еквиваленцију

$$(50.2) \quad \sqrt{A} > B \quad \Leftrightarrow \quad (A \geq 0 \wedge B < 0) \ \vee \ (A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A > B^2)$$

о којој подробније говоримо у Напомени 50.1. Користећи ту еквиваленцију имамо следећи еквиваленцијски ланац

$\sqrt{x-2} > x - 4$

$\Leftrightarrow \ x - 2 \geq 0, x - 4 < 0 \ \vee \ x - 2 \geq 0, x - 4 \geq 0, x - 2 > (x-4)^2$

$\Leftrightarrow \ 2 \leq x < 4 \ \vee \ x - 4 \geq 0, x - 2 > x^2 - 8x + 16$

Прву "или-грану" $x - 2 \geq 0, x - 4$ смо писали у облику $2 \leq x < 4$ који већ описује један део решења. Код друге гране део $x - 2 \geq 0$ смо склонили јер он следи из дела $x - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \ P \ \vee Q$

Гране смо редом означили са P и Q. Преостаје још да тражимо решења 'која су на грани' Q, па следствено правимо подланац са почетком Q

Тако имамо

$Q \ \Leftrightarrow \ x - 4 \geq 0, (x-3)(x-6) < 0$

Јер $x - 2 > x^2 - 8x + 16 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 9x + 18 < 0 \ \Leftrightarrow \ (x-3)(x-6) < 0$

$\Leftrightarrow \ x - 4 \geq 0, \ (x - 3 > 0, x - 6 < 0 \ \vee \ x - 3 < 0, x - 6 > 0)$

Користили смо еквиваленцију $ab < 0 \ \Leftrightarrow \ (a < 0, b > 0) \vee (a > 0, b < 0)$ о негативности производа два реална броја. Даље ћемо обавити "логичко множење" (вид. Напомену 18.1)

$\Leftrightarrow \ x - 4 \geq 0, x - 3 > 0, x - 6 < 0 \ \vee \ x - 4 \geq 0, x - 3 < 0, x - 6 > 0$

$\Leftrightarrow \ x - 4 \geq 0, x - 3 > 0, x - 6 < 0$

Јер друга "или-грана", тј. $x - 4 \geq 0, x - 3 < 0, x - 6 > 0$ је немогућа

$\Leftrightarrow \ 4 \leq x < 6$ Јер $x - 4 \geq 0$ повлачи $x - 3 > 0$

У ствари смо и грану Q довели на решен облик. Тако коначно имамо ову еквиваленцију

$$\sqrt{x-2} > x-4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le x < 4 \ \vee 4 \le x \ < 6$$

односно еквиваленцију

$$\sqrt{x-2} > x-4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le x < 6$$

јер $2 \le x < 4 \ \vee 4 \le x \ < 6$ је еквивалентно са $2 \le x < 6$. Тако тражени скуп свих решења је скуп свих реалних бројева од 2 до 6 укључно и број 2.

Напомена 50.1. У еквиваленцији (50.2) је осетљиво место како се из њене леве стране, тј. из неједнакости $\sqrt{A} > B$ може строго закључити да мора да важи $A \ge 0$? Наравно, то изгледа јасно, али се осећа да га треба логички објаснити. Један начин уз фино коришћење квантора $\exists$ гласи

$\sqrt{A} > B$

$\Rightarrow \quad (\exists X) \ X = \sqrt{A}$

Досетка је у томе да $\sqrt{A}$ некако укључимо у извесну једнакост да бисмо могли да употребимо $\Rightarrow$ –део еквиваленције (50.1). У ту сврху нам помаже уведени X, који је у ствари помоћна ознака за $\sqrt{A}$

$\Rightarrow \quad (\exists X) \ (X = \sqrt{A}, A \ge 0)$

Јер сада смемо користити $\Rightarrow$ – део од (50.1)

$\Rightarrow \quad A \ge 0$

И тако благодарећи добијеној последици једно извођење еквиваленције (50.2) гласи

$\sqrt{A} > B$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{A} > B, \ A \ge 0$

Јер уопште имамо логичку еквиваленцију $p \Leftrightarrow (p \wedge q)$ уколико важи импликација $p \Rightarrow q$, што иначе следи из ове таутологије $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow (p \wedge q))$, која поручује: *Ако је q последица из p, онда p вреди сам колико и заједно са последицом*

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{A} > B, \ A \ge 0, (B < 0 \vee B \ge 0)$

'Додали смо' део $(B < 0 \vee B \ge 0)$ јер намеравамо да разликујемо два $B-$случаја. А то разликовање ћемо постићи тако што ћемо сада обавити "логичко множење"

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{A} > B, \ A \ge 0, B < 0 \quad \vee \quad \sqrt{A} > B, \ A \ge 0, B \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad A \ge 0, B < 0 \quad \vee \quad A > B^2, \ A \ge 0, B \ge 0$

Јер неједнакости $A \ge 0, B < 0$ повлаче $\sqrt{A} > B$, будући да $\sqrt{}$ по дефиницији је ненегативан. Даље, користимо еквиваленцију (47.1) (i) у случају $n = 2$

Раз 51. *Доказати еквиваленцију*

$$(\exists x \ge 0) \ x^2 + 2px + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q \le 0 \ \vee \ (q > 0, \ p < 0, \ p^2 - q \ge 0)$$

где су p, q реални параметри, тј. задани реални бројеви[37]

Пред-решење. Ту еквиваленцију смо направили замишљајући график квадратне параболе $y = x^2 + 2px + q$ уз претпоставку да за $x \ge 0$ негде сече $x-$осу.

Решење. Правимо овај еквиваленцијски ланац

$(\exists x \ge 0) x^2 + 2px + q = 0$

Прво хоћемо да једначину видимо у облику $X^2 = P$, са неким изразима $X, \ P$, где P не садржи x. Разлог: имамо уведен појам квадратног корена

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \ge 0)(x+p)^2 = p^2 - q$

Сада одатле видимо последицу $p^2 - q \ge 0$. И њу ћемо придружити

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \ge 0)(x+p)^2 = p^2 - q, \ \ p^2 - q \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \ge 0)((x = -p + \sqrt{p^2 - q} \vee x = -p - \sqrt{p^2 - q}), \ \ p^2 - q \ge 0)$

$\Leftrightarrow \quad (-p + \sqrt{p^2 - q} \ge 0 \ \vee \ -p - \sqrt{p^2 - q} \ge 0), \ \ p^2 - q \ge 0)$

Јер за x имамо тачно две могуће вредности

$\Leftrightarrow \quad -p + \sqrt{p^2 - q} \ge 0, \ \ p^2 - q \ge 0$

Јер важи неједнакост $-p + \sqrt{p^2 - q} \ge \ -p - \sqrt{p^2 - q}$ што доводи до еквиваленције $-p + \sqrt{p^2 - q} \ge 0 \vee -p - \sqrt{p^2 - q} \ge 0 \Leftrightarrow -p + \sqrt{p^2 - q} \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{p^2 - q} \ge p, \ \ p^2 - q \ge 0$

Сада нам је намера да се ослободимо корена, тј. да квадрирамо обе стране. Али то смемо чинити -а да не покваримо еквиваленцијски ланац- тек уколико $p \ge 0$. Следствено правимо "раскрсницу" по p, односно придружујемо дисјункцију $p \ge 0 \ \vee \ p < 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{p^2 - q} \ge p, \ (p \ge 0 \ \vee \ p < 0), \quad p^2 - q \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{p^2 - q} \ge p, \ \ p \ge 0, \quad p^2 - q \ge 0 \quad \vee \quad \sqrt{p^2 - q} \ge p, \ \ p < 0, \quad p^2 - q \ge 0$

У првој грани ћемо се ослободити корена а другу свести на $p < 0, \ p^2 - q \ge 0$ јер тај део повлачи неједнакост $\sqrt{p^2 - q} \ge p$

$\Leftrightarrow \quad p^2 - q \ge p^2, \ \ p \ge 0, \ p^2 - q \ge 0 \quad \vee \quad p < 0, \ \ p^2 - q \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad q \le 0, \ p \ge 0, \ p^2 - q \ge 0 \quad \vee \quad p < 0, \ p^2 - q \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad q \le 0, \ p \ge 0 \quad \vee \quad p < 0, \ p^2 - q \ge 0$

Није тешко проверити (рецимо, разликовањем два случаја $q \le 0$ и $q > 0$) да је десна страна еквивалентна са :

$\Leftrightarrow \quad q \le 0 \quad \vee \quad (q > 0, \ p < 0, \ p^2 - q \ge 0)$

Раз 52. *Доказати еквиваленцију*

[37] Истини за вољу, скоро би се најбоље овако звали: 'непознате познате'

$(\forall x \in R)\ (x^2 + 2px + q = 0 \ \Rightarrow x \le r) \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - q \ge 0,\ p + r \ge 0,\ r^2 + 2pr + q \ge 0$

где су p, q, r реални параметри.

Раз 53. *Решити дату једначину по $x \in R$, у којој λ је реалан параметар*

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \lambda$$

Решење. Правимо еквиваленцијски ланац

$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \lambda$

Прво ћемо придружити све оне последице те једначине које произлазе из дефиниције квадратног корена (ненегатвност подкорене величине и ненегативност самог корена)

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \lambda, \\ 2x - 1 \ge 0,\ x + \sqrt{2x-1} \ge 0,\ x - \sqrt{2x-1} \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

Услед присуства наведених последица смемо квадрирати обе стране једначине, што ћемо и учинити. Поред тога мало ћемо средити добијене последице. Тако, $2x - 1 \ge 0$ с једне стране повлачи $x + \sqrt{2x-1} \ge 0$. С друге стране помоћу $2x - 1 \ge 0$ видимо да $x - \sqrt{2x-1} \ge 0$ је еквивалентно са $x^2 \ge 2x - 1$, тј. са $(x-1)^2 \ge 0$, односно еквивалентно са $\top$

$$\Leftrightarrow \quad x + \sqrt{2x-1} + x - \sqrt{2x-1} \\ +2\sqrt{x + \sqrt{2x-1}}\sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \lambda^2,\ 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

Сада ћемо користити условну једнакост облика
$\sqrt{A} * \sqrt{B} = \sqrt{AB}$, уколико $A,\ B \ge 0$.

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 2\sqrt{(x + \sqrt{2x-1}) * (x - \sqrt{2x-1})} = \lambda^2,\ 2x-1 \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \lambda^2,\ 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

Сада ћемо користити једнакост облика $\sqrt{A^2} = |A|$. Такође скраћујемо са 2

$$\Leftrightarrow \quad x + |x-1| = \lambda^2/2, \quad 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

Да бисмо се ослободили модула придружујемо дисјункцију $x - 1 > 0 \lor x - 1 \le 0$,што ће нам омогућити да разликујемо случајеве $x - 1 > 0$, $x - 1 \le 0$. Тако имамо

$$\Leftrightarrow \quad x + |x-1| = \lambda^2/2,\ (x - 1 > 0 \lor x - 1 \le 0),\quad 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

Сада "логички множимо" (вид. Напомену 18.1)

$$\Leftrightarrow \quad x + |x-1| = \lambda^2/2,\ x - 1 > 0, \quad 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0 \\ \lor \ x + |x-1| = \lambda^2/2,\ x - 1 \le 0, \quad 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

Сада користимо дефиницију модула и ослобађамо га се

$$\Leftrightarrow \quad x + x - 1 = \lambda^2/2,\ x - 1 > 0, \quad 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0 \\ \lor \ x + 1 - x = \lambda^2/2,\ x - 1 \le 0,\ 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

У првој грани део $x - 1 > 0$ повлачи део $2x - 1 \ge 0$ па овај други изостављамо. Даље из прве једначине тражимо x и онда у складу са законом замене за једнакост (13.2) нађену вредност уместо x замењујемо у остале саставке прве гране. После малог сређивања добијемо

$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{2+\lambda^2}{4},\ \ \tfrac{2+\lambda^2}{4} > 1,\ \lambda \ge 0 \\ \lor \ 1 = \lambda^2/2,\ x - 1 \le 0,\ \ 2x - 1 \ge 0,\ \lambda \ge 0$$

У првој грани конјункција $\frac{2+\lambda^2}{4} > 1,\ \lambda \ge 0$ је еквивалентна са $\lambda > \sqrt{2}$, а у другој грани конјункција $1 = \lambda^2/2,\ \ \lambda \ge 0$ је еквивалентна са $\lambda = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda > \sqrt{2},\ \ x = \tfrac{2+\lambda^2}{4} \\ \lor \ \lambda = \sqrt{2},\ \tfrac{1}{2} \le x \le 1$$

Тако смо стигли до решеног облика вида (30.1)

Закључак: ако $\lambda > \sqrt{2}$ дата једначина има јединствено решење $\frac{2+\lambda^2}{4}$; даље, ако $\lambda = \sqrt{2}$ онда сваки број (укључно) између 1/2 и 1 је решење. Коначно, ако $\lambda < \sqrt{2}$ тада се десна страна решеног облика своди на $\perp$, што значи да је дата једначина немогућа.

Раз 54. *Решити дате једначине по $x \in R$ у којима a, b су реални параметри*

$1^0\ \sqrt{x+5} + \sqrt{x+1} = a$, $2^0\ 2x + ax + \sqrt{x} = 0$, $3^0\ \sqrt{x+a} = \sqrt{x} + \sqrt{a}$

$4^0\ \sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{b}$, $5^0 \sqrt{x^2 - a} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$, $6^0\ x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$

$7^0\ x^2 - \sqrt{a - x} = a$, $8^0\ \sqrt{x^2 + 2ax - a^2} - \sqrt{x^2 - 2ax - a^2} = 1$

Раз 55. *Решити по $x \in R$ једначину* $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$

Решење. Намерно нећемо решавати идејом квадрирања, кубирања и сл. већ ћемо изложити један веома општи поступак. Правимо еквиваленцијски ланац

$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists y \in R)(\exists z \in R)\ (y = \sqrt[3]{2-x},\ z = \sqrt{x-1},\ y = 1 - z)$$

У првом кораку смо за сваки од коренова увели по једну нову, помоћну промењиву. Сада користимо дефиницију корена

$\Leftrightarrow \quad (\exists y \in R)(\exists z \in R)\ (y^3 = 2 - x,\ z^2 = x - 1, x - 1 \geq 0,$
$\underline{z \geq 0},\ y = 1 - z)$

У вези са квадратним смо додали и одговарајуће неједнакости. Додуше, $x - 1 \geq 0$ смемо да изоставимо јер следи из $x - 1 = z^2$. Као што се види стигли смо до једног задатка елиминације, о којима смо на одређен начин говорили у Раз 27, Раз 35 и Раз 36. Управо користимо идеје упознате тамо. Ланац се продужује

$\Leftrightarrow \quad (\exists y \in R)(\exists z \in R)\ ((1 - z)^3 = 2 - x,\ z^2 = x - 1, x - 1 \geq 0,$
$z \geq 0, y = 1 - z)$

Користећи једнакост $y = 1 - z$ смо y избацили из осталих формула, односно из прве једначине. Ту се користи закон замене за једнакост (13.2). На тај начин y је остало само у једначини $y = 1 - z$. С тим у складу питање његовог постојања је сведено на питање постојања z. Следствено у претходној формули изостављамо ту једначину, као и део $(\exists y \in R)$ на почетку формуле. Тако имамо

? $\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ ((1 - z)^3 = 2 - x,\ z^2 = x - 1, x - 1 \geq 0,\ z \geq 0)$

Сада ћемо из прве две једначине избацивати z

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (z^3 - 3z^2 + 3z - x + 1 = 0,\ z^2 - x + 1 = 0, x - 1 \geq 0,\ z \geq 0)$

? $\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (-3z^2 + z(x + 2) - x + 1 = 0,\ z^2 - x + 1 = 0,$
$x - 1 \geq 0,\ z \geq 0)$

Помножили смо другу са $-z$ и додали првој. Сада ћемо другу помножити са 3 и додати првој

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (z(x + 2) - 4(x - 1) = 0,\ z^2 = x - 1, x - 1 \geq 0,\ z \geq 0)$

У намери да избацимо z у првој једначини ћемо разликовати случајеве $x + 2 = 0$, $x + 2 \neq 0$. У ту сврху придружујемо дисјункцију $x + 2 = 0 \ \vee \ x + 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (z(x + 2) - 4(x - 1) = 0,\ (x + 2 = 0 \ \vee \ x + 2 \neq 0),$
$z^2 = x - 1, x - 1 \geq 0,\ z \geq 0)$

"Логички множимо"

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)$
$[(z(x + 2) - 4(x - 1) = 0,\ x + 2 = 0,\ z^2 = x - 1,\ x - 1 \geq 0;\ z \geq 0$
$\vee\ z(x+2) - 4(x-1) = 0,\ x+2 \neq 0,\ z^2 = x-1, x-1 \geq 0,\ z \geq 0]$

Добијена формула је облика $(\exists z \in R)(A \ \vee \ B)$. Користимо ово опште својство квантора 'постоји' (вид. Напомену 17.1)

(55.1) $\qquad (\exists x)(\phi \vee \psi) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)\phi \quad \vee \quad (\exists x)\psi$

где су ϕ, ψ ма које формуле а x ма која променљива.

Применом такве логичке еквиваленције ланац се овако наставља

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (z(x + 2) - 4(x - 1) = 0,\ x + 2 = 0,\ z^2 = x - 1, x - 1 \geq 0,\ z \geq 0)$
$\vee\ (\exists z \in R)\ (z(x+2) - 4(x - 1) = 0,\ x + 2 \neq 0,\ z^2 = x - 1, x - 1 \geq 0,\ z \geq 0)$

Прва грана је немогућа јер поред $x + 2 = 0$ се појави и једначина $x - 1 = 0$. Тако, даље настављамо са другом граном

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (z(x + 2) - 4(x - 1) = 0,\ x + 2 \neq 0,\ z^2 = x - 1, x - 1 \geq 0,\ z \geq 0)$

Сада ћемо z наћи из прве и онда из осталих избацити z. Тако имамо

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (z = \frac{4(x-1)}{x+2},\ x + 2 \neq 0,\ \frac{16(x-1)^2}{(x+2)^2} = x - 1,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0)$

Сада се види да је благодарећи неједнакости $x + 2 \neq 0$ и једнакости која садржи z питање постојања z сведено на питање постојања x. Стога избацујемо речену $z-$једнакост, а такође не пишемо квантор $(\exists z \in R)$. Тако имамо

$\Leftrightarrow \quad x + 2 \neq 0,\ \frac{16(x-1)^2}{(x+2)^2} = x - 1,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0$

Као што видите помоћне променљиве смо успели да елиминишемо и као резултат смо добили да је полазна ирационална једначина еквивалентна добијеној формули која садржи само x

$\Leftrightarrow \quad 16(x - 1)^2 = (x + 2)^2(x - 1),\ x + 2 \neq 0,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0$

Намера нам је да из једначине нађемо x. Због тога вршимо растављање у производ

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(16(x-1) - (x+2)^2) = 0,\ x+2 \neq 0,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x - 2)(x - 10) = 0,\ x + 2 \neq 0,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x = 1 \vee x = 2 \vee x = 10),\ x + 2 \neq 0,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0$

Сада "логички множимо"

$\Leftrightarrow \quad (x = 1,\ x + 2 \neq 0,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0)$
$\vee\ (x = 2,\ x + 2 \neq 0,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0)$
$\vee\ (x = 10,\ x + 2 \neq 0,\ x - 1 \geq 0,\ \frac{4(x-1)}{x+2} \geq 0)$

Имамо три гране. У свакој на почетку стоји по једна једнакост која одређује x. Те једнакости преписујемо и за сваку грану посебно користимо закон замене за једнакост (13.2). Тако имамо

$$\Leftrightarrow \quad (x=1,\ 1+2\neq 0,\ 1-1\geq 0,\ \tfrac{4(1-1)}{1+2}\geq 0)$$
$$\vee\,(x=2,\ 2+2\neq 0,\ 2-1\geq 0,\ \tfrac{4(2-1)}{2+2}\geq 0)$$
$$\vee\,(x=10,\ 10+2\neq 0,\ 10-1\geq 0,\ \tfrac{4(10-1)}{10+2}\geq 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad x=1\ \vee\ x=2\ \vee x=10$$

Решавање је завршено. Решења су управо бројеви 1, 2, и 10.

Напомена 55.1. Тај пример указује на неке опште чињенице и идеје. Наиме, нека је Ir извесна ирационална једначина по $x \in R$ која садржи разне корене, рецимо квадратни, пети, седми, стоти, итд. али поред таквих знакова садржи још само знаке четири основне рачунске операције. Дакле, не садржи неки 'логаритам, синус' и слично, али може да садржи неке квадрате, кубове и др. Добро је знано да се за такве једначине поставља питање рационалисања. Изложени пример наводи на, кратко описано, овакав општи поступак

> У једначини Ir уочимо прво један од "најдубљих" коренова, тј. коренова који у себи не садрже неки други корен. Нека је то корен $\sqrt[k]{izraz}$ где $k=2,\ 3,\ldots$, а $izraz$ је неки рационалан израз који садржи x. Даље, за тај корен уводимо једну нову, помоћну променљиву v. У Ir са v заменимо уочени корен. Нека тако од Ir настаје Ir_1. Тада имамо овај кратак еквиваленцијски ланац
>
> $Ir \quad \Leftrightarrow \quad (\exists v \in R)(v=\sqrt[k]{izraz},\ Ir_1)$
>
> У идућем кораку, користећи се дефиницијом $k-$тог корена, ослобађамо се $\sqrt[k]{izraz}$
>
> $\Leftrightarrow \quad (\exists v \in R)(v^k = izraz,\ Dod,\ Ir_1)$
>
> где Dod је "празан" (тј. нема га) ако је k непаран број, а у противном случају то је неједначина $v \geq 0$

На такав начин смо од полазне једначине Ir прешли на формулу у којој се налази један корен мање и у којој део Ir_1 је једначина коју даље на сличан начин треба "ослобађати" преосталих коренова.

Такав поступак се даље наставља и уколико полазна једначина Ir има управо m коренова после m корака уз увођење m нових променљивих на крају ланца ћемо имати неку формулу облика

$$(\exists v_1 \in R)\ \ldots\ (\exists v_m \in R)$$
$$(v_1^{k_1} = izraz_1,\ Dod_1,\ \ldots\ ,\ v_m^{k_m} = izraz_m,\ Dod_m,\ Ir_m(v_1,\ldots,v_m,x))$$

Као што се види добијена формула више не садржи ниједан корен, али "цех смо платили" увођењем m нових променљивих са одговарајућим

једначинама и неједначинама. Постављени задатак рационалисања једначине Ir на такав начин се своди на задатак елиминисања променљивих $v_1,\ \ldots,\ v_m$ из добијене формуле. Одмах истакнимо да се на основу резултата Тарског (вид. Напомену 38.1) такав задатак може решити и то 'аутоматизовано', тј. помоћу одређеног алгоритма. Подсетимо да смо у Раз 27, Раз 35 и Раз 36 у ствари упознали извесне основне делове општег алгоритма. Поменимо још да кад се на крају нађе елиминанта онда она има изглед извесне дисјункције

$$Sl_1 \ \vee\ Sl_2\ \vee\ \ldots\ \vee\ Sl_r$$

чији саставци Sl_i од променљивих садрже само x. Вероватно сте већ увидели зашто се добија дисјункција. Разлог је што алгоритам има делове који "су задужени" за разликовање разних случајева.

Раз 56 -продужетак Напомене 55.1. *Неко је често имао потребу да по $x \in R$ решава једначину $x^3+x=a$, где a је ма који реалан број. Установио је да за сваки $a \in R$ постоји тачно једно x, решење те једначине. То га је побудило да уведе $kor(a)$ ('корен из a') овом еквиваленцијом*

$$(*1) \qquad x = kor(a) \quad \Leftrightarrow \quad x^3+x=a$$

С тим у вези од нас тражи да рационалимо једначину

$$(*2) \qquad kor(x)+kor(x+2)=1$$

и по могућству решимо.

Решење. Користећи дефиницију $(*1)$ имамо овај еквиваленцијски ланац

$kor(x)+kor(x+2)=1$

$\Leftrightarrow \quad (\exists y \in R)(\exists z \in R)(y=kor(x),\ z=kor(x+2),\ y+z=1)$

Увели смо две нове променљиве -може се рећи и имена, ознаке - за два "корена" учествујућа у датој једначини. Намера нам је да се услугом еквиваленције $(*1)$ ослободимо тих "корена"

$\Leftrightarrow \quad (\exists y \in R)(\exists z \in R)(y^3+y=x,\ z^3+z=x+2,\ y+z=1)$

Сада нас чека посао елиминације y и z. У ту сврху трећу једначину пишемо у облику $y=1-z$ и помоћу ње из преосталих избацујемо y

$\Leftrightarrow \quad (\exists y \in R)(\exists z \in R)(y=1-z,\ (1-z)^3+(1-z)=x,\ z^3+z=x+2)$

Пошто је y дефинисано преко z, то је његово постојање везано за постојање z. Следствено више нећемо писати квантор $(\exists y \in R)$, као ни једначину $y=1-z$

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)((1-z)^3 + (1-z) = x,\ z^3 + z = x + 2)$

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)(z^3 - 3z^2 + 4z - 2 + x = 0,\ z^3 + z - 2 - x = 0)$

Другу једначину преписујемо, множимо са -1 и додајемо првој

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)(z^3 + z - 2 - x = 0,\ -3z^2 + 3z + 2x = 0)$

Другу преписујемо, множимо са $\frac{1}{3}z$ и додајемо првој

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)(-3z^2 + 3z + 2x = 0,\ 3z^2 + (2x+3)z - 3x - 6 = 0)$

Другу преписујемо, множимо са 1 и производ додајемо првој

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)(3z^2 + (2x+3)z - 3x - 6 = 0,\ (2x+6)z - x - 6 = 0)$

Сада бисмо желели да из друге нађемо z. Али чека нас "раскрсница", тј. разликовање случајева $2x + 6 = 0$, односно $2x + 6 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (3z^2 + (2x+3)z - 3x - 6 = 0,$
$\quad (2x+6)z - x - 6 = 0,\ (2x + 6 = 0 \lor 2x + 6 \neq 0)$

Настаје "логичко множење"

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)$
$\quad ((3z^2 + (2x+3)z - 3x - 6 = 0,\ (2x+6)z - x - 6 = 0,\ 2x + 6 = 0)$
$\quad \lor \ (3z^2 + (2x+3)z - 3x - 6 = 0,\ (2x+6)z - x - 6 = 0,\ 2x + 6 \neq 0))$

У овом кораку ћемо применом закона (55.1) квантор $(\exists z \in R)$ ставити уз сваку грану

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (3z^2 + (2x+3)z - 3x - 6 = 0,\ (2x+6)z - x - 6 = 0,\ 2x + 6 = 0)$
$\quad \lor \ (\exists z \in R)\ (3z^2 + (2x+3)z - 3x - 6 = 0,$
$\quad (2x+6)z - x - 6 = 0,\ 2x + 6 \neq 0)$

Прва грана је немогућа јер уз једначину $2x + 6 = 0$ се појављује и једначина $x + 6 = 0$. Та грана је значи еквивалентна са $\perp$, па је 'крешемо'

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)\ (3z^2 + (2x+3)z - 3x - 6 = 0,\ (2x+6)z - x - 6 = 0,\ 2x + 6 \neq 0)$

Сада ћемо из друге једначине наћи z и заменити га у прву. После сређивања се добије

$\Leftrightarrow \quad (\exists z \in R)(z = \frac{x+6}{2x+6},\ 8x^3 + 51x^2 + 90x = 0,\ 2x + 6 \neq 0)$

z је дефинисано помоћу x, а у осталим саставцима гране не учествује. Следствено његово постојање је везано за постојање x. Стога даље не пишемо квантор $(\exists z \in R)$, као ни једначину- одредницу тог z

$\Leftrightarrow \quad 8x^3 + 51x^2 + 90x = 0,\ 2x + 6 \neq 0$

Полином добијене једначине је дељив са x

$\Leftrightarrow \quad x(8x^2 + 51x + 90) = 0,\ 2x + 6 \neq 0$

Тако смо коначно стигли до тражене елиминанте, односно рационалисали смо дату једначину $(*2)$

Добијена кубна једначина има три решења: једно је 0, а остала два су комплексни бројеви. Закључујемо да је 0 јединствено решење дате једначине $(*2)$ (у скупу R).

Раз 57.(Fourier-Motzkin *метод решавања система линеарних неједначина) Користећи се овим еквиваленцијама о неједнакостима за реалне бројеве*

$$\begin{array}{llcl} (i) & x < a, x < b & \Leftrightarrow & x < min(a,b) \\ (ii) & x > a, x > b & \Leftrightarrow & x > max(a,b) \\ (iii) & a < x, x < b & \Leftrightarrow & a < b,\ x \in (a,b) \end{array}$$

решити задане системе линеарних неједначина

По $x \in R$

$1^0 \ x < 3, x < 5, x < 0, \quad 2^0 \ x \geq 2, x \geq 4, x \geq 1, \quad 3^0 \ 2 < x, 3 < x, x < 6, x < 8$

По $x, y \in R$

$4^0 \ x + y < 1,\ 5^0 x + y < 3,\ x - y > 4$

$6^0 \ x + y < 3,\ 2x - y > 1, x - y < 4, x - 3y > 2$

По $x, y, z \in R$

$7^0 \ x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1$

Пред-решење. Напоменимо да попут (i) важе сличне еквиваленције у којима се појављује више основних неједнакости $x < a, x < b, x < c, \ldots$. Тако имамо: $x < a, x < b, x < c \Leftrightarrow x < min(a,b,c)$ и сл. Такође истакнимо да у (i) а у и у свим осталим ширим еквиваленцијама знак $<$ сме бити замењен знаком $\leq$. Тако, $x \leq a, x \leq b \Leftrightarrow x \leq min(a,b)$.

Све речено у вези са (i) се преноси и на (ii). Тако, рецимо, имамо:

$$x > a, x > b, x > c \Leftrightarrow x > max(a,b,c)$$

$$x \geq a, x \geq b \Leftrightarrow x \geq max(a,b)$$

Природа еквиваленције (iii) је другчија. У примени на решавање система неједначина она се користи овако:

> Систем $a < x, x < b$ је могућ по $x \in R$ ако и само ако важи услов $a < b$, где су a, b ма који изрази који не садрже x. Кад је тај услов испуњен онда сва x-решења су одређена са $x \in (a,b)$, тј. x сме бити ма који реалан број између a и b. Уместо, $x \in (a,b)$ писаћемо и $a < x < b$.

Поред еквиваленција (i), (ii), (iii) користићемо овакве $x + a < b \Leftrightarrow x < b - a$, $px + q < r \Leftrightarrow x < (r-q)/p$ где $p > 0$ и сл.

У образложењу ћемо тада обично кратко рећи: "Решењем по x" и сл.

Уз све речено указујемо на то да се такође користи и ова општа еквиваленција

(57.1) $max(a_1, ..., a_m) < min(b_1, ..., b_n)$
$\Leftrightarrow$ Сваки од a_i-ова је мањи од сваког од b_j-ова.

где су $a_1, ..., a_m$, $b_1, ..., b_n$ ма који реални бројеви. Приметимо да ако се у (57.1) знак $<$ замени знаком $\leq$, такође се добије тачна еквиваленција.

Решење. 1^0 Имамо овај еквиваленцијски ланац, на основу (i) [38]

$x < 3, x < 5, x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < min(3,5,0) \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$

Значи, решења су управо сви негативни бројеви.

2^0 Имамо еквиваленцијски ланац

$x \geq 2, x \geq 4, x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq max(2,4,1) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4$

Решења су управо сви бројеви већи или једнаки 4.

3^0 Имамо еквиваленцијски ланац

$2 < x, 3 < x, x < 6, x < 8$

$\Leftrightarrow \quad max(2,3) < x, x < min(6,8)$

$\Leftrightarrow \quad 3 < x, x < 6$

$\Leftrightarrow \quad 3 < x < 6$ По (iii) јер важи $3 < 6$.

Скуп свих решења је интервал $(3,6)$.

4^0 Решавањем дате неједначине по x добијемо еквиваленцију

$x + y < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 - y$

Стигли смо до решеног облика. Решења се могу овако описати:

y може бити произвољно, док онда x је ма који број мањи од $1 - y$

5^0 Имамо еквиваленцијски ланац

$x + y < 3, \ x - y > 4$

$\Leftrightarrow \quad x < 3 - y, \ x > 4 + y$

Прву смо решили по x, а другу такође по x. Сада је прилика за еквиваленцију (iii). Тако имамо

$\Leftrightarrow \quad 4 + y < 3 - y, 4 + y < x < 3 - y$

Тако смо у ствари решили x до на y, за које смо добили услов $4+y < 3-y$, одакле ћемо одређивати y. Малим сређивањем те неједначине даље имамо

$\Leftrightarrow \quad y < -\frac{1}{2}, \ \ 4 + y < x < 3 - y$

[38] У ствари се користи њено проширење, али упркос томе и даље у наставку ћемо се тако изражавати

Стигли смо до решеног облика: y сме да буде ма који број мањи од -1/2, а онда њему одговарајући x сме бити ма који број између $4 + y$ и $3 - y$

6^0 Имамо еквиваленцијски ланац

$x + y < 3, \ 2x - y > 1, x - y < 4, x - 3y > 2$

Све неједначине ћемо решити по x. Значи, наум нам је да x одредимо помоћу y

$\Leftrightarrow \quad x < 3 - y, x < 4 + y, x > \frac{1}{2}(y+1), x > 3y + 2$

Сада ћемо користити (i)

$\Leftrightarrow \quad x < min(3 - y, 4 + y), \ x > max(\frac{1}{2}(y+1), 3y + 2)$

Сада ћемо користити (iii)

$\Leftrightarrow \quad max(\frac{1}{2}(y+1), 3y+2) < min(3-y, 4+y),$
$max(\frac{1}{2}(y+1), 3y+2) < x < min(3-y, 4+y)$

Сада се користи еквиваленција (57.1)

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(y+1) < 3-y, \ \frac{1}{2}(y+1) < 4+y, \ 3y+2 < 3-y, \ 3y+2 < 4+y,$
$max(\frac{1}{2}(y+1), 3y+2) < x < min(3-y, 4+y)$

Сада сређујемо y-неједначине

$\Leftrightarrow \quad y < \frac{5}{3}, \ y > -7, \ y < \frac{1}{4}, \ y < 1,$
$max(\frac{1}{2}(y+1), 3y+2) < x < min(3-y, 4+y)$

$\Leftrightarrow \quad -7 < y, y < min(\frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \ 1),$
$max(\frac{1}{2}(y+1), 3y+2) < x < min(3-y, 4+y)$

$\Leftrightarrow \quad -7 < y, \ y < \frac{1}{4}, \quad max(\frac{1}{2}(y+1), 3y+2) < x < min(3-y, 4+y)$

$\Leftrightarrow \quad -7 < y < \frac{1}{4}, \quad max(\frac{1}{2}(y+1), 3y+2) < x < min(3-y, 4+y)$

Стигли смо до решеног облика: y сме да буде ма који број између -7 и 1/4 док одговарајући x је онда ма који број у наведеним границама $max(\frac{1}{2}(y+1), 3y+2), \ min(3-y, 4+y))$

7^0 При решавању можемо се определити жељеном редоследу тражења непознатих (слично као код Гаусове методе решавања система линеарних једначина). Сходно томе изаберимо , рецимо овај редослед $x - y - z$. Тако имамо еквиваленцијски ланац

$x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1$

Решавамо сваку неједначину по x, ако га у некој нема онда такву неједначину преписујемо. Тако имамо

$\Leftrightarrow \quad 0 < x, \ x < 1 - y - z, \ y > 0, z > 0$

Прилика за (iii)

$\Leftrightarrow \quad y > 0, z > 0, 0 < 1 - y - z, \quad 0 < x < 1 - y - z$

Одредили смо x до на y и z. У идућем кораку тражимо y али из подсистема: $y > 0, z > 0, 0 < 1 - y - z$, при чему преписујемо неједнакост двоструку $0 < x < 1 - y - z$, која је у ствари одредница за x

$\Leftrightarrow \quad z > 0, \ y > 0, \ y < 1 - z, \quad 0 < x < 1 - y - z$

Могућност употребе (iii)

$\Leftrightarrow \quad z > 0, \ 0 < 1 - z, \quad 0 < y < 1 - z, \quad 0 < x < 1 - y - z$

Сада је y одређено до на z, па преостаје још да нађемо z, што је овде непосредно

$\Leftrightarrow \quad 0 < z < 1, \quad 0 < y < 1 - z, \quad 0 < x < 1 - y - z$

Тачно речено на неједнакости $z > 0, 0 < 1 - z$, тј. на $0 < z, z < 1$ смо применили (iii) и добили 'константску неједначину' $0 < 1$ и додатак $0 < z < 1$. *И сада битно је да добијена константска неједнакост је тачна. У противном случају алгоритам би стао са закључком да полазни систем нема решења.* Претходну мисао подвлачимо јер она се односи на општи случај; наиме, код ма ког заданог система.

Напомена 57.1. Наведени примери у приличној мери описују $Fourier - Motzkin$ метод за решавање ма ког система $Sis(x_1, ..., x_n)$ линеарних неједначина са знаком $<$ (као и за оне са знаком $\leq$) а којима непознате су $x_1, ..., x_n \in R$. Краће речено, најпре се бира неки редослед тражења непознатих. Рецимо, да је x_1 први члан у таквом редоследу. Тада, слично као у претходним примерима, користећи еквиваленције (i), (ii), (iii) , еквиваленцију (57.1) и -слободније речено- разне основне чињенице о решавању неке линеарне неједначине по извесној непознати, за ту непознату x_1 одређујемо њену одредишни образац у облику

$$(*1) \qquad A(x_2, ..., x_n) < x_1 < B(x_2, ..., x_n)$$

где су A, B изрази који не садрже x_1. Тачније речено, полазни систем је еквивалентан са новим системом облика

$$Sis_1(x_2, ..., x_n), \quad A(x_2, ..., x_n) < x_1 < B(x_2, ..., x_n)$$

у коме је $Sis_1(x_2, ..., x_n)$ подсистем који не садржи x_1. С њим се наставља слично, и све то тако 'тече' до краја кад се одреди и последња непозната.

Тај опис је помало мањкав, па га допуњујемо. Тако, прво може се догодити да полазни систем буде немогућ. То се у алгоритму покаже овако: дође се до неке 'константске' неједначине која је немогућа.

Друго, има шта да се дода о облику (*1). Наиме, уместо њега може се појавити -слободније речено- један од његових 'подоблика' као:

$$(*2) \qquad A(x_2, ..., x_n) < x_1; \quad x_1 < B(x_2, ..., x_n)$$

а такође може се догодити да за x_1 нема одредница ни вида (*1) ни (*2). Значи, нема неједначине из које се може 'решити' x_1. То значи да x_1 остаје слободно. Примера ради, у систему $Sis(x_1, x_2)$ који гласи $x_2 > 3$, сва решења су описана са: x_1 је слободно, тј. може имати произвољну вредност, док x_2 може бити ма који број већи од 3.

Поменимо још да у случају "мешаног" система Sis неједначина употребом опште еквиваленције $a \leq b \ \Leftrightarrow \ a < b, a = b$ и након обављеног "логичког множења" од Sis се прелази на извесну дисјункцију система, сваки од којих је решив употребом идеја $Fourier - Motzkin$ и $Gaus$-овог метода. (Вид Раз 59.)

Раз 58. *Решити задане системе линеарних неједначина у којима a, b, c су реални параметри*

По $x \in R$

$1^0 \ x < a, x < b, x > c, x > d$

По $x, y \in R$

$2^0 \ x + 3y > 3, \ 5x + y < 7, \ 2x - y < 2, \ x - 4y > -4, \ 5x - y > 1$

$3^0 \ 0 < x, \ 0 < y, \ x + y < 1, \ x - y > a$

$4^0 \ x > a, y > b, x + y < c$

По $x, y, z \in R$

$5^0 \ x+y+z > 1, \ x-y-z < 1, \ x+y-z > 0, \ -x+y+z < 1, \ x+y+z < 3$

По $x_1, x_2, ..., x_n \in R$

$6^0 \ x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ ... \ x_n > 0, \ x_1 + x_2 + ... + x_n < 1$

Раз 59. *Решити дати систем неједначина по $x, y \in R$*

$x > 0, y > 0, x + y \leq 1$

Решење. У складу завршним делом Напомене 57.1. тај систем "прерађујемо" овако

$x > 0, y > 0, x + y \leq 1$

$\Leftrightarrow \ x > 0, y > 0, (x + y < 1 \vee x + y = 1)$

$\Leftrightarrow \ (x > 0, y > 0, x + y < 1) \vee (x > 0, y > 0, x + y = 1)$

Добили смо две гране. Прва је обичан систем неједначина, на који примењујемо $Fourier - Motzkin$ метод. Друга је "мешанац", па користимо и идеје решавања система једначина: $Gaus$–ову или методу замене. Након краћег 'рачуна' добијемо

$$\Leftrightarrow \quad (0 < y < 1, 0 < x < 1 - y) \vee (0 < y < 1, x = 1 - y)$$

Скуп решења је унија два скупа. Међутим, овде је могуће да се обе гране "споје", па имамо

$$\Leftrightarrow \quad 0 < y < 1, 0 < x \leq 1 - y$$

Стигли смо до простијег описа скупа свих решења

Раз 60. Решити дате системе неједначина у којима a, b, c су реални параметри

1^0 $x \leq a, x < b, x \geq c$ по $x \in R$
2^0 $x + y \leq 3,\ 2x + y > 2,\ x - y \leq 1,\ x + 3y > 3$ по $x, y \in R$
3^0 $x + y \geq 1,\ y + z \geq 1,\ x + y + z = a$ по $x, y, z \in R$

Раз 61. *Доказати* **след** *облика*[39] $A \vdash B$

1^0 $2^k > k \vdash 2^{k+1} > k+1$ $\quad 2^0$ $k^2 - k > 5 \vdash (k+1)^2 - (k+1) > 5$

где је k неки, али непрецизиран природан број.

Решење. Наравно, појам следа је близак појму импликације, али истичемо да је практично имати га.

1^0. Полазимо од неједнакости $2^k > k$, где је k неки природан број. Множећи обе њене стране са 2 добијамо нову неједнакост $2^{k+1} > 2k$. Међутим, с друге стране број $2k$ је већи или једнак $k + 1$, па макар који да је $k \in N$. Стога закључујемо да важи неједнакост $2^{k+1} > k + 1$, чиме се завршава доказ датог следа. Приметимо да се наведени доказ може овако кратко написати:

$Dok(k)$: Корак 1. Претпоставка $2^k > k$
Корак 2. Множењем са 2 из $2^k > k$ следи $2^{k+1} > 2k$
Корак 3. Важи неједнакост $2k \geq k + 1$
Корак 4. Из Корака 2 и 3 на основу својства транзитивности релација $>, \geq$ закључујемо неједнакост $2^{k+1} > k + 1$.

И сада један 'златан' плод околности да k није конкретна већ непрецизирана константа :

(61.1) У наведеном доказу $Dok(k)$ смемо k заменити са $1, 2, 45, 88$, односно

[39] Смисао: на основу претпоставке A извести, доказати B

ма којим конкретним бројем и тада од $Dok(k)$ ће се 'родити' исправни докази $Dok(1)$, $Dok(2)$, $Dok(45)$, $Dok(88)$, итд.

2^0 се доказује слично, па доказ препуштамо читаоцу.

Раз 62 (наставак претходног). *Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост $2^n > n$.*

Решење. Означимо формулу $2^n > n$ са $\phi(n)$. Тада треба :

Доказати све формуле $\quad \phi(1),\ \phi(2),\ \phi(3),\ \ldots$

У том запису - а на то смо навикли - три тачкице ... "поручују": и све 'остале' такве формуле, као што су $\phi(4)$, $\phi(273)$ односно - и тако се каже- формуле облика $\phi(n)$, где n може бити ма који природан број. Као што видите 'мало смо се заплели у причи о трима тачкицама'. Бар за сада, изузев 'гутања пилуле да је то јасно', а тако се обично и научи у многим школама и другде, један од излаза је да посегнемо за идејом *математичке индукције*, што ћемо управо и учинити. Сада ћемо говорити о 'обичној' математичкој индукцији, у краћој ознаци '$n \vdash n + 1$'. Она се може овако кратко описати[40]:

Ради доказа формуле $(\forall n \in N)\ \phi(n)$ доста је:

(62.1) (i) Доказати формулу $\phi(1)$.

(ii) Доказати импликацију $\phi(n) \Rightarrow \phi(n + 1)$ за све природне бројеве $n = 1, 2, \ldots$

Вероватно је неко од читалаца већ приметио да и део (ii) садржи 'мистичне три тачкице'. Међутим, ту сада има једно велико 'Али'. Да би се извршило (ii) може се -без употребе тих тачкица- чинити овако:

(62.2) Поћи од претпоставке $\phi(k)$ где је k константа[41] али која није прецизирана, па онда доказати формулу $\phi(k + 1)$. Краће речено доказати овакав след $\phi(k) \vdash \phi(k + 1)$ где је k знак непрецизиране константе

У ствари такав доказ смо већ направили у претходном Раз, то је управо $Dok(k)$. Значи, доказали смо део (ii). Преостаје још да докажемо део (i), тј. $2^1 > 1$, што је очигледно тачно.

Доказавши (i) и (ii) -каже се- на основу принципа математичке индукције закључујемо да за сваки $n \in N$ важи неједнакост $2^n > n$.

[40] То је општи опис, тј. $\phi(n)$ може бити ма која формула

[41] Бесплодно је да се крене од претпоставке,као : важи $\phi(k)$, где је k ма који природан број

Раз 63. *Доказати формулу* $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ *где* $n \in N$, *а такође направити сличну формулу за збир* $1^2+2^2+...+n^2$.

Решење. Користимо принцип математичке индукције (вид. (62.1)), при чему овде $\phi(n)$ је једнакост $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Тада $\phi(1)$ гласи $1 = (1*2)/2$ и очигледно је тачна. У духу (62.2) једнакост $\phi(k)$, тј.

$$(*1) \qquad 1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

узимамо за хипотезу и желимо да помоћу ње докажемо $\phi(k+1)$, односно

$$(*2) \qquad 1+2+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Поредећи $(*1)$ и $(*2)$ видимо да лева страна у $(*2)$ има сабирак више, односно сабирак $k+1$. Сходно томе, на обе стране једнакости $(*1)$ додајемо $k+1$. Тако из $(*1)$ следи

$$(*3) \qquad 1+2+...+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k+1$$

И сада помишљамо: индукцијски доказ ће нам успети уколико још успемо да докажемо ову једнакост

$$(*4) \qquad \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

То се утврђује скоро непосредно, чиме се завршава индукцијски доказ дате једнакости $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ где $n \in N$.

Сада у тражењу формуле за $1^2+2^2+...+n^2$ чинимо како следи. Претпоставимо да та формула изгледа овако

$$(*5) \qquad 1^2+2^2+...+n^2 = f(n)$$

где је $f(n)$ неки израз тренутно непознат. Основни проблем је управо одређивање тог f. И сада ћемо лепо искористити методолошку идеју преноса (вид. Напомену 14.1). Наиме, прво претпоставићемо да тај израз знамо. Друго, тражићемо индукцијски доказ за $(*5)$ и у њему уочити упоришна места, упоришнице. Захтевањем да те упоришнице буду тачне стићи ћемо до услова из којих ћемо открити f. Сходно реченом имамо ово расуђивање, односно хипотетички доказ за $(*5)$:

> Ако $n = 1$ тада $(*5)$ се своди на $1 = f(1)$ и то мора да важи. Значи, прва упоришница је: $f(1) = 1$. Даље претпоставимо да $(*5)$ важи кад $n = k$, где $k \in N$ непрецизирана константа. Додавањем израза $(k+1)^2$ на обе стране из такве $(*5)$ следи оваква једнакост
>
> $$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2 = f(k)+(k+1)^2$$
>
> И сада видимо да ће нам индукцијски доказ успети уколико важи једнакост $f(k)+(k+1)^2 = f(k+1)$, која је друга упоришница. У ствари, нових више и нема

И тако, ако желимо да нам 'прође' наведени доказ треба да одредимо макар један израз f из ова два услова

$$Upor \qquad f(1) = 1, \quad f(k+1) - f(k) = (k+1)^2$$

Наравно, на ум нам прво падају полиномски изрази првог, другог,..., степена. Лако се види да f не може бити ни линеаран, ни квадратан, али да може да буде кубан полином, односно полином облика an^3+bn^2+cn+d. После краћег рачуна (вид. Напомену 63.1) добије се тражени израз: $f(n) = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$. У складу са тим образац за збир квадрата гласи

$$1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

Напомена 63.1. Дајемо још коју реч о одређивању полинома $f(n)$. Наиме, једнакости $Upor$ као и једнакост $f(n) = an^3+bn^2+cn+d$ доводе до овог система једначина по a, b, c

$$a+b+c+d = 1, \quad 3a = 1, \quad 3a+2b = 2, \quad a+b+c = 1$$

чије решење је дато са $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$. То је типичан пример тзв. *методе неодређених коефицијената.* У њој је основно да се жељени математички 'предмет' тражи у одређеном облику, при чему та 'обличност' се исказује неким 'коефицијентима'. И они се онда траже из услова, једначина које су постављене за тај предмет.

Да ли вас начин употребе идеје преноса у претходном Раз-у не 'вуче' на неку везу са методом неодређених коефицијената ?

Напомена 63.2 У овом Раз-у смо на уобичајен начин употребили три тачкице ... у служби одређења збира од n сабирака, премда смо у вези са њима у Раз 62 изразили разне сумње. Међутим, као што ћемо одмах видети речени збир у општем случају се може дефинисати и без њих. Наиме, нека су задани бројеви $a_1, a_2, ..., a_n$, где $n \geq 1$. Тада њихов збир ('у тачкастом писању') је $a_1+a_2+...+a_n$. 'Безтачкаста' дефиниција уз употребу ознаке[42] $\sum_{i=k}^{m} a_i$, где $m \geq k$ гласи

$$(63.1) \; (i) \quad \sum_{i=k}^{k} a_i = a_k$$

$$(ii) \quad \sum_{i=k}^{m+1} a_i = \left(\sum_{i=k}^{m} a_i\right) + a_{m+1}$$

Рецимо, по тој дефиницији имамо једнакости

[42] Смисао: збир бројева a_i кад им индекс i иде од неког заданог k до другог заданог m

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \quad \sum_{i=7}^{7} a_i = a_7, \quad \sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$$

Поменимо још две ствари. Прво, (63.1) је пример тзв. *рекурзивних дефиниција*. Слично се рецимо уводи и производ n бројева. Приметимо да према (63.1) се говори и о збиру 'једног сабирка'. У ствари, такво проширење појма збир се показује као практично. Поменимо и да дефиниција (63.1) као рекурзивна у основи користи математичку индукцију.

Друго, може неко приговорити: добро избацисмо три тачкице, али заузврат нам се појавио 'троспратан симбол, запис' $\sum_{k}^{m}$. Ако је то проблем лако је решити га се. Наиме, рецимо доста је да се уместо тог записа користи неки овакав функцијски запис $sum(k, m, a_i)$.

Раз 64. *Одредити полином $f(n)$ тако да за сваки $n \in N$ важи једнакост $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = f(n)$*

Раз 65. *Доказати неједнакост $(1+x)^n \geq 1+nx$, где $x > -1$ и $n \in N$.*

Решење. Уведимо ознаку $\phi(n)$ за неједнакост $(1+x)^n \geq 1+nx$. Тада $\phi(1)$ гласи $1+x \geq 1+x$, што је тачно. Пођимо сада од претпоставке $\phi(k)$, тј.

(*1) $$(1+x)^k \geq 1+kx$$

где $k \in N$ непрецизирана константа. И сада је основна мисао како да од те претпостављене неједнакост изведемо $\phi(k+1)$, тј.

(*2) $$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

Леве стране тих неједнакости (*2), (*1) су у одређеној вези: њихов количник је $x+1$ што је ненегативан број. Управо то ћемо и искористити. Тако, множењем (*1) са $x+1$ настаје неједнакост $(1+x)^{k+1} \geq (1+x)(1+kx)$. Али како: $(1+x)(1+kx) = 1+x+kx+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$, то закључујемо неједнакост $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, тј. $\phi(k+1)$, чиме се завршава индукцијски доказ.

Напомена 65.1 Већ ти до сада наведени примери из индукције $n \vdash n+1$ указују да је она подесна, односно практична када нам пође за руком да нађемо неку 'лепу везу' између $\phi(k)$ и $\phi(k+1)$, и наравно да при доказу $\phi(1)$ немамо неких посебних тешкођа. Идући Раз 66 ће указати на то да та индукција у многим случајевима није практична. И тада користимо неку другу, подеснију (вид. Раз 66).

Раз 66. *Претпоставимо да се чланови низа целих бројева, у ознаци x_n, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ праве како следи. Прва два члана x_1, x_2 се изаберу по вољи. Остали чланови се одређују коришћењем задане рекурентне једнакости*

(*) $$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$$

у којој су p, q два унапред задана цела броја, а индекс n може узети разне вредности $1, 2, 3, \ldots$ па се тако редом може израчунати сваки члан низа. Нека је m неки природан број. Доказати:

Ако су прва два члана низа x_1, x_2 дељива са m онда и сваки члан x_n тог низа је дељив са m

Решење. Ово је типичан пример за тзв. $n,\ n+1 \vdash n+2$ индукцију. Она се може овако описати. Ради доказа неке формуле $(\forall n \in N)\ \phi(n)$ доста је:

(*i*) Доказати формуле $\phi(1)$ и $\phi(2)$.

(*ii*) Из претпоставки $\phi(k)$, $\phi(k+1)$, где је $k \in N$ непрецизирана константа извести[43] формулу $\phi(k+2)$.

Уведимо ознаку $\phi(n)$ за: "Члан x_n је дељив са m." Тада, формуле $\phi(1)$ и $\phi(2)$ су по 'датости' тачне. Претпоставимо $\phi(k)$ и $\phi(k+1)$, тј. да су x_k и x_{k+1} дељиви са m. Тада са тим m су дељиви и производи px_k, и qx_{k+1}. То исто важи и за њихов збир $px_k + q_{k+1}$, односно за x_{k+2}. Тако изведосмо $\phi(k+2)$, чиме се завршава индукцијски доказ.

Напомена 66.1. Поред индукције $n,\ n+1 \vdash n+2$ има и разних других, сличних као: $n,\ n+1,\ n+2 \vdash n+3$ и сл.

Раз 67 (наставак претходног). *Доказати да је збир $11^{n+2} + 12^{2n+1}$, где $n = 1, 2, \ldots$ дељив са 133.*

Решење. Низ x_n дефинишимо са

(*1) $$x_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}.$$

У наредном расуђивању ћемо се потрудити да му нађемо неку рекурентну једнакост попут (*) у претходном Раз-у. Тако потражимо x_{n+1}. Лако добијемо

(*2) $$x_{n+1} = 11^{n+3} + 12^{2n+3}.$$

Из једнакости (*1) и (*2) избацићемо 11^n. У ту сврху једнакост (*1) множимо са -11 и производ додајемо (*2). Тако имамо:

(*3) $$x_{n+1} - 11x_n = 133 * 12^{2n+1}$$

А сада (вид. и Напомену 67.1.) користећи се том једнакоћу из ње избацити 12^{2n}. Наиме, стављањем уместо n број $n+1$ из једнакости (*3) најпре добијамо

[43] У ствари се тако доказује импликација $(\phi(n), \phi(n+1)) \Rightarrow \phi(n+1)$ за све природне бројеве $n = 1, 2, \ldots$

(∗4) $x_{n+2} - 11x_{n+1} = 133 * 12^{2n+3}$

Сада помножимо (∗3) са -12^2 и производ додајмо (∗4). Тако добијемо једнакост

(∗5) $x_{n+2} - 155x_{n+1} + 1588x_n = 0$

За низ x_n смо добили рекурентну једнакост жељеног облика. Сада 'очас посла' се завршава доказивање. Заиста, после мало досадног рачуна види се да су чланови x_1, x_2 дељиви са 133. Даље, ако претпоставимо да су x_k, x_{k+1} (k ма која непрецизирана константа из N) дељиви са 133, онда из (∗5) следи да је такав и члан x_{k+1}. Тиме се завршава доказ индукцијом $k,\ k+1 \vdash k+2$.

Напомена 67.1. Намера нам је била да испричамо општу замисао како се за задани низ гради рекурентна једнакост облика (∗) из прошлог Раз-а, па из тог разлога дошавши до једнакости (∗3) нисмо одмах краће извршили доказ. Наиме, сасвим лако на основу једнакости (∗3) уз употребу 'обичне' индукције $n \vdash n+1$ се доказује тврђење задатка.

Раз 68. *Једном приликом нам дође један човек са оваквом молбом. Каже да ради са једним низом x_n ненегативних реалних бројева, код кога $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, али даље каже да још једино зна да низ задовољава ову рекурентну неједнакост*

(∗1) $x_{n+2} \le \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{3}x_{n+1}$

где $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Од нас тражи да на основу тих датости за низ x_n изведемо извесну овакву неједнакост (тј. проценимо брзину смањивања његових чланова)

(∗2) $x_n \le K * \theta^n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

где $K > 0$ и $\theta \in (0,1)$ су две константе које треба да нађемо.

Решење. Ово ће бити прилика да још једном видите лепоту и величину идеје преноса (вид. Напомену 14.1). Поступићемо слично као у Раз 63. Наиме, замислићемо да већ знамо процену (∗2) и да желимо да је докажемо индукцијом $k,\ k+1 \vdash k+2$. Један такав хипотетички доказ гласи. У случајевима $n = 1$, $n = 2$ неједнакост (∗2) гласи

$(Upor_1)$ $1 \le K * \theta, \quad 2 \le K * \theta^2$

Значи, 'тај цех' морамо платити. Даље претпоставимо да (∗2) важи у случајевима $n = k$, $n = k+1$ где је $k \in N$ непрецизирана константа. И тако претпоставке су ове неједнакости

$$x_k \le K * \theta^k, \quad x_{k+1} \le K * \theta^{k+1}$$

Прву помножимо са 1/2 а другу са 1/3, па затим их саберимо. Добијамо неједнакост

$$\tfrac{1}{2} * x_k \ + \ \tfrac{1}{3} * x_{k+1} \le K * \theta^k * (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\theta)$$

односно користећи (∗1) (за $n = k$) закључујемо ову неједнакост

$$x_{k+2} \ \le K * \theta^k * (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\theta)$$

И наравно да бисмо завршили хипотетички доказ ми бисмо волели да десна страна те неједнакости 'постане' $K * \theta^{k+2}$. Да бисмо то имали 'плаћамо овај цех':

$(Upor_2)$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\theta \le \theta^2$

Сада 'удахнимо ваздух' : заборавимо све протекле детаље и сву мисаону пажњу усмеримо на $(Upor_1)$ и $(Upor_2)$, које схватамо као систем неједначина из кога желимо да нађемо макар једно решење по $K > 0$ и $\theta \in (0,1)$. Тако, рецимо из $(Upor_2)$ лако видимо да једно 'добро' θ је 0.9. Даље на основу $(Upor_1)$ закључујемо да K треба тражити из услова

$$1 \le K * 0.9, \quad 2 \le K * 0.81$$

па један 'добар' K је 200/81. Тако коначно добијамо ову процену низа x_n:

$$x_n \le \tfrac{200}{81} * (0.9)^n$$

Напомена 68.1. Могуће су бројне лепе математичке 'мисаоне шетње' побуђене наведеним расуђивањем, или - боље речено - побуђене једним примером *прављења* математичког тврђења. И сами покушајте нешто слично. Сетимо се речи из Увода ове књиге: *Математика се и прави.*

Раз 69. *Доказати да је сваки природан број већи од 1 разложив на производ неких простих бројева.*

Пред-решење. Најпре се подсећамо неких чињеница о природним бројевима. Прво, они се деле у три групе: једну групу чини број 1 (он је 'самац'), другу чине *прости,* као $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$, а трећу *сложени,* као $4, 6, 8, 9, 10, \ldots$. Неки број је прост ако је већи од 1 и уз то дељив је једино са 1 и са самим собом. Сложен је онај број који није 1 и није прост, што управо значи да је то број, рецимо у ознаци n, који је дељив са неким бројем m, од себе мањим али већим од 1. На основу искуства које у раду са природним бројевима имамо тврђење задатка нам је 'очевидно'. Али, и 'кроз две тачке пролази једна права' а у Геометрији постоје "читаве приче о тој и разним другим очевидним чињеницама".

И тако, шала на страну, како да докажемо 'задатково' тврђење. Јасно је да употреба индукције $n \vdash n+1$, додуше са почетком од 2, тешко може да иде. Али покушајмо. Као прво, 2 је прост број, па као такав једнак је производу простих.[44] Сада прелазимо на 3. И он је прост, па елем јесте производ простих. Али, како да

[44] Подсећамо да смо у Напомени 63.2 говорили о збиру и производу од n бројева, где n може бити и 1

повежемо 'простост' броја 3 са 'простошћу' броја 2. Уопште, како слично повезати ма која два суседна природна броја k и $k+1$, где $k > 1$? Тражење те повезаности (а она би нам вероватно омогућила доказ типа $n \vdash n+1$) напуштамо и посежемо за једном до сада непомињаном индикцијом, тзв. *трансфинитном.*
Она се може овако описати

Ради доказа формуле $(\forall n \in N)\ \phi(n)$ доста је:

(69.1) (i) Доказати формулу $\phi(1)$.

(ii) Доказати формулу $\phi(k)$ ($k \in N$ је непрецизирана константа) на основу претпоставки[45] $\phi(1),\ \phi(2), \ldots, \phi(k-1)$.

Решење. Означимо са $\phi(n)$ реченицу "Број n је једнак производу простих бројева". Трансфинитном индукцијом, али са почетним бројем 2, а не 1, доказаћемо да је $\phi(n)$ тачно за сваки природан број $n > 1$.
Заиста, прво $\phi(2)$ је тачно, јер 2 је прост број, па дакле 2 јесте производ простих бројева. Друго, нека $k > 2$ буде нека непрецизирана константа из N и претпоставимо да су тачне све формуле $\phi(2),\ \phi(3),\ \ldots, \phi(k-1)$. За k постоје две могућности: k је прост, k је сложен. У првом случају као прост, он је и производ простих, па се изводи $\phi(k)$. А у другом случају за k имамо неку једнакост облика $k = pq$, где $1 < p,\ q < k$. На основу индукцијске хипотезе ти бројеви $p,\ q$ су разложиви на производе простих бројева. Како $k = pq$, а *производ два производа је опет производ* то закључујемо да је и k разложив на производ простих. Дакле, $\phi(k)$ је доказана и индукцијски доказ је завршен.

Напомена 69.1. У неколико последњих Раз-ова (почев од 62-ог упознали смо -може се рећи- разне облике математичке индукције. Поред наведених има и разних других. Рецимо, један од њих гласи:

Ради доказа формуле $(\forall n \in N)\ \phi(n)$ доста је:

(i) Доказати формуле $\phi(1),\ \phi(4),\ \phi(9)$, уопште формулу облика $\phi(m)$, где је m квадрат неког природног броја.

(ii) На основу препоставке $\phi(k)$, где $k \in N$ непрецизирана константа доказати формулу $\phi(k-1)$.

Сами направите неколико нових облика математичке индукције.

[45] Каже се и овако: Доказати $\phi(k)$ на основу претпоставке тачности формуле $\phi(n)$ за све n који су претходници броја k

Мала математичка библиотека

Аутор

Проф. др Славиша Б. Прешић

РАЗНИЦЕ, I

1997 - прво издање

Издавач

ЈНИП „Просветни преглед"

Београд, Моше Пијаде 6

За издавача

Видак Перић, директор

Марина Костић, уредник

Идејно решење корица

Проф. др Славиша Б. Прешић

Ликовна опрема

Младен Ђуровић

Лектор

Милица Шутвић

Компјутерска обрада

Проф. др Славиша Б. Прешић

Тираж

1000

Штампа

Mrlješ

Булевар војводе Мишића 39а

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51

ПРЕШИЋ, Славиша Б.
Разнице, I / Славиша Б. Прешић. - [1. изд.]. - Београд : Просветни преглед, 1997 (Београд : Мрљеш). - 99 стр. : граф. прикази ; 20 cm. - (Мала математичка библиотека)

Тираж 1000. - Белешке уз текст.

ISBN 86-7055-023-7

а) Математика

ИД=58517260