matematički vidici 3

S.PREŠIĆ, Z.ŠIKIĆ, M.PREŠIĆ
Ž.MIJAJLOVIĆ, M.MIHALJINEC, K.ŠEPER i dr.

Problem postojanja u matematici

matematički institut
BEOGRAD, 1979.

U okviru naučno–stručnih izadanja Matematičkog instituta izdaje se edicija MATEMATIČKI VIDICI.

Publikacije u ovoj ediciji namenjene su širokom krugu čitalaca: profesorima, nastavnicima, učiteljima, studentima, zatim inženjerima, ekonomistima, psiholozima i drugim.

Ova publikacija nije periodična.

Rukopise opremljene za štampu slati na adresu: Matematički institut,11 000 Beograd, Knez Mihailova 35.

Izdaje: Matematički institut, 11 000 Beograd, Knez Mihailova 35

Štampa: OOUR ŠTAMPARIJA ZA GRAFIČKU DELATNOST
FAKULTETA TEHNIČKIH NAUKA U NOVOM SADU

matematički vidici 3

S.Prešić, Z.Šikić, M.Prešić
Ž.Mijajlović, M.Mihaljinec, K.Šeper i dr.

Problem postojanja u matematici

Referati, pismeni prilozi i diskusija
5. zajedničkog sastanka
Seminara za konstruktivnu matematiku
i teoriju modela Zagreb – Beograd,
Zavoda za mehaničke konstrukcije
Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu,
Matematičkog odjela
Prirodoslovno–matematičkog fakulteta u Zagrebu
i
Matematičkog instituta u Beogradu,
održanog 17.06.1978.
na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu

matematički institut
BEOGRAD, 1979.

R e c e n z e n t i:

Kurepa dr Djuro, redovni profesor PMF u Beogradu
Stojaković dr Mirko, član SANU i redovni profesor PMF u Novom Sadu,
Alimpić dr Branka, docent PMF u Beogradu

Primljeno za štampu na sednici Redakcionog odbora od 12. decembra 1978. godine.

Spise i diskusiju priredili za tisak

K.Šeper, Zagreb
M.Prešić, Beograd
M.Djurić, Beograd

Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju republičkog sekretara za kulturu SR Srbije ova publikacija je oslobodjena poreza na promet.

S A D R Ž A J

Strana

Sastanku su prisustvovali:

1. Mr Milan Božić, asistent PMF u Beogradu,
2. Dr Nataša Božović, asistent PMF u Beogradu, tajnik beogradske sekcije Seminara,
3. Dr Milan Djurić, pomoćnik direktora MI u Beogradu,
4. Svitan Gaborović, Gradske elektrane, Maribor,
5. Mr Gizela Gyarmati-Pavlić, asistent FSB u Zagrebu,
6. Mr Miodrag Kapetanović, asistent MI u Beogradu,
7. Dr Vladimir G.Kirin, izvanredni profesor PMF u Zagrebu,
8. Dr Luka Krnić, izvanredni profesor FSB u Zagrebu,
9. Dr Mirko Mihaljinec, izvanredni profesor PMF u Zagrebu, voditelj Seminara,
10. Dr Žarko Mijajlović, asistent PMF u Beogradu
11. Svetozar Petrović, asistent Geodetskog fakulteta u Zagrebu,
12. Dr Marica Prešić, docent PMF u Beogradu,
13. Dr Slaviša Prešić, vanredni profesor PMF u Beogradu, voditelj beogradske sekcije Seminara,
14. Dean Rosenzweig, asistent FSB u Zagrebu, tajnik zagrebačke sekcije Seminara,
15. Dr Kajetan Šeper, docent FSB u Zagrebu, voditelj zagrebačke sekcije Seminara,
16. Zvonimir Šikić, asistent FSB u Zagrebu,
17. Mr Zlatko Šporer, urednik za matematiku „Školske knjige", Zagreb,
18. Dr Dimitrije Ugrin-Šparac, izvanredni profesor Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu.

FSB = Fakultet strojarstva i brodogradnje
Djure Salaja 5, 41001 Zagreb

PMF = Prirodoslovno-matematički fakultet
Marulićev trg 19, 41000 Zagreb
odnosno
Prirodno-matematički fakultet
Studentski trg 16, 11000 Beograd

MI = Matematički institut
Knez Mihailova 35, 11000 Beograd

IN MEMORIAM

Dr MILAN DJURIĆ rodjen je 7.VI 1937. godine u Žutoj Lokvi kod Brinja u Lici, SR Hrvatska. Godine 1960. diplomirao je na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Početkom 1961. izabran je za asistenta na Katedri za hidromehaniku istog fakulteta. Juna 1963. odbranio je magistarski rad pod nazivom „Jednoparametarska metoda za rešavanje nestacionarnih laminarnih graničnih slojeva" na Prirodno–matematičkom fakultetu u Beogradu, grupa za mehaniku. 1964. godine zaposlio se kao asistent u Matematičkom institutu u Beogradu. Juna 1965. odbranio je na Prirodno–matematičkom u Beogradu doktorsku disertaciju pod nazivom „Metoda za rešavanje nestacionarnih ravanskih laminarnih graničnih slojeva". Godine 1966. postaje naučni saradnik, 1971. viši naučni saradnik, a 24. decembra 1976. godine naučni savetnik. Od 1973. do 28. decembra 1978, kada je tragično izgubio život u saobraćajnoj nesreći, nalazio se na dužnosti pomoćnika direktora Matematičkog instituta.

U svom naučnoistraživačkom radu dr Milan Djurić bavio se podjednako kako mehanikom tako i matematikom – u poslednjim godinama svog života poglavito matematikom. Radovi iz matematike odnose se na oblasti *diferencijalnih jednačina*, topologije i matematičke logike. Navodimo spisak naučnih radova, napominjući da je takodje objavio i pet stručnih radova.

1. One–parameter method for calculation of non–steady laminar boundary layers, Publ. Inst.Math., 5(19), (1965) 17–29.
2. A contribution to similar solution in the case of unsteady boundary layers, Mat. Vesnik, 2(17) /1965), 7–14.
3. Unsteady laminar boundary layer on a rotational body which is put to spiral motion, Publ. Inst. Math., 5(19) (1965), 45–53.
4. Prenošenje jedno–parametarske metode na nestacionarne granične slojeve sa usisavanjem, Mat. Vesnik, 2(17) (1965), 15–20.
5. A method for solution of unsteady incompressible laminar boundary layers, Publ. Inst. Math., 6(20) (1966), 29–55.
6. On the solution of unsteady laminar boundary layers past bodies of revolution spinning about their axes, Publ. Inst. Math., 7(21) (1967), 169–184.
7. One–parameter solution of thermal boundary layers, Publ. Inst. Math., 7(21) (196 163–168.

8. On the method for solution of unsteady thermal boundary layers in case of two–dimensional low–speed flows, Proc. Cambridge Phil. Soc., 64 (1968), 849–869.

9. On the universal form of unsteady incompressible boundary layer equation and its solving, Publ. Inst. Math., 9(23) (1969), 123–134.

10. On the transformation of thermal boundary layer equations, Publ. Inst. Math., 9(23) (1969), 135–138.

11. Fundamental structures in mechanics, Mat.Vesnik, 11(26) (1974), 269–271.

12. Some questions concerning foundations of mechanics, predat za štampu u Publ.Inst. Math.

13. On the Dirichlet's problem for the Navier–Stokes equations on a Riemannian manifold, Publ. Inst. Math., 6(20) (1966), 131–154.

14. On the boundary problem for the Navier–Stokes equations on a Riemannian manifold, Publ. Inst. Math., 6(20) (1966) 155–163.

15. On the interior regularity of weak solutions of non–steady Navier–Stokes equations on a Riemannian manifold, Rendiconti Semin. Math. Padova, XLII (1969),267–297.

16. On classes and universes, Publ. Inst. Math., 14(28) (1972) 39–48.

17. Some fundamental structures on classes, Publ. Inst. Math., 14(28) (1972), 49–66.

18. On a fixed object property for $1^{C}\beta$–semigroupoids, Mat. Vesnik, 10(25) (1972), 19–20.

19. Topological structures on classes I, Publ. Inst. Math., 15(29) (1973), 55–73.

20. Topological structures on classes II, Publ. Inst. Math., 15(29) (1973), 75–83.

21. Topological structures on classes III, Publ. Inst. Math., 16(30) (1973), 53–60.

22. A general spatial structure on classes, Publ. Inst. Math., 16(30) (1973), 61–64.

23. On a foundations for mathematics. A view of mathematics I. – „Zbornik radova MI", knj. 2(10), 1977, pp. 31–55.

24. A note on the intuitionistic propositional logic – u štampi.

Radovi od 1–12 su iz mehanike, a od 13–24 iz matematike.

Pored naučne delatnosti kod dr Milana Djurića veoma zapaženo mesto zauzimala je i društvena delatnost na polju matematike. Tako, bio je član i požrtvovano je radio u raznim matematičkim telima (institutskim, gradskim, republičkim).

Aktivno je učestvovao u radu raznih naučnih seminara, posebno u Seminaru za matematičku logiku Matematičkog instituta u Beogradu.

PREDGOVOR

Temu „Problem postojanja u matematici" za ovaj 5.zajednički sastanak (3.sastanak u Zagrebu) Seminara za konstruktivnu matematiku i teoriju modela Zagreb–Beograd, Zavoda za mehaničke konstrukcije Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, Matematičkog odjela Prirodoslovno- –matematičkog fakulteta u Zagrebu i Matematičkog instituta u Beogradu, predložio je prof.dr S.Prešić, Beograd. Takodjer je predložio da diskusija bude magnetofonski snimljena.

U dosadašnjem radu Seminara takvih općih tema nije bilo na sastancima, a diskusija se do sada nije bilježila. Smatramo to prvim eksperimentom u daljnjem radu, kojeg ćemo povremeno, npr. svake dvije godine, obnavljati s drugim opštim temama.

Ova knjižica predstavlja dokument o tom sastanku. U njoj se nalaze dva glavna referata S.Prešića (Beograd) i Z.Šikića (Zagreb), četiri pismena priloga M.Prešić (Beograd), Ž.Mijajlovića (Beograd), M.Mihaljineca (Zagreb) i K.Šepera (Zagreb), autorizirana diskusija sudjelovatelja *te nekoliko naknadnih dodatnih priloga.*

Zahvaljujemo se ovom prilikom svim sudjelovateljima, referentima i diskutantima; napose drugovima asistentima Deanu Rosenzweig-u i Zvonimiru Šikiću na zamornom poslu preslušavanja diskusije s magnetofonske vrpce i diktiranje teksta te drugarici Miri Krmpotić na strojnom pisanju i posebno prijepisu diskusije s magnetofonske vrpce.

Zagreb, 30.VI 1978.

K.Šeper

MATEMATIČKI INSTITUT – MATEMATIČKI VIDICI 3 (1979), str. 11–17

PITANJE POSTOJANJA U MATEMATICI

Slaviša Prešić, Beograd

1. Počeo bih dvema opštim napomenama. *Prvo,* smatram da pitanje postojanja u savremenoj matematici ne treba da bude od prevashodnog značaja, kakvo je inače dobrim delom bilo ranije, kroz istoriju matematike, kada je ponekad, i tako bi se moglo reći, matematika izlagana kao neka vrsta geografije. Drukčije rečeno, pitanje postojanja u matematici dobrim delom je nasledje prošlosti. Izgleda mi da se prema njemu treba u matematici slično odnositi kao što se to čini u slučaju, recimo, muzike, književnosti, slikarstva i sličnog. A tamo, kao što nam je poznato, takvo pitanje skoro se i ne postavlja.

Reč *postoji* je, inače, veoma složena i nije teško utvrditi da se ona, kao jedna reč, upotreblja višestruko, odnosno u raznim značenjima. Sledeći njeno glavno, njeno prvotno značenje, a to znači i povezujući je sa rečju *ostvariti,* nije teško utvrditi da se u slučaju matematike u takvom smislu (neko bi rekao *pravom smislu reči postoji)* može govoriti jedino o postojanju objekata kakvim se danas bavi konstruktivna matematika. U daljem izlaganju vratićemo se ponovo toj činjenici, a sada u vezi sa pitanjem postojanja pomenimo još i ovo:

> U raznim misaonim delatnostima koriste se mnogi pojmovi za koje se ne bi moglo reći da su konstruktivne prirode. Pomenimo neke: vreme, prostor, sila, ljubav, lepota, itd.

Prethodna primedba već prikriveno znači pokušaj pravdanja što se i u matematici (od strane mnogih matematičara) koriste nekonstruktivni pojmovi, čiji predvodnik je svakako *beskonačan skup,* odnosno *beskonačnost.* U kakvom smislu se može govoriti o postojanju beskonačnih skupova, kao i o tome zašto se oni koriste govorićemo kasnije.

2. Druga opšta napomena sastoji se u ukazivanju na povezanost, pa čak i direktnu zavisnost mnogih matematičkih pojmova, naravno i nematematičkih, od *nas samih,* odnosno našeg psiho–fizičkog ustrojstva. Slobodnije rečeno, da smo mi drukčije ustrojeni, mnoge stvari bismo drukčije *shvatali,* drukčije *„gledali".* Recimo, da li bismo, a i kako bismo, izgradili pojmove kao napred, nazad, levo, desno, a zatim čak i matematički pojam prave, ukoliko bismo umesto dva oka imali lanac očiju rasporedjen kao venac oko glave? Ne navodeći dalje mnoštvo sličnih zapažanja istaknimo

da se uopšte za mnoge pojmove može reći da su *rezultat utisaka* našeg uma. Da je taj um drukčiji, drukčiji bi i utisci bili.

3. Osvrnimo se sada na pitanje beskonačnih skupova i pokušajmo objasniti kako su matematičari počeli raditi sa tim u matematici novopriznatim pojmom.

U matematici, pa i van nje, odvajkada postoji iskustvo u radu sa konačnim skupovima. Tako, u vezi sa pojmom *kontinent* prirodno je govoriti o skupu svih kontinenata. Matematičkim jezikom rečeno, radi se o *skupu svih objekata x koji imaju svojstvo biti kontinent.* Na sličan način može se govoriti o skupu svih godišnjih doba, skupu svih prirodnih brojeva od 1 do 10, skupu svih milionskih gradova sveta itd. U svakom od tih slučajeva skup je odredjen karakterističnim svojstvom svojih članova, odnosno do skupa se dolazi, može se i tako reći, primenom ovakvog pravila σ:

Svojstvo S predmeta x $\to$ *Skup svih predmeta x imajućih svojstvo S*

što se može ovako čitati:

Datom svojstvu S predmeta x dodeljuje se skup svih predmeta x imajućih svojstvo S.

Pravilo σ je, naravno, poniklo iz iskustva u radu sa konačnim skupovima, odnosno reći ćemo: ono je konačnosno. Zamislimo sada da je S svojstvo opisano rečima: *x je prirodan broj.* To svojstvo, kao što znamo, ispunjavaju razni prirodni brojevi 1, 2, 3, 4 itd. Da li se i u ovom slučaju primenom pravila σ, odnosno primenom u stvari *proširenog* pravila može govoriti o skupu svih prirodnih brojeva, što bi svakako bio beskonačan skup? Tu nastaje misaona raskrsnica: prihvatiti ili ne prihvatiti tako „obogaćeno", odnosno *ekstrapolirano* pravilo σ. Kao što znamo, ima matematičara koji to prihvataju, ali ima i onih drugih. U Cantorovskoj matematici, tako dalje nazivamo deo matematike u kome se prihvataju beskonačni skupovi, često se na sličan način uvode beskonačni skupovi. Medjutim, kao što je dobro poznato, slobodna, *odnosno extrapolirana* primena pravila σ, dovodi do raznih teškoća u aksiomatskoj teoriji skupova. Tačnije rečeno, tako se dolazi do raznih paradoksa. S tim u vezi, jedan od najtežih problema u aksiomatskoj teoriji skupova je: za kakva svojstva S se može govoriti o odnosnom skupu, u smislu da smo sigurni da su zahtevi naloženi na osnovne skupovne pojmove: *svojstvo, član, skup* medjusobno logički neprotivurečni – o čemu ćemo kasnije više govoriti.

Navedimo još da se u Cantorovskoj matematici ne koristi jedino extrapolirano pravilo σ, već se slično postupa i sa elementarnom logikom, koja je takodje konačnosna, odnosno nastala iz iskustva sa konačnim skupovima.

4. Usvajajući, inače, nominalističko načelo da se može govoriti o postojanju nečega jedino ukoliko je moguće dati odnosni zapis, tj. simbol, lako se mogu navesti razni prigovori eventualnom verovanju u postojanje beskonačnih skupova. Razlog je

tada, *što sa konačno mnogo znakova* – a, samo, takve možemo graditi – *nije moguće opisati aktualno nijedan beskonačan skup.* Neko bi možda naveo ovakav prigovor. Pa, sve prirodne brojeve, dakle, njih beskonačno mnogo, možemo opisati pravilom, odredjenim ovim zapisima

$$1 \in N$$
$$x \in N \Rightarrow x' \in N$$

Tim konačnim zapisima, uz pretpostavljena uputstva njihove upotrebe, postupno se grade razni zapisi kao

$$1,\ 1',\ 1'',\ 1''',$$

u proizvoljno velikoj količini, naravno konačnoj, osim ako se *ne pretpostavi* da pravilo „radi" *beskonačno* puta. Tako se, istina, dolazi do beskonačno mnogo objekata ali, a to je bitno, tek uz pretpostavljenu upotrebu jednog drugog, pomoćnog beskonačnog skupa.

U vezi sa skupom prirodnih brojeva podsetimo se i ovakvog odlomka iz zamišljenog izlaganja studentima. Dešava se da se takvom prilikom kaže i ovako:

Sa N označavamo skup svih prirodnih brojeva 1, 2, 3, 4, 5, itd. Dakle:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Po čemu taj zapis predstavlja beskonačan skup? Pa, studenti su već od ranije naviknuti, čak bih rekao *izdresirani,* da im tri tačkice, slobodnije rečeno, znače *lift za vinuće u beskonačnost.*

5. Zašto se mnogi matematičari i pored navedenih opravdanih prigovora strasno zanimaju za beskonačne skupove, odnosno, dalje, za beskonačne relacijsko–operacijske strukture. Jedan od glavnih razloga je, čini se, što je često *mnogo lakše raditi sa beskonačnim skupovima,* nego sa onim *konačnim skupovima koji imaju veliki broj članova.* U stvari, slobodnije rečeno, beg prema beskonačnim strukturama, odnosno obavljanje takve idealizacije, često znači svojevrsno uprošćavanje, „zaokrugljivanje". Na takav način, izvesna beskonačna matematička struktura sagradjena radi rešavanja nekog problema predstavlja može se reći, jednu aproksimaciju, toliko ili onoliko odnosnu za problem. Medjutim, kao što znamo, često se i pomoću izvesnih približnosti može doći do korisnih rezultata. Ako uz to dodamo i već navedeni razlog da rad sa beskonačnim strukturama može biti i lakši nego sa konačnim, eto argumenata u prilog mišljenju da treba raditi, odnosno uzimati u matematička razmatranja i beskonačne strukture. Dakle, ponovo istaknimo, rad sa beskonačnim strukturama: prvo, *može biti koristan* i drugo, *može biti lakši* no rad sa pojedinim konačnim strukturama. To su, naravno i te kako značajni razlozi koji opravdavaju rad sa njima. Pre razmatranja pitanja u kakvom, po našem mišljenju, smislu one postoje istaknimo i sledeće:

Premda se do mnogih rezultata dolazi radeći sa beskonačnim strukturama (bolje je reći: *uobražavanjem* da radimo sa njima) svaki deo matematike koji se direktno koristi je, u stvari, *konačnosne prirode.* Tako, u praksi je $\sqrt{2}$, slobodnije rečeno, jedan od brojeva

$$1{,}4 \qquad 1{,}41 \qquad 1{,}414, \quad \text{itd.}$$

integral se zamenjuje izvesnim konačnim zbirom i slično.

6. A sada nekoliko reči upravo u vezi sa pitanjem postojanja. Prema Hilbertu, slobodnije rečeno, reči *postojati* i *biti neprotivurečan* su skoro sinonimi. Naime, podrobnije rečeno, neka je F skup nekih matematičkih aksioma iskazanih elementarnom logikom (odnosno predikatskom logikom prvog reda). Tada, prema jednom od ključnih stavova teorije modela (model je u stvari, drugi naziv za relacijsko–operacijsku strukturu) za takve aksiome postoji model ako i samo ako je F neprotivurečan skup*). U skladu sa tim, Hilbert smatra da *dokazivanje neprotivurečnosti skupa aksioma F znači ujedno dokazivanje da u matematičkom smislu p o s t o j e objekti o kojima se govori u formulama iz F.*

Naveli smo Hilbertovo gledište budući da se ono, na odredjen način, koristi u gledištu koje dalje podrobnije izlažemo.

Podsetimo se najpre da je nekada, pre dva–tri stoleća, bilo potpuno jasno koji problem jeste, odnosno nije matematički. Medjutim, u naše vreme, *skoro ni za jedan problem se ne može pouzdano tvrditi da ne može biti matematički.* Konačno, svedoci smo činjenice da napori za rešavanje raznih problema ponekad čak vode nastanku novih matematičkih oblasti. Svakako da nije moguće da se u potpunosti objasni kako se stvaraju nove oblasti. To je, na kraju, i najviši čin u matematičkom stvaralaštvu. Nešto slično vredi i u slučaju stvaralaštva u muzici, književnosti, slikarstvu i sl. Medjutim, i pored istaknute nemogućnosti potpunog razjašnjenja nastajanja novih oblasti mogu se, čini se, navesti neka opšta zapažanja.

Tako, mnogo puta pri gradjenju novog koristimo se već postojećim, starim iskustvom u radu, odnosno razmišljanju o drugim problemima. Znači, drukčije rečeno, trudimo se da novo izgradimo pomoću starog. Medjutim, a to je bitno, često se pritom obavlja *exstrapolacija* starog iskustva. U tom smislu setimo se već navedenih primera. Može se odmah postaviti pitanje: A da li je dozvoljeno vršiti *extrapolaciju iskustva.* Jer, to je i u direktnoj vezi sa pitanjem postojanja. Na to pitanje vraćamo se nešto kasnije.

Dalje, u gradjenju novog značajnu ulogu ima naše *matematičko obrazovanje,* kao i *navika* da ovako ili onako pristupamo razmišljanju o problemu. Naravno, naviknutost dobrim delom zavisi od naših učitelja, odnosno oštrije rečeno, *upotrebljenog dresiranja* kome smo nekad bili podvrgnuti. Medjutim, u stvaranju novog navike često pružaju najveći otpor, pa radjanje novog znači i, može se tako reći, *oslobadjanje od nekih navika, kao misaonih zapreka.*

*) Pomenimo da se to dokazuje uz korišćenje aksiome izbora.

7. Pokušaćemo sada da i odredjenje zamislimo, kako se često obavlja rešavanje nekog problema (prakse ili teorije) pomoću neke već postojeće matematičke teorije ili, ako to treba, kako se radi rešavanja problema stvara nova teorija.

Pa, najpre, usmeravanjem razmišljanja na problem – a to zavisi od mnoštva činilaca – prikupljamo razne *podatke,* odnosno *misaone utiske* i tako stvaramo, može se reći, *misaonu sliku problema.* Naš um, pored ostalog, tada ima ulogu *upijača utisaka,* reći ćemo i *snimača,* slično kakvome foto–aparatu. U vezi sa misaonom slikom problema postoje dve mogućnosti: ona je izgradjena od pojmova neke već poznate teorije, ili se u njoj pojavljuju sasvim novi misaoni utisci, dotada nepoznati. Tako, primera radi, pretpostavimo da imamo već izgradjenu aritmetiku **A** prirodnih brojeva i da želimo, odnosno trudimo se da problem **P** rešimo pomoću nje. U misaonoj slici tada, sledstveno rečenom, učestvuju razni pojmovi teorije **A** koji su dodeljeni, nadeveni problemu **P**. Na taj način problemu **P** se pridružuje jedan drugi problem $\mathbf{P_A}$, iz teorije **A**. Rešavanjem tog problema $\mathbf{P_A}$ sredstvima teorije **A**, a to je sada pitanje za sebe, dolazi se do, u stvari, *uslovnog* rešenja polaznog problema **P**. Uslovi su ovakve prirode:

Dobijeni zaključci su verni do na veru u adekvatnost brojevnih nadeva.

Naravno, može se dogoditi da je problem **P** takav da mu nikakva misaona brojevna slika ne bude odgovarajuća, tj. da nikakvo nadevanje brojevnim pojmovima, slobodnije rečeno „obrojavanje" ne bude uspešno, odnosno odgovarajuće.

Pretpostavimo da je **P** neki problem za koji nam ne uspeva da mu na adekvatan način pridružimo, nadenemo sliku pomoću pojmova nijedne od poznatih teorija. *Tu* su sada moguća dva slučaja: u jednom nam uspeva da sliku izrazimo upotrebom raznih pojmova savremene matematike kao: skup, relacija, funkcija i dr., a u drugom slučaju tako što nam nikako ne polazi za rukom.

Upotrebom odredjenog jezika, recimo jezika predikatskog računa prvog reda, ukoliko je on prikladan za rešavanje problema, u prvom slučaju misaonoj slici odgovara neki skup F predikatskih formula koje imaju ulogu aksioma. Tim aksiomama su izražene, tokom razmišljanja o problemu, uočene veze izmedju raznih relacija, operacija, funkcije i dr. koje su članovi pretpostavljene misaone slike. U takvom slučaju rešavanje problema je u uskoj vezi sa izvodjenjem raznih logičkih posledica iz aksioma F. Sve izvedene posledice mogu se tumačiti kao zaključci o problemu P, ali samo do na stepen uverenosti da su zahtevi izraženi aksioma F potpuno adekvatni problemu. U stvari, to može biti sporno, jer pri gradjenju aksioma, što smo već pominjali, često se vrše pojednostavljenja, „zaokrugljivanja" uvodjenjem navodnih beskonačnih skupova, korišćenjem ekstrapolacije prethodnog iskustva i slično. U vezi sa pitanjem adekvatnosti odabranih aksioma pomenimo pomalo u slobodnoj šali i ovakvu opasku: Savremeni fizičari ponekad radi rešavanja nekih problema naprave teoriju, pa nakon toga „mole" prirodu da je zadovolji.

Pored adekvatnosti, ali u stvari i u vezi sa njom, osnovno pitanje u vezi sa nekim sistemom aksioma F jeste pitanje njegove logičke neprotivurečnosti jer, kao što je poznato, u klasičnoj logici predikata, iz protivurečnog sistema aksioma može se izvesti svaki zaključak.

Ne razvijajući *dalje* slične ideje, ukoliko su u pitanju slučajevi rešavanja one vrste problema kod kojih je to pogodno činiti pomoću klasične predikatske logike i skupova, *pokušajmo ukazati na izvesne* opšte misli za koje očekujemo da se odnose i na one slučajeve kada nam ne uspeva da misaonu sliku izgradimo pomoću pomenutih pojmova.

Prema dosadašnjem viševekovnom iskustvu u rešavanju raznih problema uvek smo koristili izvestan odabran jezik odnosno *sistem simbola.* Pomoću takvog sistema uvek smo misaonu sliku na odredjen način izražavali odgovarajućom, reći ćemo, *simbolskom slikom* (slobodnije ćemo reći *crtežom*).

Aksiome, kojima se zadaje neka teorija, shvaćene kao zapisi, su primer simbolske slike. Slično, neki algoritam, formalna teorija itd. zadaju se odnosnim simbolskim slikama, zapisima, crtežima.

Kao što smo već pomenuli, simbolskoj slici, crtežu prethodi misaona slika, kojom se naravno odredjuje, i tako se može reći, jedna u stvari, *glavna* interpretacija (tumačenje) simbolske slike. Zapravo, po našem mišljenju, matematika se sastoji iz raznih delova i svaki od tih delova je odredjen dvema odrednicama:

misaonom i *simbolskom slikom*

tj. svaki deo je svojevrsno dvojstvo. Nešto slično vredi i za književnost, slikarstvo, muziku itd.

Medjutim, zanimljivo je, pa i suštinski važno, da matematičke simbolske slike pored glavne interpretacije dopuštaju i mnoštvo drugih. To svojstvo ćemo zvati *višerodnost.* Tako, primera radi, zamislimo da smo odredjenim razmišljanjem u vezi sa skupovima (uvodeći u razmišljanje čak i razne beskonačne skupove i mnoge druge „uobražene" pojmove) došli do nekog sistema aksioma, recimo ZF — koji potiče, kao što znamo od Zermela i Fraenkela. Za dobijeni skup aksioma, odnosno simbolsku sliku, pored glavne moguće su, recimo i ovakve interpretacije:

- svaku od aksioma, pa i uopšte ma koju formulu predikatskog računa, možemo bukvalno shvatiti kao *reč* sagradjenu od polaznih znakova: $\in$, logičkih znakova $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \urcorner, \forall, \exists$, promenljivih i sl. Ako tako postupamo nije teško uvideti da se rad sa aksiomama ZF (izvodjenja i drugo) može shvatiti i kao igra rečima, *jedna vrsta pasijansa.* Slično se može učiniti i u slučaju ma koje do sada poznate simbolske slike (neke teorije). Upravo blagodareći toj okolnosti pružena je mogućnost da nas u rešavanju mnogih problema zameni mašina;
- pretpostavimo sada da, u vezi sa rečenim, svakom od polaznih znakova, a dalje slično učinimo i sa njihovim rečima, kao i sa konačnim nizovima reči, dodelimo po jedan prirodan broj. Tada se rasudjivanja u okviru uzetih aksioma mogu preslikati na odredjeno rasudjivanje u vezi sa prirodnim brojevima. Ova ideja — ideja, slobodnije rečeno, „obrojavanja" simbolske slike (a i ona je veoma opšta) pripada Gödelu;
- kao treću mogućnost interpretiranja simbolske slike navedimo onu kad se govori o tzv. modelima sistema aksioma ZF (odnosno i uopšte). Tada je, pored ostalog, poznat i tzv. Skolemov paradoks, prema kome, na primer, ukoliko je ZF neprotivurečna teorija, tada za nju postoji zadovoljenje, tj. model koji gradi skup N–prirodnih brojeva (znači *biti skup* se sada tumači kao *biti prirodan broj*) u odnosu na izvesnu binarnu relaciju $\in$ tog skupa.

I na kraju, nekoliko opštih reči direktno u vezi sa pitanjem postojanja, premda smo u celom izlaganju mestimice i o tome govorili. Po našem mišljenju korisno je da se u matematici pitanje postojanja tretira sa veoma blagim zahtevima. Odredjenije rečeno, smatramo da se, u slučaju matematike, *za nešto može reći da postoji ukoliko o tome umemo da mislimo, a da smo pri tom uvereni, da se, slobodnije rečeno „misli neće posvadjati", tj. nećemo doći do nekih suprotnih zaključaka.*

Tako, za neke matematičare se može dogoditi da ne priznaju postojanje, recimo, teorije grupa, aksiomatske teorije skupova i sl., kao što poput toga neki ljudi ne moraju prihvatiti postojanje, recimo, apstraktnog slikarstva.

U vezi sa navedenim gledištem o postojanju, istaknimo i sledeće. *Prvo,* pitanje postojanja doveli smo u direktnu vezu sa pitanjem *šta znači umeti misliti* — čije razjašnjenje je za sebe zanimljivo i veoma zamršeno. *Drugo,* naveden je i uslov „da se misli neće posvadjati". S tim u vezi pomenimo da se u svakodnevnoj matematičkoj praksi često i prirodno srećemo čak i sa *hipotetičkim postojanjem (pogodbenim postojanjem)* kada, naravno, unapred nismo ubedjeni da se „misli neće posvadjati". I tada nešto postoji sve dok ne dokažemo suprotno, tj. dodjemo do neke kontradikcije (odnosno „misli posvadjamo").

MATEMATIČKI INSTITUT – MATEMATIČKI VIDICI 3 (1979), str. 19–24

O RAZLICI ČISTE I PRIMIJENJENE MATEMATIKE U SVIJETLU MATEMATIČKOG POSTOJANJA

Zvonimir Šikić, Zagreb

I Što je predmet matematike? *Opisuje* li matematika predmete i koji je modus egzistencije tih predmeta? O čemu je riječ u matematici? Već kada je riječ o najosnovnijem, prvom predmetu matematike, (prirodnom) broju, naše se razumijevanje vrti u mnoštvu neodredjenosti. Pokušat ću objasniti odakle izvire ta neodredjenost, a time i nesigurnost koja je karakteristična za susrete s ovim pitanjima.

Konkretizirajmo pitanje do kraja: Na što možemo uputiti onoga koji pita što je broj 3? Nudjeni su razni odgovori, vezani uz realne predmete, njihova količinska svojstva, znakove, urodjene ideje, objektivne ideje itd. Po mojem mišljenju najjednostavnije i najpoučnije je upućivanje na odredjenu skupinu, na primjer palac, kažiprst i srednjak, kombinirano, a to je najbitnije, sa govorno–pokaznom podukom iz brojenja. Ova se sastoji u izricanju brojeva jedan, dva i tri, popraćenom pokazivanjem pojedinih članova uočene skupine (palac, kažiprst i srednjak). Osnovni prigovor ovoj poduci je upravo to da je ona puka poduka o upotrebi brojeva i da stoga unaprijed pretpostavlja jedan odgovor na pitanje, gdje su i što su brojevi, koji se tim postupkom prebrajanja vežu uz uočenu skupinu. Iz tog prigovora izrasta poznata Fregeova definicija prirodnog broja. Naime postupak u kojem se brojevi već unaprijed spominju, a koji je gore opisan, zamijenjuje se postupkom kojim se dovode u 1–1 korespondenciju dva skupa. U tom novom postupku brojevi se više ne spominju i time se na poznati način broj pokušava razumijeti putem razumijevanja korespondencije skupova tj. kao zajedničko svojstvo medjusobno korespondentnih (sličnih) skupova. Način egzistencije brojeva je time vezan uz način egzistencije skupova i njihovih korespondencija.

Ranije spomenuti prigovor i ovo razjašnjenje izviru iz jednog ontološkog pritiska – jednog zahtjeva da se za ono o čemu je riječ eksplicite utvrdi da jest i da se nadalje utvrdi što jest, to što jest, i gdje jest, to što jest (u kojoj sferi onoga što jest). Jedan daljnji ontološki pritisak (sada potaknut *svojstvom*, koje je zajedničko sličnim skupovima) dovodi Russella do ekstenzionaliziranja tog zajedničkog svojstva tj. do zaključka da je broj upravo skup svih medjusobno sličnih skupova. Ovaj pristup nosi u sebi sve one teškoće, koje donosi pokušaj razumijevanja korespondencije, pogotovo pokušaj razumijevanja korespondencije mimo svakog brojanja.

Sam ontološki pritisak ovime nije ukinut nego je premješten u jednu drugu sferu (no to i nije neki prigovor).

Ono na što sam želio upozoriti je to da je ovaj tip argumentacije, kojom dominira ono što sam nazvao ontološkim pritiskom, atipičan za matematiku. Moja je teza da je za matematiku, kada je zovemo čistom matematikom, konstituirajuće upravo to da je oslobodjena svakog ontološkog pritiska i da je u odredjenom smislu matematika upravo ono što je moguće mimo ontološkog pritiska. Konkretizirat ću tu tezu na već pokrenutom problemu (postojanja) broja u matematici.

Matematika brojeva ili aritmetika primjerom pokazuje kako je moguća znanost (i znanje) o brojevima mimo ontologiziranja broja. Predmet aritmetike nisu brojevi u Frege–Russellovom ili bilo kojem drugom ontologiziranom smislu, nego je njen predmet uloga brojeva u brojanju, a potom i spajanju, odbijanju, umnažanju, podjeli itd. Prisutnost te uloge u aritmetici realizirana je nosiocem uloge tj. brojevnim znakom (brojkom) i ta prisutnost omogućuje izvodjenje aritmetike. Uloga tih nosilaca odredjena je prvo njihovim nabrajanjem, u smislu potencijalne ostvarljivosti brojki, a potom njihovim zbrajanjem u smislu potencijalne ostvarljivosti zbrajanja brojki itd. Tu potencijalnu ostvarljivost obično kodiramo u obliku pravila:

Nabrajanje brojki

$$\Rightarrow 0$$

$$m \Rightarrow m|$$

Sumiranje brojki

$$\Rightarrow m, 0, m$$

$$m, n, p \Rightarrow m, n|, p|$$

Kada ovako odredjene uloge shvatimo kao transformaciona pravila brojevnih znakova možemo se složiti, ali samo u tom, a ne nekom poigravajuće formalnom smislu, s često ponavljanom tvrdnjom da aritmetika nije studij samih brojeva nego transformacionih pravila (potencijalno ostvarljivih) brojevnih znakova. To što u aritmetici ipak govorimo o brojevima implicite pokazuje neopterećenost tog govora ontološkim pritiskom. Razliku broj–brojka eksplicitamo tek onda kada želimo kao gore eksplicirati tu neopterećenost.

U vezi s postojanjem brojevnih znakova i transformacionim pravilima, koja odredjuju njihove uloge, potrebno je još reći slijedeće. Transformaciona pravila imaju normativni, a ne deskriptivni karakter. Takvim pravilom, kao što smo vidjeli, postavlja se *norma* potencijalnog ostvarivanja brojki, njihovog sumiranja itd. S druge strane brojevni znak se opire ontološkom pritisku svojom proizvoljnošću. Bilo što,

što jest, može biti brojevni znak (i nije jedino što jest). Upravo ta ontološka proizvoljnost brojki temelj je *izvodjenja* aritmetike, jer u njoj leži mogućnost (potentio) ostvarenja nove brojke, što omogućuje iskazivanje potencijalne ostvarljivosti u obliku ranije navedenih pravila.

U normativnom karakteru čiste matematike i ontološkoj proizvoljnosti, koja omogućuje njeno izvodjenje, leži njena sigurnost, ili kako se to katkada s ponosom i češće s nerazumijevanjem kaže njena vječna istinitost.

Dešava se medjutim, da se suočimo s tom sigurnošću, a da još nismo (ili možda više nismo) svjesni njenog izvora i tada ga, pritisnuti ontološkim pritiskom, želimo otkriti i pokazati tako, da (ontološki) zasnujemo *predmet* matematike, a nju shvatimo kao deskripciju tog negdje prisutnog predmeta. Jasno je da se u ontološkoj obaveznosti (inače izuzetno značajnoj) i deskriptivnom karakteru tako shvaćene *matematike* gubi ona sigurnost s kojom smo bili suočeni i do čijeg nam je izvora bilo stalo. U potrazi za samim izvorom sigurnosti mi postajemo nesigurni, pa se, zbunjeni time, počinjemo vrtjeti u mnoštvu neodredjenosti.

Treba stoga biti svjestan da jedno ontološko zasnivanje matematike (tj. zasnivanje matematike kao deskriptivne znanosti putem zasnivanja njenog predmeta) ne može imati onaj karakter sigurnosti, koji ima čista matematika.

II Nakon ovog, svakako ne dovoljno detaljnog, uvida u karakter čiste matematike i njenog zasnivanja, kazat ću nekoliko riječi o apodiktičkoj istinitosti matematičkih tvrdnji, kao i o logici te apodiktičnosti.

Gore prikazano razumijevanje čiste matematike brojeva, navelo nas je, da je u jasno odredjenom smislu shvatimo kao izučavanje transformacionih pravila brojevnih znakova. To izučavanje zahtjeva jedan govor, asertorički govor, govor kojim se tvrdi, govor tvrdnji.

Jedna jednostavna aritmetička tvrdnja je tvrdnja o potencijalnoj ostvarljivosti nekog izračunavanja (sumiranja, množenja itd.). Npr. jednom takvom tvrdnjom tvrdimo potencijalnu ostvarljivost trojke m,n,p primjenom pravila zbrajanja. Toj tvrdnji o potencijalnoj ostvarljivosti ili o konstruktibilnosti dajemo oblik $\vdash m, n, p$ ili uobičajenije $m + n = p$.

Apodiktička istinitost jedne takve tvrdnje leži upravo u potencijalnoj ostvarljivosti normativno usmjerenih izračunavanja. Ona je *osigurana* ostvarljivošću propisane konstrukcije, dakle ostvarljivošću jedne sinteze, koja nije deskriptivna nego normativno usmjerena (kazano starijim riječnikom apriorna). Možemo reći da je *značenjem* tvrdnje (u našem slučaju to je potencijalna ostvarljivost jedne konstrukcije) odredjen kriterij njene istinitosti.

Ne ostaje medjutim sve na govoru jednostavnih tvrdnji. Tvrdnje vežemo veznicima, negiramo, partikulariziramo, univerzaliziramo itd. U čemu je i što je istina pojedinih tvrdnji ovako bogatog asertoričkog govora? Koja su značenja tih tvrdnji?

Dokle god se u našem govoru zadovoljavamo jednostavnim vezanjem tvrdnji pomoću tzv. propozicionalnih veznika (uključujući i negaciju), značenja i kriterije istinitosti tako dobivenih tvrdnji u potpunosti razumijevamo dvovaljanim (klasičnim) shvaćanjem istine i laži kao predikata, koji se tvrdnjama pridaju ili odriču u skladu s tzv. tablicama istinosnih vrijednosti pojedinih veznika.

Da je to razumijevanje u skladu s razumijevanjem jednostavnih tvrdnji i da je taj sklad moguće na izvjestan način proširiti i na univerzalne tvrdnje pokazuje nam primjerom rekurzivna aritmetika kako ju je razvio Skolem 1923*. On je pokazao kako je moguće u rekurzivnoj aritmetici u potpunosti simulirati govor, propozicionalnim veznicima vezanih tvrdnji, čisto računskim govorom jednostavnih tvrdnji. Na taj je način čisto aritmetički fundirana jedna logika, ali lišena neposredne upotrebe partikularnog (egzistencijalnog) i univerzalnog kvantora. Jedna vrlo jaka aritmetika može se razviti na taj način.

Ostaje otvoreno pitanje, koje značenje imaju univerzalne i partikularne (egzistencijalne) tvrdnje? U čemu je i što je istinitost tih tvrdnji? Konkretno što znači tvrdnja: Bar jedan neparan broj je savršen, ili tvrdnja: Svaki neparan broj je nesavršen? Ukoliko pritisnuti ontološkim pritiskom razumijemo ovakve tvrdnje kao deskripcije aktuelno postojećeg područja brojeva (najčešće shvaćenog isključivo po analogiji s aktualno ostvarljivim tj. konačnim skupovima) tada su značenja tih tvrdnji deskripcije stanja stvari u tom području. Uvjet istinitosti odredjen tim značenjem je adekvacija deskripcije stanju stvari. Nesigurnost koja proizlazi iz tog razumijevanja već je naznačena. (Nadalje, ovaj uvjet istinitosti neke tvrdnje ne pruža ujedno i kriterij istinitosti.)

Ukoliko nam je i ovdje stalo do sigurnosti čiste matematike, mi već znamo gdje leži njen izvor. (On je opisan u prvom odjeljku.) Sada se dakle radi o tome da se zasnuje jedna (recimo po analogiji) *matematika* asetoričkog govora neopterećena ontološkim pritiskom. Ta matematika tj. matematička logika u jednom smislu čak i prethodi onoj ranije opisanoj (slobodno rečeno u onom smislu u kojem govor prethodi brojanju). Rekao bih još samo toliko da se tu radi o zasnivanju konstruktivne matematičke logike**.

*SKOLEM, Th. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veranderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. Skrifter Norske Videnskaps–Akademi, I, No. 6b, Oslo.

**Jedan drugi način suočavanja s tom nesigurnošću je Hilbertova metoda idealnih elemenata, koja se treba opravdati ispunjenjem njegovog programa. Bit metode je da se problematizirane tvrdnje (idealni elementi), liše svakog značenja i shvate samo kao pomoćno sredstvo putem kojega se omogućuje lakše utvrdjivanje istinitosti jednostavnih tvrdnji, čije nam je značenje jedino neposredno dano. U tu svrhu dopušta se izvodjenje tih tvrdnji i izvodjenja iz tih tvrdnji u skladu s manipulativnim principima, koji su slike logičkih principa, bilo konstruktivno bilo ontološki zasnovanih (kao što je npr. princip tertium non datur – naime jedno stanje stvari ili je aktuelno ostvareno u aktualno postojećem području ili nije). Medjutim porijeklo tih manipulativnih principa se metodički zanemaruje i previdja, tako da matematika postaje igra u kojoj samo mali dio ima direktno značenje i smisao. Ona se naknadno kao cijelina opravdava metamatematičkim dokazima konzistencije, koji bi trebali osigurati slijedeće (?): Svaka tvrdnja, koja ima direktno značenje (realni element) i koja se u okviru igre može dokazati, po samom svom značenju je istinita.

III Iscrpljuje li čista matematika, kako smo je ovdje razumjeli, svu onu aktivnost, prošlu i sadašnju, koja je kulturno i povijesno označena kao matematika? Sigurno ne. Van opsega čiste matematike ostaje primijenjena matematika tj. ona matematika koja prihvaća ontološki pritisak, koja je po intenciji deskriptivna. To je, primjerice, geometrija shvaćena kao deskripcija *postojećeg* prostora ili matematička analiza shvaćena kao *deskripcija* brojevnog pravca (kontinuuma) i promjenljivih veličina čija se promjenljivost mjeri funkcijama, koje ovise o argumentima s brojevnog pravca.

Po čemu je takva, *primijenjena* matematika još uvijek matematika? Može li se njena matematičnost uskladiti sa onim što smo do sada rekli?

U jednom smislu može. Primijenjena je matematika, istina, deskriptivna po svojoj intenciji, ona upućuje na svoj *predmet,* ali u samoj izvedbi ona teži onoj apodiktičnosti čiste matematike o kojoj je ranije bila riječ. Ta težnja očituje se u samom odnosu prema *predmetu* primijenjene matematike. Pretpostavke o prirodi tog predmeta uvijek se pokušavaju svesti na minimum. To je karakteristično.

Poučan primjer je aritmetizacija matematičke analize; zamjena infinitezimala, koji je tipičan proizvod ontološkog pritiska, graničnim procesom, procesom približavanja.

Programi koji su išli za tim da pruže sigurnost čiste matematike primijenjenoj matematici, oslobadjajući je ontološkog pritiska njenog predmeta, često su uspijevali samo u tome da zamjene njen predmet jednim novim predmetom, dakle da premjeste ontološki pritisak u jednu novu sferu (vidi str. 18). Poznati primjer je skupovno–teorijsko zasnivanje matematike.

Moja posljednja teza je da je teorija skupova (razvijena od Cantora na dalje kao teorija transfinitnih ordinala i kardinala), primijenjena matematika, u ovdje jasno naznačenom smislu, i da kao takva ne može služiti zasnivanju matematike. Naprotiv, pravi je zadatak da se upravo njoj pokuša pružiti sigurnost čiste matematike, zasnivanjem jedne *matematike* skupljanja i transfinitnog nabrajanja, u ontološki neopterećenom smislu. Mislim da je to do jedne mjere moguće, i to onda kada se radi o teoriji transfinitnih ordinala. (Možda je to i najznačajniji zadatak čiste matematike.) U slučaju transfinitnih kardinala sumnjam da je takvo zasnivanje uopće moguće. Zašto?

Teorija skupova se nakon burnog razdoblja svoje mladosti, u kojem je bila teško potresena antinomijama, koje su zbunjivale, konačno konstituirala kao deskripcija kumulativne, po tipovima izrasle, strukture skupova u Zermelovom smislu. Treba priznati da se od tada u teoriji skupova nije pojavila niti jedna antinomija. Medjutim, isto tako treba priznati da je kumulativna struktura prilično varljiva. Uglavnom je prihvaćamo školskim treningom i teško da imamo bilo kakav uvid u tu bogatu strukturiranost. Ontološki je ona potpuno nezasnovana. Sigurno nije zadatak čiste matematike da je *ontološki* zasnuje, ali tu se i ne radi o čistoj matematici nego o njenoj primjeni na nešto što se mora, ukoliko nam je stalo do sigurnosti, samo sobom tj. vanmatematički, ontološki osigurati. Takvi pokušaji su rijetki i prilično neuvjerljivi*.

S druge strane matematičkim izvodjenjem teorije skupova (za koje je karakteristično da se ne opterećuje ontološkim problemima) pokušava se, koliko je to moguće, zaobići ontološka obaveznost, koju nameće *predmet* izučavanja. Pokušava se s aksiomatikom; dakle, obavezati se što manje, što odredjenije, jasno to iskazati aksiomima i potom djelovati čisto matematički. Medjutim:

1. Matematički tretman se u ovakvim slučajevima, gotovo uvijek, služi i principima, koji su ontološki zasnovani (na primjer, tertium non datur), bez ispitivanja njihove matematičke opravdanosti (npr. Hilbertovom metodom spomenutom u fusnoti). Tu je prisutna jedna *prešutna* pretpostavka o ontološkoj zasnovanosti predmeta izučavanja.
2. Skolemov paradoks pokazuje da matematički tretman, bez obzira na snagu aksioma, sam po sebi ne obavezuje na velike kardinale. Drugim riječima, da bi rezultate takve teorije skupova shvatili kao rezultate o transfinitnim kardinalima nužna je interpretacija tih rezultata na kumulativnoj strukturi, što zahtijeva uvid u tu strukturu i njeno *ontološko* zasnivanje. To je i najjači odgovor na „Zašto?" iz pretprošlog pasusa.

LITARATURA

1. Goodstein, R.L., *Recursive Number Theory,* SL. Nort Holland, 1957.
2. Goodstein, R.L., *Recursive Analysis,* SL. North Holland, 1961.
3. Lorenzen, P., *Normative Logic and Ethics,* Bibliographisches Institut – Mannheim, 1969.

*J.A.Benardete, *Infinity–an Essay in Metaphysics,* Oxford University Press, 1964.

PISMENI PRILOZI

MATEMATIČKI INSTITUT – MATEMATIČKI VIDICI 3 (1979), str. 27–29

MATEMATIČKI PRAVCI I PROBLEM POSTOJANJA

Marica Prešić, Beograd

U vezi sa pojmom postojanja nekog matematičkog objekta pripadnici tri glavna pravca: logicizma, formalizma, konstruktivizma imaju različita gledišta.

Za *logiciste* postojati znači *biti istinit.* Bliže, neki objekat c koji ima svojstvo S postoji ukoliko vredi $(\exists x)\ S(x)$, tj. ukoliko je ta formula[1] istinita u okviru prihvaćenih logičkih aksioma i pravila izvodjenja. Prihvatanjem takvog gledišta ne može se dokazati postojanje, na primer, neke funkcije izbora, jer logicisti nisu skloni da uključe aksiomu izbora u logičke aksiome. Slično, ne može se samo na osnovu logike, recimo one izložene u Principia Mathematica, dokazati postojanje nekog objekta koji je karakterisan pripadnošću nekom beskonačnom skupu, jer ni aksioma beskonačnosti nije uključena u logičke aksiome. Medjutim, u nekim kasnijim varijantama logicističkih sistema (recimo neki Karnapovi sistemi u kojima se ne koriste imenski već koordinatni jezici) aksioma izbora prirodno proističe kao logička istina, pa se time dobija šira klasa matematičkih objekata za koje se može dokazati postojanje.

Osnovna teza *formalista,* tačnije samog Hilberta, u vezi sa postojanjem je: postojati znači *biti neprotivurečan*[2]. Pri tome se ne misli na, do tada obilato korišćene modelske dokaze neprotivurečnosti, već na sintaksnu neprotivurečnost u okviru odgovarajuće formalne teorije. Pri tome, rasudjivanja pomoću kojih takvi dokazi treba da budu izvedeni moraju biti strogo finitna (ne smeju se oslanjati na princip isključenja trećeg primenjen na beskonačne klase objekata, na aksiomu izbora, niti dokazi mogu biti izvedeni redukcijom na apsurd i sl.). Znači sve ono što su intuicionisti prognali iz svoje matematike Hilbert je prognao iz metamatematike. Još i više – prognao je čak i potencijalnu beskonačnost. Hilbert se nadao da se dokaz neprotivurečnosti može izvesti pomenutim finitnim sredstvima date formalne teorije. To, kao što znamo, nije uvek moguće, jer na osnovu Gödelovih rezultata sledi da svaka dovoljno bogata formalna teorija ima ograničenu deduktivnu moć. S druge strane na osnovu druge teoreme potpunosti sledi da su pojmovi sintaktičke i semantičke neprotivureč-

[1] Pri tome su x i S odgovarajućih tipova.

[2] To znači da u okviru neke teorije T postoji objekat sa svojstvom S ukoliko je $\{T, (\exists x)\ S(x)\}$ neprotivurečna teorija.
U poslednjim radovima Hilbert u svom mišljenju o postojanju odstupa na neki način od teze „biti neprotivurečan" i u metamatematici je zamenjuje sa „biti istinit".

nosti ekvivalentni pa da otuda nema potrebe bežati od modelskih dokaza.

Osnovna teza *intuicionista* je da postojati znači *biti konstruisan.* Toj tezi oni podčinjavaju i sam karakter matematike, ograničavanjem dopustivih matematičkih metoda.

Opšta karakteristika čisto egzistencijalnih dokaza je da se o postojanju nekog matematičkog objekta zaključuje ne njegovim dobijanjem iz prostijih objekata primenom niza konstrukcija, što je za intuicioniste jedini mogući način, već zaključivanjem da je logički neizbežno da takav objekat postoji. Pri tome se često u takvom rasudjivanju koriste princip isključenja trećeg ili metoda svodjenja na protivurečnost. Takve dokaze intuicionisti ne priznaju i smatraju da bi ujednačenje postojanja sa dokazom nemogućnosti negacije predstavljalo degradaciju matematike na praznu igru. Kratko, čisto egzistencijalna tvrdjenja su s tačke gledišta intuicionista besmislena. Za nekonstruktivne dokaze postojanja smatraju da oni mogu biti samo *povod* za traženje odgovarajućeg konstruktivnog dokaza. Tek kada je takav dokaz nadjen može se reći da je problem rešen. Medjutim kako bi se uopšte bez takvog „povoda" mogla rešiti, na primer, jednačina

$$3x^4 + 2x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0\ ?$$

Kako bi intuicionista uopšte mogao početi rešavanje te jednačine bez oslanjanja na čisto egzistencijalna tvrdjenja na osnovu kojih je jedan koren recimo izmedju 0 i 1. Kada je to tako, gde je onda mesto tome „povodu" u intuicionističkoj koncepciji. Ako taj „povod" nije matematika on očigledno nije ni besmisao, jer konstruktivan dokaz postojanja se bitno oslanja na egzistencijalnom. U koju onda od triju oblasti ljudske delatnosti: matematiku, nauku, jezik, spadaju takvi čisto egzistencijalni dokazi?

Postojati – biti konstruisan, je samo jedna vrsta postojanja matematičkih objekata; istina, za primenu najvažnija. Medjutim, i pre intuicionista je posebno istican konstruktivni karakter postojanja nekih objekata (recimo trouglova u geometriji i uopšte geometrijskih figura koje se mogu konstruisati šestarom i lenjirom). Zašto se odricati mogućnosti logičkih dokaza postojanja koji nisu konstruktivni kada nam gipkost našeg mozga to dozvoljava. Tim pre što pojam „konstruisati" nije jasno definisan, jer i medju intuicionistima postoji više shvatanja tog pojma. Mada Brauer energično osporava takvo mišljenje i smatra da postoji jedan apsolutni pojam konstrukcije, ipak danas moramo priznati da je taj pojam *relativan.* Može se definisati više pojmova konstruktivnosti preciziranjem od kojih objekata polazimo i koje su elementarne konstrukcije dozvoljene.

Izneli smo tri osnovna mišljenja o pojmu postojati. Kakva je njihova medjusobna veza? Očigledno najjače zahteve postavljaju intuicionisti, zatim bi došlo gledište logicista, dok su Hilbertovi zahtevi najslabiji. To bi bilo raslojavanje pojma postojati po horizontali. U okviru svakog od tih gledišta moguća su dalja raslojavanja. Tako moguće su ovakve i onakve definicije konstruktivnosti sa slabijim i jačim zahtevima, sa ovakvim i onakvim polaznim pojmovima.

Pored raslojavanja po horizontali, pojam postojati se raslojava i po vertikali. Setimo se da $T \vdash (\exists x)F$ znači da *postoji* bar jedan dokaz u teoriji T formule $(\exists x)\,F(x)$ Dakle, „postojati" na jednom nivou se oslanja na „postojati" na drugom nivou u ovom slučaju u meta–teoriji. Slično, u konstruktivnom slučaju $\vdash (\exists x)F$ znači da se *efektivno može naći* bar jedan a takav da vredi $F(a)$.

Na kraju istaknimo da je pojam postojanja u tesnoj vezi sa pojmom beskonačnosti. Jer, ako bismo radili samo sa konačnim skupovima problem postojanja uopšte ne bi postojao, jer u principu za svaki ma koliko veliki konačan skup može se proveriti da li u njemu postoji ili ne postoji element sa datim svojstvom. S druge strane, ako bi ljudskom iskustvu bio dostupan bar jedan beskonačan skup, egzistencijalan kvantor takodje nam ne bi bio potreban. S tim u vezi je i naše vreme, tj. ograničenost sa gornje strane svih vremenskih intervala u kojima se razvija ljudska delatnost. Ako bi postojao bar jedan beskonačan vremenski interval, recimo tipa ω, dostupan ljudskom iskustvu (recimo da je ljudski vek beskonačno dugačak i to tipa ω), čovek bi bio u stanju da efektivno izbroji svaki prebrojiv skup. U takvom slučaju egzistencijalni kvantori za prebrojive skupove (pa za intuicioniste kvantori uopšte) ne bi uopšte bili potrebni, a svi bi dokazi o postojanju bili efektivni. U takvom slučaju bi sigurno definicije postojanja, a posebno postojanja u konstruktivnom smislu, drugačije izgledale.

LITERATURA

1. E.W.Beth, *L'existence en mathematiques,* Gauthier–Villars, Paris, E. Nauwelaerts, London, 1956.
2. Susan Haack, *Philosophy of Logics,* Cambridge University Press, 1978.
3. S.Körner, *The Philosophy of Mathematics,* Hutchinson and CO, London, 1960.
4. J.Lakatos (editor), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London 1965, volume 1), North–Holland, Amsterdam, London, 1972.
5. A.A. Fraenkel, J.Bar–Hillel, *Foundations of set theory,* North–Holland, Amsterdam, 1958.
6. R.L. Vilder, *Introduction to the Foundations of Mathematics,* John Wiley and sons, INC., New York, London, Lydney, 1965.

MATEMATIČKI INSTITUT – MATEMATIČKI VIDICI 3 (1979), str. 31–35

REČ–DVE O OTKLONJIVOSTI NEKIH PRETPOSTAVKI U DOKAZIMA

Žarko Mijajlović, Beograd

Kada se govori o postojanju nekih matematičkih objekata, po pravilu se pretpostavljaju izvesni početni objekti konkretne konačne prirode, na pr. konačni nizovi znakova, prirodni brojevi, konačni skupovi, itd. Drugim rečima, ako se ne radi o postularnoj egzistenciji, znači hipotetičke vrste (a koja opet s druge strane ponekad može da bude više definicionog karaktera), pretpostavljaju se neki referentni objekti o kojima se u okviru same matematike retko raspravlja. Na primer, ako se uzme 0 kao inicijalni prirodni broj, ostali se izgradjuju korak po korak, što je kao ideja, recimo, prisutno i u Peanovoj formalnoj aritmetici. Tako, uzmimo da je izvestan prirodan broj, označimo ga sa n, kao objekt izgradjen u jednom trenutku. Da li se u istom momentu možemo pozvati na $n+1$ kao referencu? Matematika je takve prirode (ona je zainteresovana takodje za prirodne brojeve kao ukupnost), tako da je to pitanje u okviru nje bespredmetno. Verovatno u ovome nastaje provalija izmedju intuitivnih brojeva i odgovarajućeg matematičkog kontrapunkta. Može se jedino postaviti pitanje kako nastaje taj jaz, ali je jasno da je to pitanje najvećim delom *van* matematike.

Sa druge strane, u matematici su prisutne apstraktne ili ne do kraja razumljive ideje, koje se sreću, recimo, u dokazim konzistencije nekih fundamentalnih teorija kao što su razne formalizacije teorije skupova i aritmetike. Ovi koncepti (K. Gödel [4]) odnose se „ne na svojstva ili relacije izmedju konkretnih objekata, već se sastoje iz matematičkih konstrukta (kao dokazi, izrazi sa značenjem) i prema tome dokazi[1] zahtevaju da se sagledaju ove ideje, koje nisu proizvod kombinatornih (prostorno––vremenskih) svojstava znakova koji ih predstavljaju, već njihovog značenja".

Isto tako, u matematici postoje dokazi koji se odnose na jedno tvrdjenje, medjutim, medjusobno se razlikuju i ne retko je ta razlika zaista velika. Već na ovom mestu može se postaviti pitanje da li je razlog tome što postoje više logičkih argumenata odnosno matematičkih principa na kojima se zasnivaju ovi dokazi. U vezi sa tim obično se koriste izvesne opšte metode, odnosno hipoteze sa univerzalnim domenom, kao na primer Dirichletov princip u slučaju konačnih skupova, aksioma izbora (AC) ukoliko se radi o beskonačnim familijama skupova. Naravno postoje i drugi

[1] U kojima se ovi koncepti koriste.

argumenti koji su obično kombinatornog tipa, kao što su Königova lema o drvetima, Ramseyeva teorema, Kontinuum hipoteza (CH), aksioma determinacije (AD), najzad u taj niz se može staviti Churchova teza (o pojmu algoritma). U pojedinim sistemima ili situacijama ovakvi argumenti mogu biti medjusobno kontradiktorni, medjutim, plodnost njihove primene ne može se osporiti, bar na metodološkom nivou. Primene ovih argumenata mogu biti nezadovoljavajuće u odredjenom smislu, naime može biti takav slučaj da se neki princip očigledno primenjuje u jakoj formi, mada je intuitivno jasno da odnosno tvrdjenje to ne iziskuje.

Da bi se ovo razmatranje učinilo jasnijim, pogodno je da se izabere neka matematička osnova (u svakom slučaju da bi se logika učinila preciznom neophodno je da se prihvati neka razložna teorija skupova). U ovom slučaju za osnovu biramo ZF (Zermelo–Fraenkelovu) teoriju skupova.

U razmatranju različitih koncepta teorije modela slobodno se koriste konstrukcije u kojima se implicitno podrazumeva važenje izvesnih principa, kao na primer aksiome izbora, a gde–gde, prilikom iteracija nekih konstrukcija i univerzalna aksioma izbora (UAC). Sa druge strane, ako je reč o sintaksnim, tj. aritmetičkim svojstvima teorija, spomenimo neprotivurečnost, potpunost, odlučivost, eliminaciju kvantifikatora – može se postaviti pitanje o opravdanosti njihove primene. Na primer, primenom Loš–Vaughtovog testa na izvesnu teoriju T sa rekurzivnim skupom aksioma, dokazuje se da je T kompletna teorija, a otuda i odlučiva. U standardnom dokazu samog Loš–Vaughtovog testa koriste se izmedju ostalog Skolem–Löwenheimove teoreme, koje su sa druge strane ekvivalentne aksiomi izbora, dok odlučivost teorija po svojoj suštini intuitivno ne bi trebalo da upliće takav argument kao što je AC, pa ni bilo kakvu aritmetiku beskonačnih kardinala. Otuda, ukoliko je primenom Loš–Vaughtovog testa dokazano da je izvesna teorija T odlučiva, opravdano se postavlja pitanje da li je T *zaista* odlučiva. Drugim rečima, da li se primenom teorije modela i teorije skupova bilo šta gubi, odnosno dobija u odnosu na aritmetička svojstva teorija.

U opštem slučaju teoriji ZF dodaje se neka posebna aksioma φ (nazovimo φ uslovno jakom hipotezom), kao što su AC, CH, AD, V = L (aksioma konstruktibilnosti), MC (postulat o egzistenciji nedostižnog kardinala), a zatim se dokazuje neko tvrdjenje τ. Ako se recimo τ odnosi na prirodne brojeve, tj. τ je formalizacija nekog aritmetičkog svojstva, postavlja se prirodan zahtev da se na neki način φ eliminiše. Taj problem je kompleksan budući da je više činjenica povezano sa tim:

1. Prvo pitanje je da li je uopšte moguće izvršiti eliminaciju jake hipoteze, drugim rečima da li važi

$$ZF + \varphi \vdash \tau \rightarrow ZF \vdash \tau$$

2. Ukoliko prethodna implikacija važi i ukoliko posedujemo dokaz da $ZF + \varphi \vdash \tau$, postavlja se pitanje transformacije dokaza („unwinding proofs", G.Kreisel [7]), tj. konstrukcije novog dokaza za τ u okviru slabijeg sistema ZF.

3. U oba prethodna slučaja neophodno je razmatrati pitanje uniformnosti (prelaska sa sistema $ZF + \varphi$ na ZF), posebni slučajevi nisu toliko od interesa.

Premda su prethodna pitanja od prevashodnog značaja za problem eliminacije jake hipoteze ima i drugih, na primer, koji su dozvoljeni metamatematički argumenti za dokaz implikacije 1. Teorija ZF je dovoljna, budući da je ova formula apsolutna, ali bi svakako bilo bolje kad bi aritmetika imala istu funkciju.

Može se reći da postoje sredstva za ostvarivanje prethodnog cilja, mada se njima u većoj meri ukazuje na egzistenciju transformacije dokaza nego na stvarni postupak transformacije. Medju najznačajnije postupke svakako spada smeštanje objekata, odnosno formula kojim se ti objekti uvode, u neku od poznatih hijerarhija. Što se tiče teorije skupova, Levyeva hijerarhija ima ključnu ulogu i u vezi sa tim teoreme apsolutnosti Levya i Shoenfielda. Ove teoreme nisu značajne jedino za teoriju skupova, već i mnogo šire; na primer u teoriji modela (i ne samo tu) „... centralni pojmovi teorije modela su apsolutni i apsolutnost, za razliku od kardinalnosti, je logički concept" (G. Sacks [11]).

Da bi smo ilustrovali ove ideje razmotrimo neke primere.

1. Neka je teorija T sa rekurzivnim skupom aksioma, što znači da je predstavljiva nekom formulom u aritmetici (ili što je isto u $ZF - \infty$). Dalje, neka je $ZF + V = L \vdash$ „T ima model" i neka je Con(T) formula čije je značenje „T je neprotivurečna teorija" (umesto V = L može isto tako da stoji AC, UAC, CH, GCH). Sa druge strane $ZF + BPI \vdash (Con(T) \leftrightarrow$ „T ima model"), gde je BPI aksioma: „svaki filter Booleove algebre sadržan je u nekom ultrafiltru". Prema Shoenfield–Levyeovoj teoremi apsolutnosti (formula Con(T) je apsolutna), sledi $ZF + BPI \vdash$ „T ima model". Napomenimo da je teorija $ZF + BPI + \neg AC$ konzistentna (v. [3]), dok je $ZF \vdash AC \rightarrow BPI$.
2. Pretpostavimo $ZF \vdash Con(T)$ i neka je T^S Skolemova ekspanzija teorije T (tj. T^S je teorija T proširena odgovarajućim Skolemovim funkcijama). Konzistentnost teorije T^S uobičajeno se dokazuje uz pomoć AC. Medjutim, formula „$x = T^S$" je apsolutna, stoga takodje važi $ZF \vdash Con(T^S)$.

Pored aritmetičke hijerarhije poslednjih godina posebnu važnost u teoriji modela i uopšte u logici dobija hijerarhija Borelovih i projektivnih skupova teorije deskriptivnih skupova. Možda će se najbolje videti celokupna elegancija ovog pristupa, kombinovana zajedno sa metodama teorije modela, na sledećem primeru.

Teorema (M.D.Morley). Neka je T kompletna teorija prebrojivog jezika L. Ukoliko T ima bar $\aleph_2$ prebrojivih (neizomorfnih) modela, tada T ima $2^{\aleph_0}$ prebrojivih (neizomorfnih) modela.

Dokaz. Neka je $L^{H_{\omega_1}} = L_{\infty\omega} \cap H_{\omega_1}$, gde je H_{ω_1} = HC mnoštvo naslednoprebrojivih skupova. Tada su logike $L_{\omega_1\omega}$ i $L^{H_{\omega_1}}$ ekvivalentne. Neka je $\mathcal{A}$ prebrojiv model (otuda, može se uzeti da je $\mathcal{A} \in H$). Prema teoremi D. Scott postoji tzv. Scottova rečenica φ_A takva da je A jedinstven prebrojiv model koji zadovoljava φ_A. Preslikavanje $A \to \varphi_A$ je rekurzivno u H_{ω_1}, pa je skup $S \subseteq H_{\omega_1}$, $S = \{\varphi_A \mid A \models T, A \in H_{\omega_1}\}$ Σ_1 skup jer $\psi \in S \Leftrightarrow (\exists A)(A \models T, \psi = \varphi_A)$, (formula $\varphi = \varphi_A$ je Δ_1 formula zbog rekurzivnosti).

S druge strane, očigledno je kardinalni broj neizomorfnih modela teorije T jednak kardinalnom broju $|S|$. Koristeći preformulaciju Luzinove teoreme iz deskriptivne teorije skupova (svaki projektivni $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_2$ skup je prebrojiv, ima kardinalnost $\aleph_1$ ili $2^{\aleph_0}$, v. [9]), dobija se da svaki Σ_1 podskup od H_{ω_1} kardinalnosti $\geqslant \aleph_2$ ima za kardinalni broj $2^{\aleph_0}$. Kako je $|S| \geqslant \aleph_2$, to $|S| = 2^{\aleph_0}$.

Poslednji primer je instruktivan iz više razloga. Pre svega iskaz teoreme odnosi se na klasičnu teoriju modela, dok se u samom dokazu koriste sredstva infinitarne logike. Dalje, ovaj dokaz se sprovodi u HC koji je prirodno uopštenje mnoštva HF (R_ω, H_ω) nasledno konačnih skupova[1)], dok se u glavnom delu dokaza koristi u osnovi jedan konkretan rezultat iz deskriptivne teorije skupova, kardinalnost projektivnih $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_2$ skupova. Mada se na prvi pogled čini da Morleyeva teorema ne iskazuje mnogo, moramo imati na umu rezultate P.Cohena i naročito W.B. Eestena, prema kojima je pojam kardinalnog broja do krajnosti relativiziran; $2^{\aleph_0}$ može biti skoro bilo šta, na primer slabo nedostižan kardinal (zanimljivo je da je Dj.Kurepa to iskazao kao hipotezu još 1954. godine, [8]).

Prethodni primeri su bili pozitivni u smislu da su ilustrovali postavljeni cilj. Medjutim, to nije uvek slučaj, u klasu takvih rezultata možda se može svrstati ovaj:
$ZF + MC \vdash (\exists a)(a \subseteq \omega \wedge a \notin L)$, (L je konstruktibilni univerzum), dok *nije* $ZF \vdash (\exists a)(a \subseteq \omega \wedge a \notin L)$. Ovaj iskaz deluje neobično najviše zato što merljiv kardinal (ukoliko je uopšte ZF + MC konzistentna teorija) u izgradnji kumulativne hijerarhije skupova dolazi daleko posle prirodnih brojeva, medjutim, i pored toga *odlučuje* izvesna svojstva prirodnih brojeva. To samo pokazuje, što smo već spomenuli na početku, da u matematici referenca može da se pojavi mnogo kasnije, odnosno da je apriornost u njoj vrlo prisutna. Ili, jednostavno nijedan matematički objekt ne može se uzeti kao neko mitsko biće (v. J.Barwise [1]), već se svi moraju tretirati sa podjednakom pažnjom, bez obzira da li verujemo u njih ili ne.

U prethodnom nije se neposredno raspravljalo o egzistenciji u matematici, a pitanje je koliko je to raspravljivo. Cilj je bio da se ukaže na izvesne metamatematičke metode u analizi matematičkih fakata. Moguće je da je ovakav (ili neki sličan) način mukotrpniji, ali je izvesniji budući da se kroz saznavanje matematičkih činjenica posredno približavamo intuiciji i značenju nekih matematičkih objekata, a time i intuiciji njihove egzistencije.

1) Skup HF dobrim delom sve više prekriva u logici nekadašnju ulogu strukture prirodnih brojeva. Na primer Gödelizacija u skup prirodnih brojeva deluje veštački, moguće je da su prosti brojevi složeniji objekti od onoga šta kodiramo. Drugim rečima, sintaksa se daleko jednostavnije aritmetizuje u HF nego u N (v. [6]).

LITERATURA

1. J. Barwise, *Admissible sets and structures*, Springer–Verlag, Berlin 1975.
2. C.C.Chang, H.J. Keisler, *Model theory*, North–Holland, Amsterdam 1973.
3. U.Felgner, *Models of ZF–set theory*, Lecture Notes in Math. Springer–Verlag, Berlin 1971.
4. K.Gödel, *Uber eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes*, Dialectica 12 3/4, 1958.
5. H.J.Keisler, *Model theory for infinitary logic*, North–Holland, Amsterdam 1971.
6. G.Kreisel, G.E.Mints and S.G.Simpson, *The use of abstact language in elementary mathematics: Some pedagogic examples*, u knjizi Logic Colloquium, Lecture Notes in Math. Springer–Verlag, Berlin 1975.
7. G.Kreisel, *From foundations to science: Justifying and unwinding proofs*, u knjizi „Teorija skupova. Osnove matematike". Zbornik radova matematičkog instituta, n.s. knj. 1(10), Beograd 1977.
8. Dj.Kurepa, *Uber die Factoriellen der endlichen und unendlichen zahlen*, Bull. internat. Ac. Sci. Yougoslave, Zagreb, classe math. 4, 1954.
9. D.Martin, Descriptive set theory: *Projective sets*, manusuript (ne publik.).
10. Grupa autora, Mathematics and philosaphy (panel diskusija), u knjizi „Teorija skupova. Osnove matematike". Zbornik radova Matematičkog instituta, n.s.knj. 2(10), Beograd 1977.
11. G.Sacks, *Saturated model theory*, W.A.Benjamin, Inc. Reading, Mass. 1972.

MATEMATIČKI INSTITUT – MATEMATIČKI VIDICI 3 (1979), str. 37–39

PRIMJEDBE O TEORIJI I ALGORITMIMA DOKAZA. „PRIBLIŽNI" DOKAZI FORMULA

Mirko Mihaljinec, Zagreb

Ako je S_i formalna rekurzivno prebrojiva teorija prvog reda signature σ_i $(i = 1,2)$ reći ćemo da je rekurzivno preslikavanje $\tau : S_1 \to S_2$, uz neke prirodne uvjete, prijevod teorije S_1 u S_2 (jasno je npr. kako se može prevesti peanovska aritmetika u ZFC, neeuklidska geometrija (elementarna) u euklidsku, obje te teorije u teoriju realno zatvorenih polja, klasična aritmetika u intuicionističku aritmetiku itd.).

Postavlja se pitanje kako da se zadana teorija S prevede u što jednostavniju teoriju. Teorem o diofantovosti rekurzivno prebrojivih skupova (v. [1]) ima kao korolar da se svaka takva teorija može prevesti u teoriju Σ signature $\sigma = \langle 0, 1, +, \cdot \rangle$ koja je rekurzivno aksiomatizibilna aksiomima:

$$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$$
$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$
$$x + 0 = 0 + x = x$$
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$
$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$
$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$
$$(x_1 + x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$

pri čemu ako je $F \in S$ zatvorena formula tada je $\tau(F)$ $(\exists x_1, \ldots, x_n)\, f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ gde su f, g termi signature σ u kojima se ne pojavljuju varijable osim $x_1, \ldots, x_n$. Štaviše, $\tau : S \to \Sigma$ može se odrediti tako da bude $F \in S$ onda i samo onda ako je $\tau(F)$ dokazivo u Σ na taj način da postoje konstantni termi što uvršteni umjesto $x_1, \ldots, x_n$ daju $f = g$. Time se, npr., problem dokazivosti neke formule u ZFC svodi na rješavanje diofantske jednadžbe. $\varphi = f - g$ polinom je s cijelim koeficijentima s varijablama $x_1, \ldots, x_n$. Ova činjenica objašnjava zašto u primjeni raznih algoritama traženja dokaza (v. [2]) nisu moguće „aproksimacije" jer ako npr. treba dokazati formulu $F \in S$, a $\tau(F) \in \Sigma$ onda i samo onda ako $(\exists x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ gdje je φ nenulti polinom s cijelim koeficijentima takav da postoje cijeli $a_1, \ldots, a_n$ i takvi nenegativni cijeli $\lambda_{i_1, \ldots, i_n}$ da je $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} (x_1 - a_1)^{2i_1} \ldots (x_n - a_n)^{2i_n}$, tada je $\tau(F)$ dokazivo jedino uvrštenjem $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$.

Znamo da se uz rezultat svakog mjerenja navodi i ograda za apsolutnu grešku, dok je na nekom modelu svaka zatvorena formula odgovarajuće signature ili istinita ili neistinita. Navedeno razmatranje možda omogućuje da se uvede pojam približne istinitosti formula. Ako je $f \in Z[X_1, ..., X_n]$, $f = \sum_{i_1,...,i_n} f_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n}$ polinom s cijelim koeficijentima tada možemo reći da je jednadžba $f(x_1, ..., x_n) = 0$ rješiva s apsolutnom greškom $\leqslant a$ ako postoje $x_1, ..., x_n \in Z$, $|f(x_1, ..., x_n)| \leqslant a$, a relativnom greškom $\leqslant \epsilon$, ako postoje $x_1, ..., x_n \in$ takvi da je

$$\frac{|f(x_1, ..., x_n)|}{\sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i_1,...,i_n} |f_{i_1 ... i_n}|} \leqslant \epsilon .$$

Jasno je da za svaki $\epsilon \leqslant 1$ postoji rješenje s greškom $\epsilon \leqslant 1$. Ako je sama jednadžba rješiva tada je $\epsilon = 0$. Prema tome mogli bismo govoriti da smo neku formulu dokazali s većom ili manjom približnosti i to ocijeniti nekim brojem ϵ iz segmenta $[0,1]$. To je interesantno jer ako imamo neko ϵ – približno rješenje tada nije teško opisati algoritam koji možda daje bolje rješenje (pojedinosti izostavljamo, treba birati smjer iz tačke $(x_1, ..., x_n)$ u kojem je derivacija od f što manja, tako doći do neke druge tačke i ponoviti postupak).

Moguće je naći i neka pravila dedukcije. Ako je f polinom s cijelim koeficijentima od n varijabli, $\epsilon \in [0,1]$, neka $f \leqslant \epsilon$ znači isto što i $(\exists x_1, ..., x_n \in Z)\ |f(x_1, ..., x_n)| \leqslant \epsilon$. Ako su f, g polinomi od n, m varijabli neka $f \,\&\, g$ označuje polinom od $n + m$ varijabli koji je „direktna suma" polinoma f i g tj. $(f \,\&\, g)(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n) + g(y_1, ..., y_m)$ a $f \vee g$ polinom od $n + m$ varijabli koji je „direktan produkt" polinoma f i g. Ako su $\epsilon, \eta \in [0,1]$ tada

$$\frac{f \leqslant \epsilon,\ g \leqslant \eta}{f \,\&\, g \leqslant \epsilon + \eta}$$

$$\frac{f \leqslant \epsilon}{f \vee g \leqslant \epsilon} \qquad \frac{g \leqslant \eta}{f \vee g \leqslant \eta}$$

Ako su f, g polinomi tada ćemo s $f \Rightarrow g$ označiti polinom h (ako postoji) takav da je uz odgovarajuću oznaku i preimenovanje varijabli, posebno za polinom f i posebno za polinom g, $g = f \vee h$. Tada vrijedi:

$$\frac{f \leqslant \epsilon,\ (f \Rightarrow g) \leqslant \eta}{g \leqslant \min(\epsilon, \eta)}$$

Općenito, govorit ćemo o pravilu:

$$\frac{f_1 \leqslant \epsilon_1, ..., f_n \leqslant \epsilon_n}{F(f_1, ..., f_n) \leqslant \lambda(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)}$$

ako je F neki efektivni operator na polinomima a cijelim koeficijentima, λ izračunljiva funkcija i ako za svaki $\delta \in (0,1)$ postoje $\epsilon_1, ..., \epsilon_n \in (0,1)$ takvi da je $\lambda(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \leqslant \delta$. Prije navedena tri pravila zadovoljavaju te uvjete.

Moglo bi se postaviti pitanje o algoritmima traženja što bolje približne istinitosti neke formule. Prva faza u tome bilo bi sastavljanje što sadržajnije zbirke pravila. U drugoj fazi trebalo bi naučiti kako se neki, iz nekog razloga, interesantan matematički problem može dovesti u vezu s nekom diofantskom jednadžbom s tim da se i približno rješenje (a ne samo tačno) smatra interesantnim (dakako to interesantnijim što je ϵ manji). Takvu vezu, dakako, ne bi valjalo uspostaviti posredstvom ZFC, formalizirane aritmetike itd. na osnovu teorema o diofantovosti rekurzivno prebrojivih skupova (jer je to praktički neizvedivo).

Spomenimo samo jedan primjer. Traženje (racionalnog) broja čiji je kvadrat jednak 2 isto je što i traženje rješenja diofantske jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 0$. Iako ta jednadžba nema rješenja, ipak nejednadžba $|x^2 - 2y^2| \leqslant 1$ ima beskonačno mnogo rješenja koja su oblika

$$\frac{x_n}{y_n} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots \frac{1}{2}}}, \quad n = 1, 2, ..., \quad \epsilon = \frac{1}{|x_n| + |y_n| + 3} \to 0 \text{ kad } n \to \infty$$

($\frac{x_n}{y_n}$ približne su vrijednosti za $\sqrt{2}$).

LITERATURA

1. Ю.И.Манин, Десятая проблема Гильберта, Современные проблемы математики, Том I, стр.5-37, ВИНИТИ, Москва, 1973,

2. Chin–Liang Chang, Richard Char–Tung Lee, *Symbolic logic and mechanical theorem proving*, Academic press, New York, 1973.

MATEMATIČKI INSTITUT – MATEMATIČKI VIDICI 3 (1979), str. 41–43

PRILOG S PRIJEDLOZIMA ZA DISKUSIJU O TEMI „PROBLEM POSTOJANJA U MATEMATICI"

Kajetan Šeper, Zagreb

Ovaj pismeni prilog predstavlja popularnu skicu, a sadrži i nekoliko prijedloga za diskusiju. Dublju i širu i opsežniju studiju pripravio je, za zagrebačku sekciju Seminara, naš član Z.Šikić, koji je, iako najmladji, jedan od najupućenijih u taj problem povijesti filozofije i filozofije matematike.

Poznata je izreka, i često se izriče u raznim situacijama, da se *„od drveća ne vidi šuma"*, i to svaki put kada se želi istaći da je *pojedinačno* zasjenilo ili zastrlo *posebno* i *opće*. Za drugu krajnost ne poznajemo tako lijepe izreke, ona se obično izriče riječima „apstraktno", „nebulozno", „maglovito" i sl., a zloupotrebljavaju se i riječi „čisto", „pravo" i sl. Držimo da bi za tu drugu krajnost sasvim lijep bio obrat gornje izreke tj. da se *„od šume ne vidi drveće"*. Prema tim krajnostima stručnjaci se mogu podijeliti na dvije kategorije: jedni najvolju šumu (profesionalni apstraktizam) a drugi pak drveće (profesionalni konkretizam) – to su izraziti primjeri profesionalne devijacije i nefilozofijnosti. Uzroci? Smatram da su različiti i isprepleteni u gustu mrežu medjusobno uvjetovanih niti s dominantom kulturnog i povijesnog. Čuje se i izreka da je netko *„gluh za ovo"* ili *„slijep za ono"*. Velikani su voljeli od šume drveće i od drveća šumu, i nisu bili niti gluhi za ovo niti slijepi za ono, slušali su i čuli, gledali su i vidjeli.

Problem postojanja, onog što jest (grčki: to on) stari je filozofijski problem, a način kako se pokušavao riješiti, kako se rješavao, karakterizira svako filozofiranje.

Problem postojanja u matematici, postojanja u matematičkom smislu, matematičkog postojanja – zapravo problem koji su kao poseban problem postavili filozofi, filozofi matematike i filozofi – matematičari, i dalje ga rješavali, kasnije, zajedno s matematičarima–filozofima, osobito u novije doba – takodjer je stari problem i početak *filozofije matematike* i svakog matematičkog filozofiranja. Npr. prirodni brojevi s jedne strane, a geometrijski objekti i iracionalni (i realni) brojevi s druge. Taj jaz (konflikt, kriza) izmedju *aritmetičkog* i *geometrijskog*, *diskretnog* i *kontinuiranog* još do danas nije otklonjen, njegovo rješenje stalno odoljeva duhu vremena. Taj problem postojanja je nastao kada je matematičko znanje doseglo već vrlo visok stupanj razvoja i kada se bez svjesnog opredjeljenja i odnosa prema tom problemu nije moglo dalje razvijati. I ovdje se približno može reći: *„Kaži mi kakav odnos imaš prema problemu postojanja u matematici, reći ću ti što si i tko si u matematici".*

Iako ima nesumnjivo medjusobnih utjecaja filozofije i filozofije matematike i to višestupnjevitih i povratnih, a posebno preko tog problema, nije mi ovdje svrha (a i nisam u to toliko upućen) da pokušam o tome govoriti, nego bih samo želio ovdje podcrtati da filozofija matematike *nije „sipanje iz šupljeg u prazno a niti iz praznog u šuplje"*, nego da *jest sagledavanje „šume s drvećem i drveća sa šumom".*

„Razvoj matematike pokazuje da matematika u svakoj epohi sadržava, u vezi s vodećim filozofskim pogledima te epohe, probleme koji su polarizirani na centralne i periferne. Ta dva pola utječu jedan na drugi putem mnogih medjudjelovanja. Filozofija povijesti matematike izabire bitne, karakteristične crte u svakoj epohi. Takodjer, ona pokušava da sudi o tome koji su problemi bili vitalni u svakoj epohi i perspektivni za slijedeće epohe. S druge strane, ona ukazuje na probleme koji su bili sterilni i matematikpurmatematicistički. u cjelokupnoj evoluciji matematičkih ideja. Na osnovu svega toga ona usmjerava daljnja istraživanja i predvidja razvoj u budućnosti". (Citat iz *„A reflection upon philosophical and intimate motivation for research–work in mathematics".* Manuscript: 1967)

Uz *„Cogito, ergo sum"* mogle bi se razmatrati i ove sentence *„Sumnjam, dakle postojim", „Vjerujem, dakle postojim"*, a ja bih rekao *„Radim, djelujem, otkrivam, stvaram, dakle postojim".*

Bog je stvarao, i tada je postojao. Sada čovjek stvara, stvara boga, pakao, oružje, stvara ideje, revolucije, teorije, i zato *još* postoji.

Kada se govori o „postojati", govori se i o „otkriti" i o „stvoriti". Za mene je Kristof Kolumbo *otkrio* Ameriku a *ne stvorio*, ali grad Braziliju *nije nitko otkrio* nego su ga mnogobrojni arhitekti, urbanisti, radnici itd. *stvarali – gradili* su ga. Wagner je svoju glazbu *stvarao* (i *stvorio*!) a takodje J.S.Bach itd.itd., ali Mendelssohn–Bartholdy je mogao *otkriti* Bachovu glazbu (partiture) baš zbog toga što je već bila *stvorena*. Stare freske ljudi *otkrivaju* npr. skidanjem naslikanog sloja, ali nove freske i sl. ljudi *stvaraju* na zidovima novih gradjevina. Je li prirodne brojeve *stvorio* bog, a sve ostalo je *djelo* ljudi (u doslovnom, a ne prenesenom smislu riječi tj. u smislu da su prirodni brojevi za ljude datost), ili su i prirodni brojevi *djelo* ljudi?

Kada se govori da „postoji", treba odgovoriti na pitanje *što? gdje? kada? po čemu? kako? na koji način se uvjeravamo i s kojim sredstvima se služimo, dokazujemo, pokazujemo i sl.?*

$10^{10^{10}}$ je term a ne broj. Treba razlikovati *faktično* i s tim u vezi tzv. kanonski dokaz (dokaz u užem smislu) od *potencijalnog* (ili kako se katkada kaže u istom smislu načelnog, principijelnog) i s tim u vezi tzv. *indirektni* dokaz (ovdje u drugom smislu nego što je uobičajeno u običnoj matematici) (demostraciju ili dokaz u širem smislu).

(Opširno o tome možete naći u novijim radovima Dummeta i Prawitza [1], [2] str. 389––403, [3]). Zanimljiv je i stariji rad Scotta [4] o postojanju.

Faktički postoji pokaz da potencijalno postoji broj označen faktički postojećim termom $10^{10^{10}}$.

Treba razlikovati (nažalost!): 1) „postoji" *objekt* x, takav da vrijedi A(x); 2) „postoji" *dokaz* da postoji objekt x, takav da vrijedi A(x) tj. „postoji" dokaz formule $\exists\, xA(x)$.

Treba diskutirati položaj, značaj i dokaz Bolzano–Weierstrassovog teorema u 1) klasičnoj, 2) operativnoj, 3) intuicionističkoj i 4) konstruktivističkoj teoriji (matematičkoj analizi, matematici), da bi se mogao razmrsiti čvor *„Jest dva zeca, jest tri zeca".*

Smatram da *matematičku aktivnost* treba tumačiti kao *jedinstvenu* aktivnost duševnog (psihičkog) i društvenog (socijalnog) i jezičnog (lingvističkog) – kao *psiho–socio––lingvističku* aktivnost – i da se u povijesnim okvirima kristalizira *„prirodno" poimanje* i *zaključivanje*. Kome ne treba takvo prirodno poimanje i zaključivanje, taj se drži svoga kao pijan plota. Može mi se zamjeriti da se i ja držim svoga plota. Ako se to čini, treba znati da je moj plot ovaj: matematiku treba sagledati u razvojnom procesu; poznavati filozofiju matematike – barem dva sistema u povijesnom okviru; a tek nakon toga poučavati druge što je matematika danas, što je mogla biti danas, što treba biti danas, što će (možda) biti sutra. Tada se ne bi dogodilo da npr. takva dalekosežna i plodna i važna i prihvatljiva! ponuda von Neumanna matematičarima, da u svoju zgradu ugrade teorijsku kibernetiku, ostane izvan sfere interesa „čistih", pa čak i „primijenjenih" i „praktičnih" matematičara općenito (slobodan navod po Zadehu, usp. [5], tvorcu teorije „fuzzy" skupova). A da se o posljedicama takvog stava na nastavu matematike i ne govori! I da se o posljedicama tih posljedica na društveni značaj matematike pogotovo ne govori! Taj nedogadjaj po svojim posljedicama nadmašuje dogadjaj – propust novovijekih Elemenata.

LITERATURA

1. Dummet, M.: *The philosophical basis of intuitionistic logic*, pp. 5–40 in: Rose, H.E. and J.C.Shepherdson, eds., *Logic Colloquium* '73. North–Holland, Amsterdam, 1975.
2. Dummet, M.: *Elements of intuitionism.* Oxford, 1977.
3. Prawitz, D.: *Meanning and proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic. Theoria* 43 (1977), 2–40.
4. Scott, D.: *Existence and Description in Formal Logic*, pp. 181–200 in: Schoenman, R., ed., *Bertran Russell: philosopher of the century* Allen and Unwin, London, 1967.
5. Zadeh, L.A.: *Matematika – poziv na reorijentaciju. Dijalektika* (Univerzitet u Beogradu) 12(1977), br.4, 47–50.

MATEMATIČKI INSTITUT – MATEMATIČKI VIDICI 3 (1979), str. 45–76

DISKUSIJA

Napomena: Broj u zagradi označava redni broj diskutanta, a broj iza zagrade stranicu.

1. Božić Milan – – – – – (1)46, (14)56,57, (17)57, (52)71, (56)72,
2. Božović Nataša – – – – (55)72,
3. Djurić Milan – – – – (5)49,50,51,52, (39)69, (45)70, (47)70, (50)70, (63)74,75,76,
4. Kapetanović Miodrag – – (32)65,66,
5. Kirin Vladimir – – – – (23)60, (25)61, (28)61,62, (38)68,69, (41)70, (43)70, (53)71,
6. Mijajlović Žarko – – – (18)58, (24)60,61, (29)62,63, (44)70, (46)70, (48)70, (62)74,
7. Prešić Marica – – – – (16)57, (19)58, (21)58,59, (40)69, (42)70, (60)74,
8. Prešić Slaviša – – – – (4)47,48, (6)53, (9)54, (11)54,55, (13)55, (20)58, (35)67, (49)70, (57)72,73, (61)74,
9. Rosenzweig Dean – – – (31)64,65,
10. Svi – – – – – – – – – (27)61,
11. Šeper Kajetan – – – – (2)46, (7)53, (15)57, (22)59,60, (26)61, (36)67, (51)71, (58)73, (64)76,
12. Šikić Zvonimir – – – – (3)46,47, (8)53,54, (10)54, (12)55, (30)63,64, (33)66,67, (59)73,
13. Ugrin–Šparac Dimitrije – (37)67,68.

1) BOŽIĆ MILAN

Izuzetno mi se dopao pokušaj kolege Šikića u istraživanju korena onoga što je on nazvao čistom matematikom. Kroz svoje izlaganje je uspeo da nam nametne problem ontološkog pritiska kao pokretača traganja za predmetom matematike. Nema sumnje da je ono što je u referatu nazvano čistom matematikom, mada ja sve to ne bih nazvao čistom matematikom, zaista oslobodjeno ontološkog pritiska.

Medjutim, imam utisak da je, kroz izlaganje, pojam čiste matematike preširoko postavljen tako da je pokrio i metamatematiku koja svakako nije oslobodjena ontološkog pritiska. Naime, matematika je verovatno jedina nauka koja u sebi sadrži i sopstvenu introspekciju. U matematici se pojavljuju teoreme koje tvrde da su takve i takve rečenice teoreme. Teško da će se u fizici, na primer, ili u bilo kojoj egzaktnoj nauci, naći iskaz koji tvrdi da su takvi i takvi iskazi fizički zakoni. Kada se malo detaljnije razmotri ovo pitanje uvidja se da je mešanje metamatematike i matematike u okviru nje same upravo suštinsko mesto koje matematiku razlikuje od drugih nauka. Upravo metamatematika preuzima na sebe ontološki pritisak sa drugih delova matematike i omogućuje im da postanu čista,rekao bih i – raspredmećena, matematika.

Da zaključim. Mislim da matematika u celini nije oslobodjena ontološkog pritiska ali da mnogi njeni delovi, koji čine čistu matematiku, jesu. Metamatematika je upravo ta koja preuzima pomenuti ontološki pritisak na sebe. Verovatno je da je raspravljanje ovih odnosa jedan od budućih probnih kamenova osnova matematike.

2) ŠEPER KAJETAN

Ne bih htio uskratiti kolegi Šikiću zadovoljstvo i slast da diskutira s kolegom Božićem ali bih ipak samo rekao da termin čista matematika možda jest kriv, ali to nije važno, moglo bi se bilo kako nazvati. Ono što me malo smetalo to je proglašavanje tog dijela metamatematikom. A taj dio nema nikakve veze s metamatematikom. Metamatematika je nastala onda kada se jedna patološka matematika pojavila. Inače, ni danas nikome nije potrebna metamatematika ako je matematika dobra (iako može biti, i jest, izvanredno korisna).

3) ŠIKIĆ ZVONIMIR

Stvarno mislim da čista matematika nije jednaka metamatematici. Čista matematika je *izmedju ostalog* metamatematika, ali to držim njenim manje značajnim dijelom. Mislim da sam taj stav donekle i pokazao u referatu, navodeći kao primjer čiste matematike upravo rekurzivnu aritmetiku i analizu, dakle discipline koje se ne mogu nazvati metamatematikom.

Što se tiče termina čista matematika rekao bih još ovo: ja sam pokušao utvrditi što je stvarni karakter matematike, što nju bitno odredjuje? To je bilo pitanje. Učinilo mi se (i još sada mi se čini) da taj značaj nalazimo u *sigurnosti*, koja nas nosi kad „radimo" matematiku, koja je sam zahtjev matematičkog. Korijeni te sigurnosti pokazuju se u onom što sam nazvao normativnim karakterom matematike, za razliku od deskriptivnog, koji ontološki obavezuje. Sve što nosi *taj pečat* nazvao sam *čistim* (očišćenim od ontoloških pretpostavki) u matematici i taj *dio* matematike, koji služi kao uzor, nazvao čistom matematikom. Naravno da je i čista i primijenjena matematika matematika. Želio sam medjutim naglasiti da je primijenjena matematika i dalje matematika baš po svojoj težnji da se pročisti na ovaj način, da se riješi ontološkog pritiska. To je često moguće. Mislim da je to i kulturno–historijski pokazano, najbolje na primjeru infinitezimalnog računa.

4) PREŠIĆ SLAVIŠA

Pošao bih od jednog, na izgled lakog, ali, u stvari, veoma složenog pitanja, šta je, recimo broj *tri*. Pokušaću približno opisati kako je nastao, kako se pojavio taj, a slično tome i ostali prirodni brojevi. Radi toga zamislimo ovakvu situaciju – imamo neku prostoriju, u kojoj se mi ne nalazimo, a u kojoj su razne knjige. Dalje pretpostavimo da želimo saznati šta se u njoj nalazi i da, u tu svrhu, zamolimo jedno lice da dodje u zamišljenu prostoriju i obavesti nas o njenoj sadržini. Pretpostavimo još da to lice ne ume da priča, ali da ume da crta (u običnom smislu). U takvom slučaju, izveštaj o sadržini prostorije sastojaće se od crteža raznih knjiga. Pretpostavimo, sada, da je to lice više puta činilo opisani posao, tako da mu je na kraju dosadilo da podrobno crta knjige, nego, na primer, od jednog trenutka nadalje počinje da upotrebljava neke znake (crtice, putače X i sl.) kao zamenu tih crteža. I tako, takvi zamišljeni približni crteži, a slične je, na primer, još od davnina koristio pastir da bi ustanovio koliko ovaca sadrži njegovo stado, jesu prethodnice prirodnih brojeva. U njihovoj tvorbi takodje je značajan i korak u kome se, najzad, ti prvobitni crteži opisuju rečima *jedan, dva, tri*, itd. Jasno se uvidja da za nastajanje prirodnih brojeva bitnu ulogu ima okolnost što mi neke, inače medjusobno različite stvari, u izvesnom smislu ujednačujemo. I to je jedna od osnovnih odlika našeg uma. U vezi sa tim, pretpostavimo da su nam čula drukčija, i da, primera radi, nemamo čulo vida, pa dakle ne možemo na uobičajen način ni crtati, ali da smo za uzvrat u stanju da pipanjem okolnih predmeta stvorimo upravo dva utiska: *tvrdo, meko.* Da li bismo i u takvom slučaju imali potrebu da *napravimo* (ističem reč napravimo) pojam broja. Naravno, ne, odnosno svakako ne na način koji nam je dobro poznat i koji koristimo u svakodnevnoj praksi.

U vezi sa ovom misli o crtežu, koji je, u stvari, simbolska slika pomenuću još i ovo Moglo je da se desi da naš misaoni razvoj bude takav da brojevi budu jedina matematička tvorevina koju poznajemo. Na kraju, nekada, odnosno pre nekoliko vekova je tako i bilo. U takvom slučaju, u skladu sa tim, što su nam brojevi osnovna, skoro jedina, misaona sredstva u pristupanju i rešavanju raznih problema prakse, slobodnije ću reći da bi nam logika, shvaćena kao ukupnost raznih opštih umenja misaone prirode, bila brojevna. Medjutim, kao što znamo, uporedo sa takvom brojevnom logikom, uporedo se stvarala i jedna druga logika, geometrijska logika. I ona se na početku slično razvijala kao brojevna logika, odnosno uz prisutnost mnogih elemenata crtanja. Na kraju vi znate da mi mnoge geometrijske probleme, čak i teže, možemo rešiti skoro bukvalnim crtanjem. Primera radi, pretpostavimo da se nalazimo u tački A s jedne strane izvesne reke, da se sa druge strane reke nalazi neki predmet, recimo neka kula, u tački B, i da želimo odrediti rastojanja AB. Kako to možemo učiniti pod pretpostavkom da umemo da crtamo i da poznajemo, to je sada važno, osnovne činjenice o srazmerama? Pretpostavićemo takodje da imamo i uglomer. Zamislimo da podjemo iz tačke A, pod pravim uglom u odnosu na duž AB, i da posle, na primer, 30 metara dodjemo u tačku C. Pretpostavimo dalje, da smo, došavši u tačku C, izmerili ugao ACB i dobili rezultat 28 stepeni. Kako ćemo odrediti udaljenje AB? Pa, napravićemo crtež i kao što se ovca zamenjivala crticom, sada će se metar zameniti santimetrom. Uzmimo da na tako dobijenom crtežu rastojanje od nacrtanih tačaka A, B iznosi 58 cm. Dakle, stvarno rastojanje iznosi 58 metara.

Navedeni primer naravno pripada, moglo bi se reći, primitivnoj geometriji, skoro bukvalnom crtanju. Kako se geometrija dalje razvijala dobro je poznato, da o tome ne pričam. Medjutim, značajno je istaći da je u daljem razvoju, i istraživanja o brojevima i geometrijskih istraživanja nastao jedan opštiji, širi, matematički račun, jedna šira logika, odnosno, u stvari, sadašnja (klasična) logika. Dok aritmetika govori o pravilnostima brojeva i njihovih osnovnih operacija, geometrija o pravilnostima odnosa u prostoru, o kojim pravilnostima govori nov račun, odnosno logika? Može se približno reći da ona govori o raznim opštim pravilnostima relacije *biti član*. Na primer, ako je svaki član skupa A ujedno i član skupa B i ako je svaki član skupa B član i skupa C, onda je svaki član skupa A član i skupa C. Dakle, to je jedna opšta zakonitost relacije *biti član*, odnosno jedan od sastavaka znanja koja grade klasičnu logiku.

Medjutim, ja tvrdim da ne može biti jasno kakva će biti buduća matematika, možda će sutra nekome pasti druga ideja, drugi pristup, kojim bi se mnoge stvari uvele na sasvim drugi način. Jer ponovimo, u slučaju brojeva govori se o jednoj vrsti pravilnosti, u slučaju geometrije o drugoj, a u slučaju logike imamo još opštije pravilnosti. Inače, pristup pomoću tako izgradjene logike je, kao što znamo, opštiji, jer tim pristupom su obuhvatljiva i prethodna dva. Medjutim, sutra se može pojaviti neki sasvim nov pristup. Uostalom svedoci smo raznog traganja ka raznim uopštenjima i produbljivanjima klasične logike, tj. predikatskog računa prvog reda.

5) DJURIĆ MILAN

Izvinjavam se što će moje izlaganje biti uglavnom improvizacija. Razlog tome je da sam za predmet ovog sastanka saznao dosta kasno – pred sam polazak u Zagreb. Prvi trenutak, kad sam o predmetu počeo i razmišljati, bio je jutros, pošto sam pročitao Vaš (Šeper) članak, koji je dostavljen kao prilog diskusiji. Prema tome, sve što ću ovde reći je ili vezano za pomenuti članak ili je osvrt na ono što sam, ovde, od pojedinih kolega čuo.

Čuli smo, ovde, neka gledanja na matematiku kao ljudsku aktivnost u širem smislu, upoznali smo se sa nekim njenim standardnim podelama, istorijskim presecima itd. Čuli smo, medjutim, i neka ekstremna mišljenja, na primer u izlaganju kolege Božića, da je matematika autonomna delatnost, nezavisna od ostalih ljudskih delatnosti i da je kao takva dovoljna sama sebi.

Jasno je da se ovakvi stavovi ne mogu prihvatiti. Da bismo to pokazali poćićemo od jednog pitanja, koje bi se pri pozitivnom odgovoru moglo usvojiti i kao gledište, a koje je sasvim suprotno već iznesenom stavu. Pitanje je sledeće: *da li je matematička aktivnost samo refleksija u našem razumu onoga što se dešava u prirodi, što mi, zahvaljujući sposobnosti našeg intelekta, dalje obradjujemo, stvarajući izvesne apstraktne pojmove i entitete i uopštavamo, stvarajući složenije pojmove i entitete?* Da li je ona, onda, kao takva, odvojiva od prirodnih (i ostalih) nauka ili se kroz nju ili u okviru nje, na dovoljnom nivou apstrakcije i sa dovoljnom količinom pojmova i zakona, može ostvariti jedinstvo tih nauka? Ako bismo usvojili ovakvo gledanje, a mislim da možemo, na što ću se vratiti i kasnije, onda je zadatak matematike, u širem smislu, da otkriva strukturne mehanizme realnih objekata (načine na koje su oni stvarani iz objekata nižih nivoa – atoma, molekula itd.), da otkriva fenomene u prirodi uvodeći pojmove i zakone koji će opisivati te fenomene itd. Jasno, svi ti mehanizmi i pojmovi su pri tome dignuti na izvestan nivo i oslobodjeni konkretnog sadržaja, dok je za način izražavanja usvojena simbolika i, naravno, deo našeg govornog jezika.

Vratimo se sada i na istorijski momenat. Simptomatično je, a što inače ide u prilog gornjem stavu o jedinstvu nauka na nivou apstrakcije, da se logika javlja u isto vreme kada počinju i razmišljanja o strukturi materije. Osnove logike date su već kod Aristotela; mora se, na žalost, priznati da od tada do danas, sem u tehnološkom pogledu, nije mnogo učinjeno na tom planu. Razvoj prirodnih nauka i matematike tekao je u početku paralelno. Kasnije, kada se razvoj matematike podigao na nivo apstrakcije i simbolike, veza sa drugim naukama je zaboravljena. To znači da nas, u ovom trenutku, ne interesuje predistorija razvoja matematike. Otud i ovakva mišljenja o potpunoj autonomnosti matematike.

Pored gledišta o matematici kojeg smo napred izneli, a koje inače polazi od njene apriorne i istorijske veze sa realnošću, moglo bi se poći i od drugog gledišta, koje je inače ovde prisutno, da je *matematika samo igra u okviru izvesnih, po našem mišlje-*

nju, dobro zasnovanih sistema i da onda kao takva zaista nema nikakve veze sa realnošću. Medjutim, može se pokazati da se i u ovom slučaju – u okviru ovakvog gledišta – može iznaći veza sa realnošću, ali koja je sada samo implicitna.

U našoj matematičkoj aktivnosti, mi se uvek opredeljujemo, prema afinitetu i nekim motivima, za neki sistem. Medjutim, svaki put kad se opredelimo za neki sistem, postajemo tim sistemom i psihološki opterećeni. Naime, vera u taj sistem ne dozvoljava nam da vidimo i ono što je izvan tog sistema, a ne opterećuju nas ni pitanja njegovog začetka. To znači da, kada se opredelimo za neki sistem, nas samo interesuju unutrašnji odnosi u sistemu i njegove konkretne realizacije (interpretacije). Veza sa realnošću nas apsolutno ne interesuje. Medjutim, veza se može naći u samoj postavci sistema i njegovom osmišljavanju kao i u našoj intuiciji. Da pojasnim ovo zadnje. Kada operišemo sa apstraktnim pojmovima kažemo da su ti pojmovi nezavisni od realnosti. Medjutim, moramo poći od činjenice da je u našoj intuiciji kroz iskustvo i spoznaju o ranijim pojmovima ugradjena jedna istorijska veza sa realnošću. Ona je prisutna u izgradnji svakog sistema. Tako, na primer, kada stvaramo jezik u okviru nekog sistema i postavljamo pravila igre u njemu, mi, ustvari, oponašamo jezik prirode i njenih strukturnih formi, iako nismo svesni te činjenice. Šta mi zapravo radimo u postavci jednog sistema? Oslanjajući se na intuiciju, a to znači na dovoljan broj spoznajnih informacija, dobijenih na razne načine, mi stvaramo u našem razumu (mentalnu) sliku nekog fenomena ili dogadjaja u prirodi. Jasno, mi idemo dalje: obuhvatamo tu sliku u izvestan broj pojmova i zakona koji ih vezuju, a, onda, u igri, pomoću pravila koje smo usvojili, dobijamo potpunu sliku. Ovo je sada apstraktna slika oslobodjena konkretnog sadržaja. Nadalje, mi postavljamo pitanje pouzdanosti te slike. U tu svrhu tražimo teorije, a samim tim i deo prirode, koje se uklapaju u nju. Mogli bismo postaviti i jedno generalno pitanje vezano za realnost: koliki deo realnosti je obuhvaćen jednom ovakvom apstraktnom slikom; mislim na realnost u najširem smislu – na sve ono što egzistira u našem univerzumu? Svakako, ne veliki, jer je teško poverovati da se čitava živa i mrtva priroda sa svojim raznovrsnim strukturnim formama na raznim nivoima, kreativnim procedurama, sposobnostima kreiranih objekata, kao što je na primer samoduplikacija itd., može obuhvatiti u mali broj jednostavnih pojmova, zakona i kreativnih postupaka koje mi, bar do sada, znamo. Ovo su pitanja koja zaslužuju posebnu pažnju i daleko više prostora i vremena.

Sada bih se vratio na citat koji sam video kod kolege Šepera, a koji glasi ovako: *„Sumnjam, dakle postojim; vjerujem, dakle postojim, a ja bih dodao: radim, djelujem, otkrivam, stvaram, dakle postojim".* U ovom citatu imamo tipičnu identifikaciju postojanja sa kreativnom sposobnošću. Prema tome bi se izveo zaključak da postoji samo ono što stvara, iako znamo da postoji i ono što nema takve sposobnosti – to je čitava mrtva priroda. Na ovom mestu bih se šire pozabavio pitanjem „postojati". Mi, kao svesna bića, koja u konfrontaciji sa prirodom želimo izvesnu dominaciju, gledamo i na ovo pitanje sa takvog stanovišta. Prema takvom gledištu, pos-

toji samo ono što mi možemo registrovati bilo čulima bilo aparatima koje smo konstruisali za otkrivanje fenomena u prirodi. Znači, pitanje postojanja je relativna kategorija zavisna od naših čula i aparatura. Napravio bih za trenutak digresiju i postavio pitanje pred konstruktivnu matematiku – da li je i ona ovakva? Naime, mi, i u ovoj matematici, ustanovljavamo egzistenciju entiteta, koji su samo matematičke prirode, pomoću izvesnih kreativnih postupaka, za koje znamo, a koji odgovaraju aparaturama u slučaju realnosti.

Mogli bismo sada uporediti naše kreativne sposobnosti, u širem smislu, sa onim koje poseduje priroda. Naše kreativne sposobnosti dolaze, pre svega, do izražaja u analitičkom i sintetičkom delovanju našeg mozga, organa koji stvara, koji od prihvaćenih činjenica generiše mnoge složene činjenice i sisteme. Objekti, koje stvaramo u našem razumu, su apstraktni ili idealni objekti. Za njih bi se moglo reći da su potencijalno ostvarljive tvorevine, a samo je pitanje tehnologije i vremena kada će se i konkretno realizovati; neki od njih će, verovatno, i ostati samo potencijalne tvorevine.

Priroda, s druge strane, raspolaže sa gotovim tvorevinama. Asortiman ovih tvorevina je zaista ogroman. Medjutim, ni naše mogućnosti: umne i tehnološke nisu ni izdaleka iskorišćene. Zbog toga je i teško odgovoriti na pitanje o odnosu naših sposobnosti i onih koje poseduje priroda a da ne bude ubrzo korigovano. Slično bi se moglo odgovoriti i na pitanje: Kojim objektima treba davati prioritet: onim, koji su gotove tvorevine ili onim, koji postoje u našem razumu – idealni objekti. Veza izmedju ove dve kategorije objekata zahteva posebnu studiju. Ja ću se na ova pitanja vratiti u jednom posebnom radu.

Vratimo se ponovo na citat: Verovatno bi se citat mogao preformulisati ovako: *postoji sve ono što je stvoreno na neki način iz nečega.* Ako bi se usvojilo ovo stanovište, konstruktivna matematika, ne samo da bi imala smisla, već bi imala i dominantan položaj u odnosu na ostale matematičke koncepcije. Jer, ovo je stanovište koje prihvata samo gotove – kreirane tvorevine, a konstruktivna matematika je upravo takva. Ako je reč o gotovim tvorevinama u matematici, pitanje tvorca je suvišno. Medjutim, u slučaju gotovih tvorevina u našem univerzumu, realne tvorevine, može se postaviti pitanje tvorca. Ja se na ovakvim pitanjima neću zadržavati, jer ona vode u spekulacije i hipotetične stavove i tvrdnje. Dovoljno je prirodi priznati kreativnu sposobnost i u dalja pitanja te vrste ne ulaziti.

Citat bi se isto tako mogao preformulisati da glasi: *postoji sve ono čiju sliku možemo stvoriti u našem razumu.* Ako bi se usvojilo ovo gledište, tada bi pojam „postoji" postao relativna kategorija. Prema njoj, idealni objekti bili bi dominantni u egzistencijalnom smislu. Gotove tvorevine bi tada bile samo materijalne realizacije idealnih objekata. Realizacija, jasno, zavisi od tehnoloških mogućnosti u raznim vremenskim razdobljima; ovde mislim na tehnološko–matematičke mogućnosti u prvom redu. Pri ovakvom stanovištu, na konstruktivnu matematiku bi se moglo gledati samo kao na tehnološko–realizatorsku mogućnost u ovom trenutku. Na taj način ona više nebi zadržala apsolutnu dominaciju, kao koncepcija, u smislu postojanja, već samo u smislu naših realizatorskih mogućnosti; odredjivala bi samo trenutni domen na ovom planu.

Sada bih se osvrnuo na izlaganje kolege Prešića. Prema ovom izlaganju pitanje postojanja zaslužuje samo blag tretman, pošto to i nije posebno važno pitanje, da postoje razna značenja ovog pojma i da „postoji" nije samo konstruktivna kategorija. Ovo su neka od pitanja na koja bih se osvrnuo, kasnije ću se osvrnuti još na neka. O većini ovih pitanja ja sam već dao svoj sud. I, mislim, da ovakva pitanja zaslužuju pažnju jer odredjuju filosofske koncepcije. A da nije sve konstruktivna kategorija, to sam već izneo. Medjutim, kolega Prešić je, navodeći primer nekonstruktivnog pojma, naveo pojam lepote. Za ovaj i slične pojmove iz domena emocija rečeno je da nisu konstruktivni. Mislim da ovo ne stoji. Naime, prema informacijama koje primamo na neki način – putem zvučno'telesnog kretanja, vizuelno itd. mi u našoj svesti konstruišemo emocionalni objekt nekog umetničkog dela ili nekog doživljaja itd. i u isto vreme stvaramo valuaciju tog objekta. Prema tome, to jeste kreativan objekt, ali čija samo valuacija zavisi od raznih psiholoških momenata. Znači, taj objekat je samo teži za valuaciju i u raznim trenucima može imati različite valuacije; jer, on je i psihološka kategorija.

Još nešto iz ovog referata u vezi postojanja beskonačnih skupova (kardinala) u odnosu fizičkih teorija i realnosti. Da li je beskonačno nesklad izmedju mogućnosti naših čula i mogućnosti našeg intelekta? Jasno, mogućnosti intelekta su ispred. Mi, svakako, možemo prihvatiti postojanje ovih skupova kao tvorevina našeg uma, a to znači kao idealne objekte. Medjutim, sa tehnološkog stanovišta oni su neprihvatljivi jer su nerealizabilni. To znači da ih ni konstruktivna matematika ne može prihvatiti. Inače, što se tiče fizičkih teorija i molbe prirodi da se ponaša prema njima, mislim da se takodje ne može prihvatiti. Naime, kao što je i kolega Šikić rekao, svaka primenjena nauka sputana je izvesnim okvirima. Takva je i fizika. Sigurno je da mi, u matematici, na nivou apstrakcije, nemamo tih ograničenja, već imamo širok manevarski prostor koji pruža mogućnosti našem intelektu da se razmahne. U tom trenutku nas i ne interesuje realna interpretacija. Sasvim je druga stvar sa primenjenim naukama, fizičkim na primer. Ove nauke rešavaju konkretne situacije te zahtevaju i konkretnu verifikaciju . Jedno je jasno, svaki put kad postavljamo neku teoriju koja će se baviti nekim fenomenima i drugim pitanjima vezanim za prirodu neophodno je saznajno ovladati tim delom prirode da bi i teorija koju gradimo bila bez „rupa". Daljim saznanjima mi te teorije proširujemo obuhvatajući nove fenomene, dogadjaje itd. Primer je klasična i relativistička mehanika. Fenomeni koji su van dometa klasične mehanike obuhvaćeni su relativističkom mehanikom. Isto tako, kvantni fenomeni koji su van domena klasične mehanike obuhvaćeni su kvantnom mehanikom itd. Prema tome, ako gradimo teoriju koja pretenduje da opiše deo prirode bez dovoljno informacija o tom delu prirode onda ćemo sigurno moliti prirodu da se tako ponaša. Inače, ograničenost domena neke takve teorije ne znači da ta teorija nije dobra; tako se, na primer, govorilo i govori za klasičnu mehaniku u odnosu na relativističku.

6) PREŠIĆ SLAVIŠA

Ja bih samo jednu rečenicu. Mislim da se radi o nesporazumu. Pomenuto je da je neko rekao da je matematika igra. U stvari ja to nisam rekao i ja se toga, ako je to meni stavljeno, odričem. Rekao sam da matematički zapisi ili simbolske slike dopuštaju da se prevedu na posebnu igru simbola. Pomenuo sam da je to itekako važna stvar i da je jedan od najzaslužnijih koji je kroz istoriju matematike to primetio svakako Hilbert. I da nije te stvari, pitanje je da li bismo od matematike imali toliko mnogo primena, posebno u računarskim naukama.

7) ŠEPER KAJETAN

Ja bih samo u vezi s izlaganjem kolege Djurića rekao da bih se s njime u mnogo čemu složio, a u mnogome ne. Ne bih mogao direktno odgovarati na postavljena pitanja, jer mi je njegova diskusija bila preopsežna. Zato se neću osvrnuti ni na velike referate – sada.

8) ŠIKIĆ ZVONIMIR

Rekao bih još nešto o ovcama, crtama i brojanju. Slažem se sa interpretacijom prof. Prešića i mislim da ona dobro konkretizira i neke teze iz mojeg referata: Što se dešava pri prijelazu sa knjiga na crte, sa jedne slike (knjiga) na drugu sliku (crta)? Što time radimo? Mi djelujemo u skladu s jednim transformacionim pravilom. Takvim jednim pravilom izražena je bit brojanja. Jer što znači da *tih* knjiga ima odredjen broj; uopće da *ta* skupina ima svoj broj? Upravo to da *ona* može poslužiti kao brojka. Kako? Brojanjem. Jer samo brojanje nije ništa drugo nego transformacija jedne brojke (jedne slike) u drugu brojku (drugu sliku). Na tom primjeru jasno se otkriva i ontološka proizvoljnost takvog djelovanja. Bilo što može poslužiti kao brojka. Tako kao što reče prof. Prešić od ovaca ili knjiga prelazimo na crte, pa potom na neke riječi itd.

Želio bih se sada osvrnuti na neke teme, koje su pokrenute referatom prof. Prešića. Prvo u vezi s pravilom σ kojim se svi predmeti, koji imaju neko svojstvo skupljaju u *skup* predmeta koji imaju to svojstvo. Kada matematičar radi s takvim skupovima on ih vrlo vjerojatno odmah pomišlja kao cjelovite predmete. (Odatle valjda i taj prijelaz.) To naravno nije nužno i W.O. Quine je svojom virtuelnom teorijom skupova pokazao kako samo to pravilo ne implicira takvu ontološku obaveznost; do odredjenog momenta. Do onog momenta u kojem matematičar počinje kvantificirati skupove dobivene pravilom σ. Tada se pretpostavka da su to stvarni (matematički) predmeti neda eliminirati i *virtuelna* teorija postaje *stvarna* teorija skupova. (Sjetimo se Quineove najpoznatije izreke: „Biti znači biti vrijednost varijable". Varijable naime kvantificiramo.) Što se dešava tom kvantifikacijom? Tako kvantificirajući mi govorimo o *svim* onim skupovima dobivenim pravilom σ (jer to su sada predmeti), koji imaju neko svojstvo. Potom ih pravilom σ skupljamo u skup predmeta, koji imaju to svojstvo. Tu se naravno otvaraju vrata Cantorovog raja: Kada smo već jednom dopustili kvantifikaciju po skupovima dobivenim pravilom σ (čitaj: opredmećenje skupova dobijenih pravilom σ) nema razloga da se postupak ne ponavlja. I tu se javljaju oni pravi problemi vezani uz beskonačnost. Bitnu ulogu pravila sigma u matematici shvaćam nekako na ovaj način. Ne znam da li se s tim slažete?

9) PREŠIĆ SLAVIŠA

Dakle kad počnemo da radimo s tim. Da. U stvari ja sam samo onda istakao da je u pitanju ekstrapolacija starog iskustva.

10) ŠIKIĆ ZVONIMIR

Druga tema koja potiče na razmišljanje bila je analiza pitanja: kako matematički rješavati probleme? Zamolio bih prof. Prešića da nam ukratko, koliko je to sada moguće, iznese svoje pogleda i na pitanje: Kako se uopće postavlja problem kao *matematički* problem? Za odgovor na prvo pitanje vrlo je slikovito i uvjerljivo upotrebljena slika snimača, koji je „matematički dobro opremljen". Tu je problem predmetnut, a snimač mu prilazi da ga riješi sa svojom „opremom". U drugom pitanju možda je skrivena mogućnost da samog snimača otkrijemo i kao uzročnika ne samo rješavanja nego i postavljanja problema. (U terminima mojeg referata: Je li problem samo deskriptivno predmetnut ili je ta predmetnutost možda i posljedica njegovog normativnog postavljanja?) Da ne duljim: Zanima me što Vi mislite o ovom drugom pitanju?

11) PREŠIĆ SLAVIŠA

U stvari, evo kako sam ja mislio. Pomenuo sam da je moglo da se desi da je stepen naše razvijenosti, kulture takav da mi jedino poznajemo brojeve, odnosno da su naša rasudjivanja matematička samo ako se odnose na brojeve. U takvom slučaju, u vezi sa datim problemom pridružujemo, ja sam rekao nadevamo brojeve. Tu imamo pretpostavku da se brojevi prirodno mogu povezati sa izvesnim odrednicama problema. Medjutim, šta su, u stvari, odrednice problema? Priznajem da je to pitanje, koje ste vi isterali na čistac, veoma teško. Ja sam se u svom prethodnom izlaganju trudio da ne navodim nikakav eksplicitan odgovor o tome. Jedan pokušaj odgovora je ovakav: Za problem možemo pretpostaviti da je najpre izrečen običnim jezikom, pa u skladu sa tim da su nam približno jasne odrednice izražene tim jezikom. Matematičkim pristupom problemu mi tim delovima jezika, tim odrednicama pridružujemo, nadevamo ove ili one matematičke pojmove. Tako, ako poznajemo samo brojeve, mi se trudimo da nadevanjem brojeva, reći ću i obrojavanjem, obuhvatamo značajne delove problema, tj. odrednice problema i da potom na osnovu te veze, uz prethodno rešenje prisutnog brojevnog problema, raspletemo zagonetku povezanosti stvari u problemu, odnosno rešimo problem.

12) ŠIKIĆ ZVONIMIR

Pri kraju Vašeg referata bila je postavljena teza (inspirirana Hilbertovom ali nešto šire shvaćena od njegove) da nešto postoji ukoliko smo sigurni da o tome možemo misliti tako da se naše misli ne posvadjaju. O toj tezi vrijedi razmisliti. Mislim da je ona prihvatljiva ukoliko smo svjesni koliku težinu u njoj nosi ova sigurnost u nemogućnost svadje naših misli. Kako doći do te sigurnosti? Svoj referat shvaćam kao pokušaj eksplikacije te sigurnosti izvedene pod imenom čiste matematike. Drugu mogućnost pruža Hilbertov program, koji takodjer svoje polazište nalazi u uvidjanju „sigurnog", ali jednim potezom i u globalu, pod imenom finitnog; s tim uvidom se onda pristupa glavnim zadacima *formalizacije matematike* i time omogućenog *meta–izučavanja matematike.* Mislim medjutim da ovaj drugi pristup nema onu širinu koju ste vi željeli zahvatiti?

13) PREŠIĆ SLAVIŠA

To jeste teško pitanje i nije lako reći da li mi uopšte možemo dati zadovoljavajući odgovor. Medjutim, želim ovo da istaknem. Ovo što sam rekao možda je nebitno, to jest, to je samo malo nadopunjavanje hilbertovskog gledišta ali ja nisam zagovornik onoga, da u nekom strogom matematičkom smislu postoje stvari o kojima se priča, itd.; dakle nema toga, nego dosta blaže upotrebljavam te reči. Ali vidite, to je važno, ja sam istakao da se u Hilbertovo vreme ova teza odnosila samo na slučajeve izražene predikatskom logikom, a ja ponovo ističem: ko zna kakva će biti matematika sutra. Kažem čak ovo: Ubedjen sam da se mogu uopštiti pojmovi operacije, relacije i ko zna koje druge stvari, pa i sadašnja logika. Ako je aritmetika skup pravila, pravilnosti u vezi sa brojevima, onda je sadašnja klasična logika skup RC pravilnosti. Odakle RC? R–relacija, C–konstanta. Dakle, imam predmete, imam veze medju njima i sad imamo skup nekih uočenih pravilnosti, a možda će sutra biti nešto drugo, neki drugi način gledanja na stvari, dakle moguće je da se otkrije neka druga skupina pravilnosti, sigurno šira, i možda će biti lakše da pomoću takve opsežnije skupine pristupamo stvarima. Uostalom, mi smo svedoci raznih pojačanih logika koje se koriste. Uvode se razna pravila, na primer beskonačna, i to otprilike ide ipak na tu stranu, kako sam pomenuo.

14) BOŽIĆ MILAN

Bio sam u nekim diskusijama apostrofiran pa bi hteo to da raščistim. Kolega Djurić je govorio o insistiranju na autonomiji, odnosno nekim tonovima koji su inspirisani idejom o autonomiji matematike. Tu sam bio i ja apostrofiran. Baš naprotiv, ukoliko to nije bilo jasno, ponavljam: ja insistiram na tome da ja nikako ne insistiram na autonomiji matematike nego čak naprotiv hoću da kažem da je ona daleko od toga da bude autonomna, jako, jako daleko. Potom što se tiče kolege Šikića. Govorilo se o igri simbola i prof.Prešić se distancirao od toga da je on to rekao, u stvari rekao je Šikić da je matematika igra simbola, ali u jednom pohvalnom smislu, da je to jedna vrlo dobra igra čak toliko dobra kao fudbal, i s čim bih se ja složio. Potom ovaj nesporazum što se tiče čiste matematike i metamatematike. Ukoliko se na kraju složimo da je čista matematika, matematika oslobodjena ontološkog pritiska, ili recimo rasprednećena matematika, onda smo se otprilike našli na izvesnoj aproksimaciji koja je nužna za ovakva uprošćavanja. Sad bih hteo da rezimiram nešto drugo što proističe iz ovih diskusija. Uglavnom se to najviše osetilo kod prof. Prešića i mislim da tu žicu treba više izvući. Lebdi neka statičnost u našim razgovorima o matematici. Ne samo u našim, nego uopšte ako čitate članke po raznim matematičkim časopisima koji dozvoljavaju da se piše o ovakvim osetljivim temama ili ako recimo čitate razne dodatke na knjige iz matematičke logike vi ćete videti vrlo iscrpne, vrlo temeljne analize na koje je utrošeno mnogo pameti, i vremena i čega god hoćete, ali u kojima stalno lebdi neka statičnost neko bavljenje datim stanjem stvari. Možda je matematika sama kriva tome. Takva je nauka da daje utisak neke celovitosti, neke nepokretnosti. Često puta ćete od laika čuti, šta se baviš matematikom kad se tu već sve zna, dok je, na primer, u fizici svaki laik ubedjen da tu ima šta da se istražuje mada ne ume da kaže šta to ima da se istražuje. Ja mislim da zato, baš zbog toga tu žicu treba izvući. Prof. Prešić je u početku svoga izlaganja rekao da je pitanje postojanja stvar prošlosti u matematici, i jako je dobro čuti ovde jednu stvar sa kojim se ja potpuno slažem. Dakle, Šikić je u isto vreme insistirao na nestajanju ontološkog pritiska što je jako blisko prethodno pomenutom stavu. Naime, suština stvari i jeste u tome, matematika se, s obzirom da baš nije autonomna, razvijala kako se razvijao i ljudski duh. Nažalost, ontološka pitanja i pitanja postojanja su u stvari nasledje judeo–hrišćanske filozofije i celog koncepta života koji je primila ova nesrećna evropska zapadna civilizacija. To je Evropa vukla dve hiljade godina, na kraju ova matematika kojom se mi bavimo je evropska matematika, nije to kineska matematika. U suštini oslobodjenje od ontološkog pritiska i bacanje u zadnji plan tih pitanja postojanja je u stvari rezultat isčezavanja uticaja; ne isčezavanja, jer uticaj svakako postoji, nego borbe novih zbivanja u domenu ljudskog duha sa tim judeo–hrišćanskim konceptom. Matematika s obzirom da je najstarija nauka, i najrazvojnija od svih nauka, ja to hoću da podvučem, je ta koja je verovatno prva krenula u taj prodor. Ona je prva počela da se oslobadja od tih pritisaka, po mom mišljenju zbog toga što se ona najduže od svih nauka razvija i taj je proces eliminacije izuzetno dugo trajao u matematici. Vi u fizici ne možete tako lako da eliminišete izvesna data prosto zbog toga što stalno s njima baratate, opterećeni s njima, a matematika time nije opterećena. Mislim da bi jednog dana trebalo provesti diskusiju i istražiti upravo procese koji su do ovoga doveli. Mi smo konstatovali neka stanja ali je zanimljivo zaključiti kako je do tih stanja došlo. Prof. Prešić je postavio pitanje kakva će biti buduća matematika. Ja to zaista ne znam ali mislim da mogu da vam kažem kakva će biti buduća filozofija matematike. Nama zaista isčezavaju ti ontološki problemi iz matematike ali ja pretpostavljam da će se pojaviti neke druge stvari. Nešto što je trenutno aktuelno, na primer razna psihoanalitička istraživanja. Već postoje takva izučavanja, možete da pronadjete čak i knjige na tu temu. Mislim da će se tu krenuti, to je prof. Prešić dobro osetio insistirajući na psihofizičkom uticaju uopšte, našeg ustrojstva. Ja bih tu potcrtao još istorijsko i možda psihoanalitičko koje će nam izvući na površinu ko zna kakva čuda i djavole, ali s tim treba da se suočimo, zašto da ne. Na kraju krajeva, hteli mi to ili ne ta matematika odslikava izvesna naša psihološka stanja. I to čak važna psihološka stanja, jer to su psihološka stanja celine, dakle psihološka stanja jednog celog društvenog bića, a ne pojedinca.

15) ŠEPER KAJETAN

Inače, o ovome što je sada zadnje rekao kolega Božić ima u Trostnikovu, pri kraju njegove knjige „Konstruktivni procesi u matematici”. To je možda najmoderniji spis o toj problematici i vrijedi ga pročitati.

16) PREŠIĆ MARICA

Ja bih se prvo osvrnula na diskusiju prof. Prešića. To neće biti bračna rasprava, a odnosi se na onaj deo diskusije o nastanku broja *tri* i uopšte prirodnih brojeva. Tu se ne bih složila, prvo s onim primerom da do brojeva uopšte ne bismo došli ukoliko bismo bili u stanju da razlikujemo samo tvrdo i meko. Nasuprot, mislim da bismo baš u takvom slučaju došli do pojma broja. Jer, ako smo u stanju da razlikujemo samo dva utiska, a u stanju smo da primamo više od dva utiska, onda ćemo, kad već opipnemo dva puta i zaključimo da je dva puta nešto tvrdo, to na neki način iskazati ... .

17) BOŽIĆ MILAN

Tu smo uveli pretpostavku o vremenskom kontinuitetu i mogućnosti zapažanja vremenskog sleda. To je nova pretpostavka.

18) MIJAJLOVIĆ ŽARKO

Mora postojati interakcija izmedju objekta i onog koji ga ispituje.

19) PREŠIĆ MARICA

Smatram, dakle, da se pojam broja javio baš zbog toga što smo mi bili u stanju ili što smo morali, to je pitanje, da izvršimo ujednačavanje naših utisaka i ujednačavanje predmeta, ukoliko dopustimo pretpostavku da ti predmeti na neki način postoje. Ukoliko bismo bili u stanju da razlikujemo sve predmete, ukoliko bi nam svaki utisak uvek bio nov, dakle, ako kad gledamo bilo kakvu gomilu vidimo sve čestice u toj gomili, recimo sve atome, sigurno ne bi došlo do potrebe za pojmom broja. MIslim, da bi tada jedini način da se takva potreba ukaže bio, da imamo neki mehanizam koji broji sve naše utiske od početka do kraja života.

20) PREŠIĆ SLAVIŠA

Nisam ovo sasvim jasno rekao; ukoliko bismo imali samo dva utiska da oni ne bi neophodno doveli do brojeva. Ja nisam to sasvim kategorički tvrdio i slažem se s ovom napomenom, da u slučaju dva utiska može da se desi da oni nalože, ako pretpostavljamo da se ti utisci ponavljaju u toku vremena, potrebu stvaranja brojeva. Ja sam tu zaista delimice pogrešio. Ako mi tri puta doživimo istu stvar, ta putnost da tako kažem, ta višestrukost može dovesti do brojeva, to je tačno, ali tu se sada javlja element vremena.

21) PREŠIĆ MARICA

Sada bih se vratila na problem postojanja. Najpre bih uputila jedno pitanje prof. Šeperu, na ono njegovo radim, delujem, otkrivam, stvaram, dakle postojim. Nije mi jasno šta to znači u matematici. Onda na trećoj strani: „Kad se govori da postoji treba odgovoriti na pitanja, što, gdje, kada, po čemu, kako, na koji način se uvjeravamo i kojim sredstvima se služimo, dokazujem, pokazujemo i sl.". Sa ovim bih se složila potpuno i, ako sam ja dobro ovo razumela, odgovorom na ova pitanja bi se došlo do različitih pojmova postojanja. U skladu s mogućim odgovorima na ova pitanja dobili bismo razne definicije postojanja. To bi bilo raslojavanje pojma postojanja, ja sam to u svom pismenom prilogu nazvala raslojavanje po horizontali. Naime, u okviru raznih pravaca teorija, podteorija itd. u zavisnosti od jačine uslova koje namećemo na taj pojam doći će se do raznih definicija. Ja ću samo pomenuti, u tom smislu bi najjača definicija bila definicija konstruktivnog postojanja. Tu su uslovi najjači. Objekt koji zadovoljava te konstruktivne uslove je nekako najopipljiviji i za praksu najvažniji, s tim moramo da se složimo. Dalje, naredna po jačini bila bi definicija logicista: postojati znači biti istinit, odnosno da se postojanje može dokazati korišćenjem logičkih aksioma i pravila, i najzad bi došlo postojanje po Hilbertovoj definiciji: postojati znači biti neprotivurečan. To već istaknuto Hilbertovo „biti neprotivurečan" je mnogo uže i tu se misli u sintaksnom smislu, što su vrlo jaki uslovi. Zatim bi došla definicija prof. Prešića koja je dosta slabija: postojati znači biti neprotivurečan, to je parafraza na Hilbertove misli, ali Hilbertovi uslovi su mnogo jači. Sad mi nije jasno gde bi došla definicija postojanja profesora Šepera.

To bi bilo raslojavanje po raznim teorijama, neka vrsta raslojavanja po horizontali.

Medjutim, čini mi se da postoji i raslojavanje pojmova i po vertikali. Ukratko, postojanje na jednom nivou se definiše pomoću postojanja na drugom nivou. Setimo se Hilbertove definicije, postojati znači postoji dokaz za to i to. Ili modelski, postojati znači postoji model. Konstruktivno postojati znači postoji konačan niz konstrukcija tako da se dobija taj i taj objekt. Znači, postojanje na jednom nivou se definiše pomoću postojanja na drugom nivou. To je moja teza. Dakle, smatram da od postojanja ne možemo pobeći, ne možemo definisati taj pojam bez korišćenja pojma postojanja na nekom drugom nivou. Mogu reći, da smo mi već takve slične primere imali kad je bilo pitanje beskonačnosti, isto takvo raslojavanje – beskonačnost na jednom nivou definiše se pomoću beskonačnosti na drugom nivou. Recimo, u nominalističkom smislu za pojam beskonačnosti koristi se predpojam beskonačnosti skupa reči nad nekom azbukom. Dakle, potencijalni pojam beskonačnosti ima kao pretpostavku potencijalno beskonačni skup reči obrazovanih od konačne azbuke. Mislim da je situacija u vezi s pojmom „beskonačno" slična kao s mnogim drugim značajnim matematičkim pojmovima, da postoji to raslojavanje po vertikali. Tako se i pojam *postojati* ne može definisati bez nekog drugog pojma *postojati*. To bi bila druga teza.

22) ŠEPER KAJETAN

Ja bih samo kratko odgovorio, i to jer sam upitan. Opet je diskusija trajala predugo, a moj mozak je konačnog kapaciteta! Budući da je tema „problem postojanja", a vi ste o tome govorili i pitali, onda ću samo o tome govoriti. Dakle, što vi kažete da postoji raslojavanje postojanja, to je sigurno. To se vidi baš po tim pitanjima: što, gdje, kada, po čemu, kako, na koji način se uvjeravamo i kojim sredstvima se služimo, dokazujemo i sl. Vidite da su tu upotrijebljene riječi dokaz, pokaz itd. baš zbog toga razlikovanja. To je prije svega jedna konstatacija o stanju znanstvene svijesti, jer to jedino mogu vidjeti kod ovog šta mu šta znači i kod onog šta mu šta znači. Ali ja idem dalje pa na str. 41 smatram ovu matematičku aktivnost kao jedinstvo psihičkog, sociološkog i lingvističkog, kao psiho–socio–lingvističko jedinstvo, i smatram da se u povijesnim okvirima jasno kristalizira *„prirodno* poimanje i zaključivanje" u tom smislu da se u razvoju tih ideja ide, tako zamišljam, ipak prema apsolutnom a ne ostaje se na ovakvom relativiziranju, iako preko takvog relativiziranja kao nužnog. Ono je zgodno primijetio kolega Djurić, kada je prof. Prešić u početku akcentirao konstruktivno postojanje, što se meni vrlo svidjalo, ali kao da se to izgovorilo radi nas tu nekih. To je možda jedan nesporazum, jer ja i postojanje u konstruktivnom smislu shvaćam samo *privremeno.* To raslojavanje se u konstruktivizmu može vanredno dobro pratiti. Još i više, danas se baš i razvijaju takve *teorije* gdje se to precizno može pratiti i o tome raspravljati. Kod mnogih viših teorija, kako bih rekao, možda po vertikali ili horihontali, nisam to baš dobro razumio ali nekako tako, gubi se najedanput ta razlika i bez onog ontološkog ne znam uopće kako se to može shvatiti – tako da je to vrlo težak problem. Ali ovo što smatram o prirodnom i privremenom, to se već sada istražuje. Dakle, smatram da se već sada vidi težnja, a mislim da će se ubuduće sve više razvijati i razradjivati, da taj „postoji" u matematici ili barem u dijelu matematike ima ono *izvorno i praiskonsko značenje.* Na to nas upućuje praksa. U tom pravcu nas usmjeruje praksa. U tom smislu smatram da ima nešto apsolutnije od onoga što se inače, kada sam tamo pitao što, kako, i po dokazu, i po pokazu, u aktualnoj matematičkoj zbilji danas vidi.

23) KIRIN VLADIMIR

Ja sam to mogao i nasamo raspraviti sa kolegom Mijajlovićem ali čini mi se da će kakve–takve koristi imati i drugi.

Da li se može ovdje u lijevom stupcu[1] (eliminacija φ, transformacija dokaza), i onaj tamo čak i ovako da interpretira: ako se već ne može bez φ, onda se može naći srodan njemu problem (jer se uroni u neku od hijerarhija, kao što su aritmetičke, Kleene–Mostowski-eva, itd.)? Jesam ja to dobro shvatio ili ne, to sad nije važno. Mene zanima vaš osjećaj, ili ste možda već pokušali s tim u vezi, o ovome. Čitajmo sad gornje: $ZF + \{\varphi\}$ daje ψ, a tamo neka bude: ako je skup formula računa predikata prvog reda konzistentan, onda ima model. To neka je ψ, a φ neka je aksiom izbora. E sad, kako barem naći najslabiju formulu φ jer, sva je prilika, da to neće bez aksioma izbora ići, jedan osjećaj mi govori, ne znam zašto. Do sada poznati dokazi na jednom odlučnom mjestu koriste u nekoj formi φ. Imate li osjećaj za to, bi li se to dalo napraviti?

24) MIJAJLOVIĆ ŽARKO

Što se tiče potpunosti koju ste pomenuli, ona je ekvivalentna sa stavom kompaktnosti, a ovaj je, kao što se zna, slabiji od aksiome izbora. Sada je, mislim, jasno zašto treba da bude prisutna neka forma aksiome izbora, jer na kraju krajeva mi modele konstruišemo u teoriji skupova.

[1] Pitanje se odnosi na prilog Ž.Mijajlovića „Reč–dve o otklonjivosti..." čiji se matematički tekst delimično nalazio napisan na tabli.

Recimo, moguće je i ovo pokazati. Ako dodate i neke druge aksiome, na primer, aksiomu konstruktibilnosti ili kontinuum–hipotezu, koje su veoma jake, i ako dokažete neprotivrečnost neke teorije, tako što konstruišete model koristeći ove aksiome; onda postoji način da, recimo pomoću Levijeve hijerarhije i Levi – Schoenfield-ove teoreme apsolutnosti, dokažete da postoji dokaz i bez ovih aksioma.

Ovaj rezultat je van sumnje zanimljiv. Ovde se u stvari radi o jednoj teoremi egzistencije, odnosno, tvrdi se egzistencija jednog dokaza. Naravno drugo je pitanje stvarna konstrukcija jednog takvog dokaza. To je u suštini drugi i daleko teži korak, za koji su potrebne sasvim druge transformacije. No bez obzira na neefektivnost ovakvog dokaza, smatram već samo tvrdjenje o njegovom postojanju od velikog značaja za osnove matematike.

25) KIRIN VLADIMIR

Teorem kompaktnosti izgleda ovako, kad ga gledate očima teorije skupova, puno bliži. Smeta to što je ipak aksiom izbora, ali čini se jako slab oblik, ostao. A sad dokaz da se ne da bez aksioma izbora.

26) ŠEPER KAJETAN

A u ovom dokazu da se to ne da, je li bi prihvatili aksiom izbora?

27) SVI – Neeeeee!

28) KIRIN VLADIMIR

Meni se nekako čini da ovo pitanje realiteta biva to jače što je ontološki pritisak slabiji. Drugim riječima, ovakve diskusije koje smo mi danas vodili ekonomisti uopće ne vode. Vi dobro znate da su društveno–političke teorije osnovane na teoriji viška vrijednosti premda se točno ne zna što je sama vrijednost, jer društvena vrijednost nije samo odpredmećeni ljudski rad. Ja ću vam navesti jednu vrijednost koja se ne može steći ljudskim radom. Da budete stjuardesa, morate biti privlačen vanjštine, ali to se ne stiče ljudskim radom. Dakle, tamo medju ekonomistima, nema takvih diskusija jer je ontološki pritisak na vrijednost velik: svak razumije šta je vrijednost.

E, sad drugo je u vezi sa Fregeom. Najbolje je skupiti zajedno sve one koji imaju neko svojstvo, pa uzeti taj skup umjesto svojstva. Tako matematičar radi kad ima na raspolaganju ekstenzionalnost. Zato je najbolje uzeti sve tročlane skupove, pa to uzeti kao matematički pandan ili predmet koji se naziva broj tri. Ali, to se ne smije napraviti jer svi tročlani skupovi po Gedel– Bernajsu čine pravu klasu i ne smiju se skupiti zajedno.

Još nešto bih dodao uz misli prof. Prešića. Ja bih htio reći dve–tri reči protiv evidentnosti da konačni skupovi postoje. Meni se čini da je to tehničko pitanje matematičara. Kada matematičari rade, što više te semantike truse unutra, to im je voda mutnija. A to je njihovo tehničko pitanje kao u kirurgiji: da li se to ide sprijeda, kroz trbuh, ili straga do bubrega. Skupovi, meni se čini, kao da imaju misaoni realitet kao i svaki drugi realitet. Na primjer, na koji način postoje svi automobili ispred one zgrade Filozofskog fakulteta, te da li oni svi zajedno čine neki predmet, ja ću ga zvati „ono"? Ja ne mogu ni jedan pozitivni kvalitet da navedem, nego čitav niz negativnih: „ono" nije zelene farbe, „ono" nema težine, „ono" nema okus po limunu. Ja namjerno ciljam da pokažem da skupovi nisu dani perceptivno, u polju zorova ili zamjedbi. To se treba raditi sa zatvorenim očima, to se ne može vidjeti, taj skup. Najgore je što se ne može nacrtati, a pogotovo se prazan skup ne može nacrtati. Dakle „ono" postoji ili ima realitet. Sad je to opet filozofsko pitanje, koja je vrijednost misaonog realiteta. Kao, recimo, gradska skupština, ona ima jedan misaoni realitet. To nije njezin žig, to nije njen sekretar, to nije predsjednik ni izvršno vijeće, to nisu svi oni zajedno jer, ako jedan ne dodje, to je opet gradska skupština. To je taj misaoni realitet i to je baš takav realitet kao i vrijednost za ekonomiste, a onda i višak vrijednosti itd. To je ista vrst realiteta ja bih rekao. Sve to postoji ovako za ljude nekako, a kako to da smo mi iz toga skloni okrenuti se filozofiji? To je valjda zato jer je onaj ontološki pritisak premali, niko nas ne pita što je to o čemu govorimo. Ontološki pritisak je čas dobro došao, čas nije. To ovako, ja mislim, oscilira. Početkom dvadesetog stoljeća su se rugali iz matematike, rekavši da je matematika disciplina koja ima karakteristično svojstvo da nikad ne zna o čemu govori. To je od slabog ontološkog pritiska. Čim ga nemamo, odmah smo povukli filozofe za sobom.

29) MIJAJLOVIĆ ŽARKO

Profesor Prešić je na samom početku rekao da postojanje u matematici ima literarni smisao, što znači da se o tome ne može govoriti u nekom odredjenom smislu, već jedino da je postojanje, eventualno, motivisano nekim odnosima u realnom svetu. Mi u matematici, zaista nemamo mogućnosti da ostensivno definišemo, tj. da ukažemo na svojstva *realnih* objekata i da zatim izvadimo druga svojstva tih stvari. Nemamo, dakle, mogućnosti da koristimo ni izvedene definicije neposrednih svojstava realnih (konkretnih) stvari. To je jedino što, po mom mišljenju, možemo reći o postojanju u matematici.

Sada bih se osvrnuo na skupove i ulogu skupova. Da li se oni mogu prihvatiti kao jedno zasnivanje matematike? Kao što znamo skupovi su tako i nastali. Cantor ih je zbog toga i uveo. Pitanje zasnivanja različitih pojmova, kao što je na primer, neprekidnost, bila su prisutna još od Leibnitza. Sa druge strane, mora se priznati da su realni brojevi bili, većim delom, matematika devetnaestog veka. Stoga je Cantorov zahvat sasvim prirodan. Kao posledica uvedeni su različiti strožiji koncepti koji su, izmedju ostalog, zamenjivali intuitivan pojam neprekidnosti. Danas, posle skoro sto godina, prisutan je obrnut proces u tom smislu. Na kraju krajeva uvode se u efektivnom smislu nekakve infinitenzimale. Kao što se vidi tu su veoma malo upletena pitanja egzistencije, već se radi o jednim ili drugim mogućnostima da se matematika zasnuje, pri čemu je jedini kriterijum upotrebljivost.

Što se tiče kumulativne hijerarhije, ukoliko se kao medijum prihvati baš teorija skupova, ona je prisutna samo na prvom nivou u ovoj teoriji. Kada se proučava dalje teorija skupova ova hijerarhija iščezava. Zbog čega? Gledajući spolja na neki model teorije skupova vi faktički nemate kumulativnu hijerarhiju. Postoje samo različiti modeli teorije skupova, da ne spominjem i različite teorije kao što su Quinne–ova ili Kripke–Platek–ova.

Takodje i ovo; beskonačni skupovi su, kako kaže prof. Prešić, uvedeni zato što je teško da se radi sa opsežnim konačnim skupovima. To je možda tačno, ali opet samo na jednom nivou, jer, inače, kako se može govoriti o kvantifikaciji i uporedjivanju beskonačnosti, o kardinalnim brojevima? Često se, dakle, dogadja da teorija počne da se razvija motivisana jednim pitanjima, a kasnije udje u sasvim druge tokove. Jer, inače, kakav bi bio smisao uvodjenja takvih himernih objekata kao što su nedostižni kardinali ili merljivi kardinali? Oni nemaju zaista nikakve veze sa tako „konkretnim" objektima kao što su prirodni brojevi i konačni skupovi. Medjutim, čak i ako odemo tako daleko u konstruisanju pomenutih objekata, neverovatno je šta se dešava. Oni počinju da dejstvuju na prirodne brojeve! Jer, poznato je, da uz pretpostavku o postojanju merljivih kardinala vi možete dokazati egzistenciju izvesnih podskupova skupa prirodnih brojeva, što niste mogli ranije.

Ovo znači da se pojavljuje odredjena povratna veza čiji se efekti pokazuju i na prvim nivoima. Možemo, prema tome, zaključiti da ima smisla proučavati i takve himerne objekte, odnosno da postoji matematičko opravdanje za to. U ovom slučaju se upravo radi o jednom značajnom primeru ekstrapolacije. Kada se govorilo o ekstrapolaciji, ovde je više puta postavljeno pitanje o dozvoljenosti vršenja ekstrapolacije, ako matematiku prihvatamo kao nauku. Ja mislim da je to sasvim prirodno, jer je srž svake nauke baš mogućnost predvidjanja, a to znači ekstrapolacije. Da ne postoji mogućnost predvidjanja ne bismo imali ovaj naš izgradjeni svet. Stoga smatram da je ekstrapolacija veoma značajno svojstvo matematike, iako ona često zahteva korišćenje nekih, filozofski i saznajno slabo zasnovanih, pretpostavki.

30) ŠIKIĆ ZVONIMIR

U svom referatu postavio sam tezu da je za razumijevanje teorije skupova *nužan* pogled na kumulativnu hijerarhiju (Zermelo–Fraenkela), odakle je slijedilo da se zasnivanje teorije skupova može provesti samo kroz odredjenje ontološkog statusa te hijerarhije. Slušajući sada kolegu Mijajlovića čini mi se da je možda krivo shvaćeno da ja previdjam, u korist Zermelo–Fraenkelove teorije skupova, neke druge verzije, prim-

jerice Queineovu. Zato bih o tome nešto rekao.

Teorija skupova se osim kao matematičko istraživanje skupova (tj. istraživanje kumulativne hijerarhije o kojoj je bila riječ) razvijala i kao dio logike: Kao teorija svojstava (atributa). Kod Cantora se susrećemo sa mješavinom ova dva pristupa (uslijed paralelnog matematičkog i skolastičkog izvora njegove teorije), medjutim, ovaj prvi je daleko značajniji što je vidljivo i iz početnog položaja koji je imala teorija ordinala u njegovoj teoriji. Drugi pristup koji dovodi do logicističkog programa svodjenja matematike na logiku nalazimo po prvi put jasno naznačen kod Fregea. Razlika ta dva pristupa lijepo se ocrtava u različitom shvaćanju principa ili u aksiomatskoj teoriji aksioma komprehenzije. Za logicizam je taj princip osnovni način da se teorija svojstava identificira s teorijom skupova. Svakom svojstvu odgovara skup. Paradoksi do kojih to dovodi su poznati. Sva logicistička ograničenja tog principa (npr. Queineova stratifikacija u New Foundation) samo su nezgode izazvane paradoksima. Za drugi pristup, zvati ću ga matematičkim, taj je princip pomoćno sredstvo kojim se izgradjuju (ili odredjuju) skupovi unutar kumulativne hijerarhije, koja je za to prethodni uvjet. Zato se on tu javlja kao princip, koji iz *već danog* skupa izlučuje neki skup. Ovdje je to prirodan zahtjev, koji proizlazi iz pogleda na kumulativnu hijerarhiju, a nikako ne neka ad hoc restrikcija. Logicističkom pristupu stvarno nije potrebna kumulativna hijerarhija kao radni materijal koji opisuje teorija skupova (čak što više može se desiti kao što su Wang i Rosser pokazali za Queineov NF da ona to ne može ni biti), ali je taj pristup zato ili paradoksalan ili ad hoc i neobrazloženo korigiran u svrhu pukog izbjegavanja paradoksalnosti; dakle ne motiviran i u krajnjoj liniji neprihvatljiv. Matematički pristup može se obrazložiti oslanjanjem na kumulativnu hijerarhiju, ali to povlači za sobom, kao što sam već rekao, veliki zadatak odredjenja ontološkog statusa te hijerarhije (i usput svrstava teoriju skupova u primijenjenu matematiku). To ontološko zasnivanje je možda i suviše velik zadatak za matematiku; treba reći da ima dosta ljudi koji vjeruju da ono uopće nije moguće.

31) ROSENZWEIG DEAN

Danas je nekoliko puta bilo spomenuto konstruktivno postojanje kao nekakav nulti, najpouzdaniji, opipljivi nivo matematičkog postojanja. Ja mislim da to ne može biti takav „nulti nivo", ne samo u smislu ograde da „postojanje" kao potencijalna ostvarljivost nije stvarno postojanje, već u daleko jačem smislu. Danas se sve više matematičara svjesno odriče pune snage rekurzivnog formalizma, koji je obično osnova konstruktivnih teorija. Radi se naime o tome, da rekurzivni formalizam u svojim primjenama može generirati objekte koji ne pripadaju samom predmetu nego tek formalizmu, slično kao što primjena teorije skupova na analizu i sl. stvara mnoge fantomske objekte koji ne pripadaju analizi već upravo teoriji skupova.

Na primjer, vrlo lako možemo definirati, to je jedan od prvih teorema teorije složenosti, rekurzivnu funkciju čija bi složenost izračunavanja, recimo broj koraka ili obujam pamćenja, bila veća od proizvoljno zadane ograde na gotovo svim argumentima. Lako možete opisati algoritam koji takvu funkciju računa. Medjutim, do sada nisu poznati prirodni primjeri takvih funkcija (osim za sasvim niski nivo, za klasu funkcija generiranih konačnim automatima), ako kao „prirodno" definirane funkcije razumijevamo one u čijoj definiciji nije upotrijebljen pojam složenosti. Takvi objekti uvijek nastaju nekom dijagonalizacijom po rekurzivnom formalizmu. Istraživači u teoriji složenosti danas u svijetu nastoje da se takvim stvarima uopće više ne bave, već se pokušavaju držati niskih nivoa, konkretnih problema povezanih s računarstvom. Ako pomoću takvih gotovo svuda složenih funkcija pokušate nešto definirati mnogi će reći da je ta definicija neprirodna jer je osnovni pojam pogrešan, a u neslužbenom razgovoru će dodati da tako nešto zapravo uopće ne postoji. To nije na nivou teorije, nije na nivou neke izoštrene svijesti o novom nivou postojanja, to je neodredjeni osjećaj sličan onome što obuzima modernog topologa ili funkcionalnog analitičara, kojem je teorija skupova tobože prirodni habitus, ako mu dokazujete nešto iz njegovog područja pomoću „velikih" kardinala („znatno većih" od 2^c). On će se uzvrpoljiti, osjećati će se nelagodno, zapravo ne vjeruje da to postoji. Tako se otprilike ljudi koji se bave složenošću danas odnose prema visokim nivoima rekurzivnog formalizma. Nastoji se intenzivno istraživati pojam „feasible computability". To je teško prevesti jer su riječi kao efektivna izračunljivost, ostvarljivost, već bile (zlo)upotrebljene za punu snagu rekurzivnog formalizma. Prirodni kandidati za klasu „stvarno", „izvodljivo" izračunljivih funkcija bili bi Grzegorczykova klasa E_3, ili možda funkcije izračunljive na nekom od strojnih modela u polinominalnom vremenu.

Ja bih u isti trend strpao i neke logičke sisteme, kao alternativnu teoriju skupova Vopenke ili nastojanja Jesenjin–Volpina, mada to nije formalno povezano, ljudi koji to rade možda će odreći bilo kakvu vezu. Medjutim, vidljiva je tendencija da se isčahuri jedan osnovniji nivo postojanja, iz aspekta kojeg će matematički objekti što „postoje" tek zahvaljujući punoj snazi rekurzivnog formalizma izgledati isto tako himerično, fantomski, kao što su recimo nedostiživi kardinali sa stajališta današnje obične skupovne matematike.

32) KAPETANOVIĆ MIODRAG

U prvoj polovini ovog veka su se dosta lomila koplja izmedju različitih pravaca u matematici, da ih sada ne nabrajam. Tada je Hilbert još bio živ, u toku su bila razna istraživanja osnova matematike koja su krunisana Gedelovim i, konačno, Koenovim rezultatima. Medjutim, još i pre ovih rezultata, naglo opada interesovanje za pitanja zasnivanja matematike. To je veoma zanimljivo.

Meni se čini da se matematička logika pri nastajanju razvijala jako inspirisana pitanjima zasnivanja matematike. Oni koji su se u početku time bavili imali su ambiciju da onaj pravac koji zastupaju na neki način potvrde, tako što će razviti neke stvari u logici i opravdati sliku matematike koju je pravac, kome oni pripadaju, izgradio. Nasuprot tome, ja bih rekao da danas, ne samo da vlada ravnodušnost što se tiče ovakvih pitanja, nego se matematička logika razvija baš kao i sve ostale matematičke discipline, po principu koji je jezgrovito prof. Prešić ovde izložio: „Što god ja mogu da zamislim, dobro je, samo da se stvari ne posvadjaju". Pri tome ću i to da se stvari posvadjaju, da relativizujem.

To što Božić kaže, da je značajno što metamatematika ulazi u matematiku, to je stvarno značajno, i tu postoji čitavo more veoma interesantnih i raznovrsnih rezultata, ali niko time nije impresioniran.

Ako nekome prigovorite: „Kakve to beskonačne jezike koristite, a dokazujete nešto iz teorije grupa", njemu je sasvim svejedno što koristi beskonačan jezik, nevažan mu je duh zasnivanja. Ta su pitanja nekako izbledela, kao da je problem postojanja u suštini problem prošlosti.

Interesantno je, dakle, kako matematička logika na odredjen način počinje sa autentičnim opredeljenjem za neka polufilozofska pitanja, a završava se, danas kao jedna čisto tehnička disciplina. Kažem završava, mada se ona i dalje razvija, ali baš na ovaj način i samo tako. Možda je Gedelova smrt ove godine simbolično označila kroz jedne epohe u kojoj je bilo pomenutih ambicija, jer njih više nema.

Pogledajte, recimo, starije knjige, Churcha ili kod nas prof.Devidea. Sve te knjige počinju tako da se jasno vidi da autori nisu ravnodušni prema filozofskim pitanjima. Tu se izlaže o pravcima u matematici, pa se priča o radu sa simbolima, o denotaciji, konotaciji itd. Ukratko, izlaže se ono što danas jedan mlad logičar, koji ulazi u nauku, neće da uči niti će iko tome da ga uči. On će izučavati tehničku stranu koja se danas fantastično razvija. Kakvo je objašnjenje za to? Meni se čini da i u drugim naukama postoje slične tendencije; prvo, tendencija jednog sveobuhvatnog relativizma i, drugo tendencija nauke da sama konstruiše svoj objekat. Može se, dakle, konstatovati jedna ovakva atmosfera u matematici, pa i drugim naukama, koja je van sumnje značajna, ali kakvo je objašnjenje ja teško mogu da kažem. Na primer, objektivno gledano, veoma je bitno pitanje koje je pokrenuo prof. Kirin, pitanje načina na koji postoje matematički objekti. To su ona stara i prava, ontološka pitanja. Medjutim, svi mi to saslušamo, a zatim radimo nezavisno od toga. Čini mi se da se tim problemima treba baviti i da u referatu kolege Šikića ima elemenata koji bi mogli da objasne tu atmosferu, i uopšte način na koji se menja klima u jednoj nauci.

33) ŠIKIĆ ZVONIMIR

Mislim da to nije točno. Danas se susrećemo sa jednom masom „tehničkih" radova, medjutim to ne znači da nestaje interes za fundamentalna pitanja. Mislim da smo suočeni i sa porastom fundamentalnih istraživanja, koji paralelno prati porast „tehničkih" radova. Možda vremenski razmak stvara suprotan utisak. Što mi čitamo od onoga i o onome što je objavljeno pred recimo 50 godina? Opće i sredjene prikaze i *samo* najznačajnije originalne radove (većina ni to). U suvremenoj periodici, naprotiv, pratimo masu stvari za koje će nakon 50 godina malo tko znati. Ukratko, naš susret sa „danas" je bitno drugačiji od našeg susreta sa „jučer". Kada to zaboravimo možemo doći do neopravdane (za razliku od drugačije, možda opravdane) tvrdnje o „izuzetnosti našeg vremena".

Ja nisam tvrdio da se o tome više ne misli i da nema ljudi koji ozbiljno misle o tome, ali smatram da je sada atmosfera takva da to više ne izgleda kao stvarno značajno.

35) PREŠIĆ SLAVIŠA

Pa čekajte molim vas, u matematici je najvažnije ako može da se nadje neka korist, to je suštinska stvar, a filozofsko pitanje postojanja uvek je bilo pomalo drugostepeno. Dakle, šah nesumnjivo postoji, ali nije matematika jer ne umemo da ga iskoristimo, kratko rečeno.

36) ŠEPER KAJETAN

Neko to iskorištava, tako npr. prvak svijeta u šahu, kako li se to zove, dobije i milionske honorare.

37) UGRIN–ŠPARAC DIMITRIJE

Ja sam tek jučer bio obaviješten da ćete imati ovaj sastanak, pa nisam naročito pripremljen, ali me je na razmišljanje potaklo ovo što ste govorili, posebno izlaganje kolege Prešića, koje je bilo najviše prilagodjeno iniciranju jednog općeg razmatranja. Ja bih sad kao matematičar koji se bavi teorijom brojeva i ima dosta iskustva u tom području, a naročito nekih svježih, primijetio da ste ovdje premalo uzeli u obzir činjenicu da je i matematika djelo ljudi, kao i fizika, tako da je opterećena jednim stohastičkim karakterom. To znači da bi valjalo isključiti onu apsolutnost koja je donedavno vrijedila u matematici, pa je možda na taj način matematika čak postala dosta bliska fizici, barem što se tiče spoznaje svijeta u kojem živimo. Naime, mislim da je besmisleno baviti se matematikom koja nije vezana sa svijetom u kojem živimo. Svakako se može spekulirati o svemu i svačemu (i u matematici i izvan nje) i postavljati pitanje da li takvi objekti postoje ili ne, a to mogu biti pitanja u kontekstu raznih teorija (na pr. matematika odnosno metamatematika). Ipak mislim da je najinteresantnija ona matematika, koja je na bilo koji način vezana uz prirodne pojave u najopćenitijem smislu. Za ilustraciju navodim, da svojstva prirodnih brojeva smatram takvom prirodnom pojavom. Tu onda dolazi do izražaja pitanje spoznaje i načina na koji dolazimo do spoznaje. Spoznaja je rezultat djelovanja mnogo ljudi i ujedinjuje njihova iskustva. Zato bez ikakve sumnje spoznaja ima stohastički karakter. Prema tome i matematička istina i matematičko postojanje moraju u sebi imati ugradjen taj stohastički karakter. Ja mislim da su sve poteškoće na koje danas nailazimo u matematici, razni stariji neriješeni problemi i slično, vjerojatno posljedica upravo tog stohastičkog karaktera matematike. Vi možda nemate osjećaj da je matematika slična fizici zato jer je u razvoju matematike i u sadržaju matematike utjecaj vremena daleko manji nego u fizici. Zaista, u fizici se vrlo burno razvijaju nove teorije, nadje se privremeni model za neku pojavu, pa se ubrzo izmijeni, i za njega izmisli nova teorija, dok je u matematici sve to znatno sporije. Kad bi mogli sad preskočiti pet tisuća godina i govoriti o matematici, onda bi ova usporedba vjerojatno bila prihvatljiva. Na ove sam ideje bio potaknut nekim problemima iz teorije brojeva, i počeo sam razmišljati kako je uopće nastala današnja matematika. Pri tom ne mislim na dio matematike koji je nastao iz percepcije fizikalnog prostora, dakle ne mislim na geometriju i sve što se iz nje razvilo u matematici, nego mislim na dio matematike koji je nastao iz prebrojavanja, na aritmetiku i sve što je iz nje nastalo u matematici. Dakle taj dio matematike nastao je iz svojstava prirodnih brojeva, a Peanovi aksiomi na kojima su zasnovani prirodni brojevi, rezultat su iskustva s vrlo malim brojevima. To je zapravo tako ograničena količina znanja o prirodnim brojevima da je zapravo smiješno misliti da smo sada u stanju čitav negeometrijski dio matematike sagraditi na tim osnovama, to je apsurd. Ja mislim da će daljnji razvoj, kad se usavrši računarska tehnika, razviju nova velika računala, pristupačna širokom krugu ljudi, da će pružiti ljudima mogućnost da imaju mnogo više iskustava s brojevima i dat će im možda mogućnost da dodju do nekih posve novih spoznaja, koje će bitno promijeniti matematiku, koja će možda biti posve drugačija nego ova sadašnja. Mislim da će ta empirija biti bitna za daljnji razvoj matematike.

38) KIRIN VLADIMIR

Ja sam tešku rečenicu upotrijebio rekavši da ne umijem nacrtati ni jedan skup. Ja umijem nacrtati sve elemente jednog skupa, kako ne, svak od nas to čini svakodnevno, ali ja ne umijem nacrtati one vitičaste zagrade oko njih na istoj slici. To je taj realitet podignut nekud gore. To ja ne umijem napraviti crtežom. Svi crtamo skupove u ovom smislu, npr. ovaj skup A koji je sadržan u B, bez daljnjega, ali onda samo treba reći „slikati", za vitičaste zagrade znači staviti ovaj rub, trag krede, medju. Ne možete, to je jedan realitet izradjen od elemenata i potisnut nekud gore. Potakao me je prof. Šparac rekavši kako će se iskustvo obogatiti novim podacima kroz naša znanja o ovim velikim brojevima, koji nisu dostupni našem iskustvu, jer nema logičkog kriterija istine. To je teška hereza ako to netko pobija, filozofska hereza. Mi se moramo kad–tad prikloniti iskustvu i pitati šta je i kako je. Inače, ne znate reći o čemu se govori, ne možemo, nemamo više kriterija. Na kraju je ipak iskustvo. Logički kriteriji su iskustvo čitavih generacija. Pokazuje se, recimo, da indoevropski jezici i ovi kineski u tom logičkom iskustvu ništa nisu doprineli jedan drugom. Vi možete imati jezik artikuliran kako god hoćete, misaoni procesi su isti. Nema u Kini drukčije matematike. Oni ne kažu „ako–onda", ali to je to. Ja sam ih pitao.

39) DJURIĆ MILAN

Ovde je diskutovano o pojmu transfinitnih skupova (kardinala). Ja sam već govorio o tome. Rekao bih još nešto. Prihvatanje egzistencije ovakvih skupova je samo psihološka kategorija. Čim se u tome prihvati prvi korak, onda je svaki sledeći korak prihvatljiv. To vam je kao i onaj prvi izlet iz braka. Posle njega je svaki izlet normalan. Prvim korakom se probija psihološka barijera.

Vratio bih se još jednom na pitanje postojanja. Ovo bi se moglo smatrati i kao dodatak onome što sam već rekao. Ja sam tamo govorio o nekim stvarima vezanim za ovo pitanje. Prema njima, kada govorimo o ovom pitanju moramo uvek znati u kom smislu nešto postoji, šta pod tim podrazumevamo. To znači da uz ovaj pojam, ako ga koristimo, mora ići i kategorija koja će označavati njegov smisao. Tako, u logici, na primer, možemo govoriti o semantičkim i sintaktičkim kategorijama. Svakako se može govoriti i o vezama izmedju kategorija. Na primer, kod sintaktičke kategorije oseća se naše prisustvo kroz kreativne postupke kojima mi dokazujemo egzistenciju nekih entiteta: to su uvek neke vrste drveta. Idući korak po korak u ovakvoj proceduri mi dodjemo do željenog cilja. Ova kategorija odgovara našem prvom stavu vezanom za egzistenciju koji prihvata objekte koji su kreirani izvesnom procedurom. Semantička kategorija je bliža drugom stavu. Medjutim, ove dve kategorije mogu se povezati; u logici su poznate ove veze. Još jednu stvar treba dodati, sem kategorije treba govoriti i o nivou, jer postoji i ova razlika u pojmu. Dovoljno je uzeti razne nivoe u realnosti ili npr. teoriji tipova.

Da se osvrnem još jednom i na ontološki pritisak. Jasno, što smo na višem nivou apstrakcije, taj pritisak je manji. Medjutim, čim se spustimo na niži nivo, bliže realnosti, tj. na primenjene nauke, taj pritisak je veći, jer tu rešavamo konkretne probleme.

40) PREŠIĆ MARICA

Ja bih samo pitala prof. Kirina u kom smislu on to smatra crtanjem. Da li mi dozvoljavamo samo bukvalno crtanje kredom? Za mene je stvaranje pojmova, *dobar* itd. takodje crtanje skupova i to misaono crtanje skupova. Ja priznajem i misaone tvorevine kao neku realnost. Matematika jeste nastala potstaknuta realnom stvarnošću, ali ovo sve što su matematičari stvorili je ipak jedna misaona realnost, misaono crtanje.

41) KIRIN VLADIMIR

Ja ne umijem na istoj slici nacrtati sve elemente skupa i vitičaste zagrade oko njih.

42) PREŠIĆ MARICA

Ali ste naviknuti da uobrazite da ste to učinili.

43) KIRIN VLADIMIR

Vitičaste zagrade su stepen više od svih elemenata i ja to ne umijem nacrtati. Jer, znate zašto? Djeca nose u školu po lijevu i desnu vitičastu zagradu i onda jedan drugog „metnu" u njih. Tako je to sad u školi. Oni ih tako treniraju.

44) MIJAJLOVIĆ ŽARKO

Pitanje je koliko je to metodski opravdano da se tako uči matematika.

45) DJURIĆ MILAN

Ali, na tom nivou je to jedino i moguće tako.

46) MIJAJLOVIĆ ŽARKO

Po čemu tako mislite? Kao da ono pre nije bilo matematika, pre nego što su izmislili skupove.

47) DJURIĆ MILAN

Da ali samo onaj operativni deo, a ne ovaj ... .

48) MIJAJLOVIĆ ŽARKO

A koji je taj drugi deo?

49) PREŠIĆ MARICA

Pa šta, zar je veća apstrakcija skup od pojma broja?

50) DJURIĆ MILAN

Ranije njega nije interesovao broj kao objekat, nego samo da operiše s njim, da ga množi, sabira, deli itd.

51) ŠEPER KAJETAN

S ovim dijalogom, polilogom, je jako teško, sad je na redu kolega Božić a onda kolegica Nataša Božović.

52) BOŽIĆ MILAN

Ja sam hteo nešto da kažem baš na temelju diskusije prof. Kirina i to od njenog početka, kasnije je otišlo malo u šreh. Prof. Kirin je ako se sećate počeo sa sledećom mišlju: da on ne može da opravda čak ni konačne skupove, ni kategoriju konačnog skupa kao nešto što je očigledno u smislu postojanja.

53) KIRIN VLADIMIR

Nazočnoga u zoru ili zamjedbi.

54) BOŽIĆ MILAN

E, jer je prof. Prešić počeo od konačnog skupa, a onda govorio o beskonačnom kao o ekstrapolaciji. Tu je jedan nesrećan primer koji je mene podstakao na razmišljanje druge vrste. Naime, govorilo se da čak ni skup ovih automobila pred Filozofskim fakultetom nije dat kao skup, kao nešto perceptivno. Medjutim, pitanje je šta to znači. To je stvar konvencije, ako mi izbacimo reč skup za konačne skupove i govorimo o objektu, mi smo se tu već izvukli. Ja mogu govoriti o objektu koji čine automobili pred Filozofskim fakultetom. Onda vi meni kažete: to je nešto mistično. A ja kažem: A zašto je automobil tako jasna stvar? Naime, zašto automobil nije skup, i on je skup. skup svojih delova. Medjutim, mi smo navikli da je on funkcionalna celina. I svi ovi automobili čine funkcionalnu celinu u tom smislu što stoje pred Filozofskim fakultetom, koja jeste, ruku na srce, slabija od funkcionalne celine jednog automobila koji radi, pokreće se, itd. ali, recimo ovaj sto, on je nama dat kao jedan predmet, zašto? Zato jer mi ne možemo da prodjemo rukom kroz ovaj sto, a možemo da prodjemo izmedju ovih automobila. Medjutim, ako izbacimo termin skup i govorimo o objektu „svih pet kontinenata", mi smo se izvukli. Mi uvek možemo nekako konačne skupove, izbegavajući vitičaste zagrade, na taj način da percipiramo. Šta više, na taj način dolazimo do kumulativne hijerarhije tipova. Jer u stvari naš realni svet i jeste takav, vi imate jedan konačan skup ili objekt koji ima neke elemente, pa onda uzmete te elemente, recimo uzmete skup ljudi, pa svaki taj čovek je objekat pa njega rastavimo i on je opet neki skup koji ima neki sadržaj, recimo neke organe, delove tela itd., pa potom te organe možemo opet itd. i baš tu uočavate tu kumulativnu hijerarhiju. Dakle, u konačnom slučaju se vrlo lako možemo izvući.

55) BOŽOVIĆ NATAŠA

Ja sam samo htela nekoliko rečenica u vezi s onim što je govorio Kapetanović, o onom „negativnom" odnosu ljudi koji se bave jednom ili drugom vrstom problema. Meni se čini da možda i nije sasvim slučajno da pojedini radni matematičari ne brinu previše o ovoj drugoj vrsti problema. Možda trenutno ima dosta razloga da se veruje da u nekom istorijskom trenutku može dopustiti kvantitativno veće bavljenje onim prvim. Čini mi se da danas ima dosta razloga za taj prelaz kvantitativnog u kvalitativno. Tu sam npr. mislila o onom o čemu se danas često govori, na verovanje mnogih matematičara da možda može da se konstruiše računar ili tako neki plod tehnicizma, koji će ne samo da bude kreativan nego u izvesnom smislu potpuno da nadmaši čoveka. Danas ima dosta razloga da se u to veruje, da se veruje da će do toga doći vrlo brzo.

56) BOŽIĆ MILAN

Tehnički je moguće da naprosto svoj mozak reprodukujem nekim elektronskim elementima. Nisam ga još dovoljno istražio, žalim slučaj.

57) SLAVIŠA PREŠIĆ

Ja bih nekoliko reči u vezi s pojmom konačnog skupa. Ja sam hteo reći da je tu manji problem postojanja, da kažem ublaženije, ali mi imamo masu sličnih stvari kod kojih nam čak ni na kraj pameti nije da govorimo o postojanju, a verujemo da bi moglo da se govori. Hoću da kažem u običnom jeziku ima mnogo reči oko kojih se ne priča mnogo, da li im odgovara nešto što postoji ili ne, a nekako se previše govori o ovoj reči *skup*. Da budem odredjeniji. Pa, recimo šta je sa rečju celina? Ako ne znamo šta je konačan skup, onda i celina ne može da postoji. Onda, šta je sa rečju godina, godina dana? Može neko da kaže: "To ja neću da shvatim, ja to ne priznajem da postoji". To je ipak u nekom smislu stvar ovakve prirode: mi najpre imamo članove te godine dana, to su razni dani, a potom imamo jedan korak naviše, korak „gradjenja" godine, da tako kažem, i to je sad to. Ima more sličnih stvari, pa ipak je manje sporan takav korak prelaza od konačno mnogo predmeta na skup tih predmeta nego u slučaju beskonačnih. Pomenuo bih jednu misao koju nisam do sada pomenuo u vezi sa pojmom beskonačnih skupova. Za mene je to nova misao i ne mogu do kraja da je iskažem sasvim jasno, ali čini mi se da se tu jedan deo stvari u vezi sa pojmom beskonačnog skupa pogadja. To je sad ovakva stvar: mi imamo iskustva u radu sa skupom koji ima dva člana, tri člana, četiri itd. ali nam se prirodno pojavljuju konačni skupovi sa *neodredjenim* brojem članova, da ne kažem *promenljivim* brijem članova. Jedan takav primer: skup reči našeg jezika. To je ipak takav skup. Dakle ima raznih takvih. Ti, da kažem, promenljivi konačni skupvi bi

trebalo da se uzmu u razmatranje. Medjutim, obično se umesto razmatranja takvih skupova, možda je tu u pitanju neka lenjost, prelazi na skup svih, onih predmeta koji imaju odnosno svojstvo, odnosno na beskonačan skup. Medjutim, meni samom nije jasno kako bismo, inače uzeli u matematička razmišljanja takav konačan skup koji ima neke dodatne „parametre" koji ga odredjuju i zbog kojih je on ponekad sa toliko, a ponekad s onoliko elemenata. Ali čini mi se da tu nečega ima. Dakle: konačni, promenljivi konačni, pa tek naredni stepen beskonačni skupovi.

58) ŠEPER KAJETAN

Jedan aspekt toga je i ona Vopenkina teorija, i ona Jesenjin–Voljpina, gdje se po mom mišljenju mnogo više realnosti unosi u teoriju koja je zbog toga atraktivnija i znanstvenija. Osim toga, čini mi se da kod tih teorija, baš za ovo što je prof. Prešić rekao, ima mnogo toga, ali zahtjev potpune adekvatnosti značio bi od matematike napraviti neku vrstu fizike. U vezi s onim što je spomenuo kolega Rosenzweig, rekao bih da ta *alternativna* teorija, a i ona *ultraintuicionistička,* unosi jedan *dijalektički element,* što je uvijek bilo izvan matematike i uvjetovalo matematiku ali se nikada nije moglo odraziti adekvatno u matematici samoj. Ti pokušaji su jedinstveni u razvoju matematike. Još sam htio nadovezati na diskusiju prof. Prešića u vezi sa jezicima. Stvarno, na primjer, Myhill isto tako ne smatra jezik skupom riječi, nego procesom, skupom u nekom drugom smislu, *promjenljivim* skupom.

59) ŠIKIĆ ZVONIMIR

S malim zakašnjenjem priključio bih se onoj diskusiji, koju je započeo prof. Ugrin–Šparac. Slažem se s njegovom opaskom o predvidjanju buduće matematike. Mi živimo s ontološkim pitanjima i prave ideje nastaju iz punoga života, u kojem smo opterećeni ontološkim pritiskom, pa se tako i svaka matematika početno pojavljuje kao primijenjena matematika, koja nosi taj pečat. Pročišćenje je uvijek naknadno. Želimo li govoriti o budućoj matematici, trebamo tada predvidjeti buduću primijenjenu matematiku. Usput želim reći da je za sagledavanje odnosa u kojima je ovdje riječ i inače za razumijevanje matematike nužno sagledati prošlu matematiku i uvidjeti koliko je značajan njen povijesni (ne–vječni i ne–bezvremenski) karakter. Ta povijest nas uči da uočimo značaj one „naknadnosti" i da ne upadnemo u klopku obezvredjivanja još ne pročišćene početne matematike (prošle, sadašnje i buduće) ili u rafiniranju klopu njenog isključivog vrednovanja kroz prizmu pročišćenja, koje često vodi grubim simplifikacijama i neopravdanom niveliranju raznolikosti.

60) PREŠIĆ MARICA

Ja bih samo, pošto sam se sporazumela s prof Kirinom o kakvom je crtanju reč, dakle nije reč o misaonom crtanju o kojem sam ja pokušala da ga pobijem, već o bukvalnom crtanju, i pošto je on izjavio da je u stanju da nacrta samo elemente, e-vo molim ga lepo neka nacrta svaki element, svaki list, eno one krošnje tamo. Dakle neka je nacrta. Baš se pitam da li će da nacrta svaki list, ili će lepo, kao što bi svaki crtač uradio, nacrtati krošnju.

61) PREŠIĆ SLAVIŠA

Ja ću samo jednu rečenicu, to je jedan nesporazum, pazite to je veoma krupna stvar. U vezi s tim šta je crtež, kolega Šikić je to implicitno nekoliko puta lepo rekao, ja ću to da ponovim. Šta je crtež neke stvari? To je stvar koja dogovorno, izvinite što ću slobodnije da kažem, glumi tu stvar. On je dodeljen, što ste vi rekli sve što jeste može biti znak za bilo šta, može biti znak za drvo. Ako mi prihvatimo crtež konačno mnogo predmeta, čujte, ne moramo mi njih staviti u vitičastu zagradu, mi možemo staviti jednu putaču sa strane, ali se prethodno dogovoriti da ta putača znači celinu tih stvari, dakle skup. Ili „venovski", grafički „opasati koncem", itd. U vezi s crtežom dakle, postoji ogromni stepen dogovornosti, proizvoljnosti, naviknutosti itd. To je važna stvar.

62) MIJAJLOVIĆ ŽARKO

Možda su, kako je ovde rečeno, misaone konstrukcije koje se odnose na matematiku izvesno crtanje, u nekom prenesenom smislu. Ja se baš ne bih u potpunosti složio sa time, jer pretpostavljam i one druge, veoma značajne, možda najznačajnije delove matematike.

Mi, naime, u matematici, imamo dokaze, dokazivanje kao postupak; to nema nikakve značajne veze sa crtanjem. Ima veze jedino ukoliko se radi o zapisu nekog dokaza ali je suština sasvim različita. Jer, mi i kada nacrtamo izvesne simbole za formule ili skupove, funkcije, premda to jesu crteži, ne gledamo u njima sliku već gledamo nekakvo značenje, interpretaciju svega toga, saznajnu pozadinu. Prema tome, uvek je prisutna izvesna motivacija za to crtanje, to svakako treba naglasiti, jer je to važnije od samog čina crtanja i onog kombinatornog dela koji se odnosi na crtanje.

63) DJURIĆ MILAN

Osvrnuo bih se još na jedno pitanje koje nije bilo prisutno u današnjoj diskusiji. Govorili smo, uglavnom, o matematičkim i filosofskim pitanjima vezanim za matematiku, dok o statusu i društvenom položaju matematike nije bilo reči. Ovo pitanje je, medjutim, kolega Šeper inicirao u svom članku. Citiraću taj deo teksta: „tada se nebi dogodilo da ovakva dalekosežna, plodna i važna i prihvatljiva ponuda von Neumana matematičarima da u svoju zgradu ugrade teorijsku kibernetiku ostane izvan sfere interesa čistih pa čak i primjenjenih i praktičnih matematičara, a da se o posljedicama takvog stava na nastavu matematike i ne govori, i da se o posljedicama tih posljedica na društveni značaj matematike pogotovo i ne govori. Taj dogadjaj po svojim posljedicama nadmašuje dogadjaj, i propust novovijekih elemenata".

Mislim da je ovo pitanje veoma važno. Iako je matematičko stvaralaštvo u svetu u velikom razmahu i potreba za njim sve veća, jer je ušlo u sve pore ljudskog stvaralaštva, interes za njega, čini mi se, opada. Koji su razlozi ovom stanju? Odgovor je delimično dat u citatu. Ja ću pokušati da ga pojasnim i dopunim.

Zbog svojih velikih mogućnosti u rešavanju problema drugih nauka i prakse, danas se primenom matematike bavi velik broj istraživača. Tu je prisutna i najveća tvorevina matematike i elektronike — računar (kompjuter). Koliko god je prodor matematike u razne oblasti ljudske delatnosti, zajedno sa moćnim sredstvom — računarom, koristio matematici toliko joj je i štetio. U kom smislu je štetio? Poznato je da se računar u svim primenama isuviše eksploatisao; vrhunac modernog pristupa rešavanju problema bio je ako je isti rešavan na računaru. Pri tome je najčešće sirov materijal, bez dovoljne analitičke obrade, propuštan kroz računar. Programiranje i rutina zamenjivali su ozbiljna matematička istraživanja. Ne treba, svakako, smetnuti s uma da je dobar deo istraživača imao ispravan pristup. Medjutim, bez obzira na ozbiljnost pristupa, jedan deo matematičkih disciplina: teorija sistema, informatika itd. izmakao je iz ruku matematičara i prešao u ruke inženjera, ekonomista, sociologa itd. Zbog mogućnosti za rešavanje konkretnih problema rastao je i interes za ove discipline. Veliki broj istraživača, pogotovo nematematičara, bacio se na ove konjukturne discipline. Na taj način su mnoge osnovne matematičke teorije potisnute u drugi plan jer se matematika počela poistovećivati sa ovim disciplinama. A za njih smo vrlo brzo zaboravili i poreklo i vezu sa ukupnim matematičkim zdanjem.

Ova tendencija nije dobra jer, sem na izlazima iz matematičkog zdanja, u koje ubrajam gore pomenute discipline, treba raditi i na njegovim fundamentima i konstrukciji. Ovo, zbog budućnosti matematike. Treba negovati i dalje razvijati celokupno ovo zdanje. U tu svrhu treba raditi i na podizanju kadra koji će preuzeti brigu o tom zdanju. Moramo priznati da i tu ima problema. S jedne strane, na fakultetima i uopšte institucijama koje su odgovorne za ovaj razvoj, postoji tendencija, kod mladjih, da se opredeljuju za pomenute konjukturne discipline a samo manji broj za teorijsku matematiku. S druge strane, na fakultetima gde matematiku treba razvijati kao neophodno sredstvo postoji tendencija, zbog ukupnog odnosa prema matematici, o kom sam već govorio, da se ista eliminiše, a da se samo neki njeni neophodni delovi uključe u pojedine stručne predmete.

Zbog svega što sam rekao, dužnost svih nas je da radimo na razvoju matematike, na čuvanju njenog zdanja, ali da se u isto vreme i sami angažujemo na njenom uključenju u rešavanju raznih problema u raznim domenima ljudske delatnosti, jer je to, na koncu, i njena osnovna i u isto vreme plemenita funkcija. Na taj način ćemo koristiti i matematici i društvu.

64) ŠEPER KAJETAN

Nema više diskutanata, a nema više ni trake. Zahvaljujem se.

MATEMATIČKI VIDICI

U ovoj ediciji Matematičkog instituta dosada su publikovane sledeće knjige:

Knj. 1 – Rade Dacić
Elementarna kombinatorika
Beograd, 1977, 8°, str. 195.

Knj. 2 – Marica i Slaviša Prešić
Uvod u matematičku logiku – Teorija i zadaci
Beograd, 1979, 8°, str.398.

Knj. 3 – Slaviša Prešić, Zvonimir Šikić, Marica Prešić, Žarko Mijajlović, Mirko Mihaljinec, Kajetan Šaper i dr.
Problem postojanja u matematici
Beograd, 1979, 8°, str.76.