priručnik

za profesore

dr S. Prešić i dr B. Alimpić

O MATEMATIČKOJ LOGICI BROJEVIMA I GEOMETRIJI

U PRVOM RAZREDU SREDNJIH ŠKOLA

Милан Живадиновић

Dr Slaviša B. Prešić i dr Branka P. Alimpić

O MATEMATIČKOJ LOGICI, BROJEVIMA I GEOMETRIJI

u prvom razredu srednjih škola

PRIRUČNIK ZA PROFESORE

Prvo izdanje

IGKRO „SVJETLOST" – OOUR ZAVOD ZA UDŽBENIKE
SARAJEVO, 1977.

Odgovorni urednik:
Savo Ziroievič

Recenzenti:
Hasan Jamak, profesor u Željezničkoj tehničkoj školi u Vogošći
Nedeljko Radmilović, predavač na VTVA u Rajlovcu

Lektor:
Azra Bakšić

Ilustrator:
Jože Šebat

Tehnički urednik:
Divna Močević

Korektor:
Zinaida Marjanović

Tiraž: 3000 primjeraka

Izdaje:
IGKRO „Svjetlost" — OOUR Zavod za udžbenike, Sarajevo

Za izdavača:
Milan Petrović

Štampa:
„Minerva", OOUR Štamparska delatnost, Subotica

Za štampariju:
Jovo Bajagić, graf. inž.

1. UVOD

U nauke koje se u XX vijeku najviše i najplodnije razvijaju, svakako, valja uključiti i matematiku. U naše vrijeme se stalno širi krug problema za čije rješavanje je neophodna matematika. Svjedoci smo daljeg prodora matematike u gotovo sva područja čovjekovog stvaralaštva.
U skladu sa snažnim razvojem matematičke nauke, u čitavom svijetu su prisutni napori da se modernizuje nastava matematike, pa da se, pored ostalog, na takav način nastava matematike — uz pretpostavljenu prilagođenost uzrastu učenika — odnosi na matematičku nauku kakva je ona danas.
Na osnovu izloženog, neposredno slijede dva pitanja:

(*i*) Šta i koliko iz savremene matematike treba da bude prisutno u nastavi matematike?

(*ii*) Kako od „starog" i „novog" gradiva napraviti što prirodniju cjelinu, što kraću i metodički najprihvatljiviju?

U našem razmatranju, ta pitanja nas posebno zanimaju u vezi sa nastavom matematike za prvi razred srednjih škola.

Listajući pojedine naše programe za I razred srednjih škola[1]), nije teško uočiti da se u novije vrijeme gradivo prvog razreda, u nekom smislu, razlaže na tri programske cjeline:

— elementi matematičke logike (sa teorijom skupova),
— brojevi (odnosno elementarna algebra),
— geometrija.

Prije podrobnijeg razmatranja tih dijelova, istaknimo sljedeća opšta načela o njihovom mjestu i ulozi u nastavi:

Prvo, elementi matematičke logike, uključujući i razne pojmove teorije skupova (skupovi i osnovne operacije sa njima, funkcija, relacija, operacija), prevashodno treba da budu kao niti, koje povezuju u pletivo, čitavo gradivo. To, pored ostalog, znači da razni sadržaji matematičke logike ne treba da budu gradivo za sebe; slobodnije rečeno, dodatni teret za đake, već moraju biti suštinski uklopljeni u čitavo gradivo.

---
[1]) Vidjeti, na primjer, programe za I razred u SRBiH, SR Hrvatskoj, kao i najnoviji program u SR Srbiji.

Drugo, u skladu sa prethodnim, izlaganje brojeva i geometrije mora biti suštinski prožeto savremenim matematičkim idejama. To, pored ostalog, znači da to izlaganje mora biti, s jedne strane, *kraće*, jer, konačno, dobar dio tog gradiva je učenicima odranije, na određen način, poznat, a, s druge strane, mora biti misaono *punije*. S tim u vezi, *deduktivnost* (*dokaznost*) u izlaganju treba da raste, odnosno, drukčije rečeno, izlaganje treba da bude što više prožeto *aksiomatskim nitima*.

U daljem tekstu podrobno izlažemo naše stanovište u vezi sa modernizacijom nastave matematike u I razredu srednjih škola. Izlaganje će, pored ostalog, značiti razvijanje i objašnjavanje ideja prisutnih u našem *udžbeniku za I razred* srednjih škola, kao i *zbirci zadataka*, izašlim u Sarajevu 1976, odnosno 1977. godine. Redoslijed obrade pojedinih pitanja slagaće se sa redoslijedom naslova u tim knjigama. Otuda navodimo spisak tih naslova:

Izrazi; Formule, iskazi; Konjunkcija, presjek skupova; Disjunkcija, unija skupova; Negacija, razlika skupova; Implikacija i ekvivalencija; Potreban i dovoljan uslov; O riječima *svaki*, *neki*; Preslikavanje; Ekvipotentnost skupova; Uređena dvojka, Dekartov proizvod; Binarna relacija; Još o relaciji ekvivalencije; Binarna operacija; Neki zakoni našeg mišljenja; Aksiome, teoreme, dokazi; Tačke, prave, ravni, odnosi pripadanja; Paralelnost; Raspored tačaka na pravoj i u ravni; Ugao, mnogougao, poliedar; Upoređivanje duži i uglova; Komutativni, asocijativni i distributivni zakon; Prirodni brojevi; Jednakost $a=bq+r$, Euklidov algoritam; Sistemi brojeva osnove 10, 2, 3, . . . ; Realni brojevi čine polje; Podudarnost trouglova; Uglovi na transverzali; Neki odnosi stranica i uglova trougla; Vektori; Značajne tačke trougla; Četvorougao i kružnica; Značajne teoreme polja realnih brojeva; Polinomi i racionalni izrazi; Stepeni sa cijelim izložiocima; Izometrijske transformacije uopšte; Translacija; Rotacija ravni oko tačke; Primjena translacije i rotacije; Podudarnost geometrijskih likova; Linearne jednačine; Sistemi linearnih jednačina; Linearne jednačine i sistemi u rješavanju raznih problema; Polje realnih brojeva je uređeno polje; Linearne nejednačine. Transformacija sličnosti; Homotetija; Sličnost geometrijskih likova; Obim i površina mnogougla; Obim i površina kruga.

Međutim, i pored namjenske i sadržinske povezanosti ovog priručnika sa navedenim udžbenikom i zbirkom, moguće je da se on i posebno posmatra, jer je tako građen da i sam za sebe predstavlja cjelinu.

2. ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

Kratko o njenom nastanku. Već od samih početaka, matematiku odlikuje upotreba raznih posebnih matematičkih simbola (znakova). Štaviše, napredak matematike kroz istoriju je umnogome zavisio upravo od stepena razvijenosti njene simbolike. U takvom smislu je dobro poznato od kolike je koristi u algebri upotreba slova, kao $x, y, z, a, b, \ldots$ i sl., za označavanje brojeva[1], za što ponajviše dugujemo Vietu (*F. Viète*, 1540—1603) — ocu simboličke algebre. Primjera radi, zadatak:

Koji broj treba dodati brojitelju i imenitelju razlomka $1/3$ *da bi se dobio razlomak* $2/3$?

— upotrebom uobičajenih posebnih algebarskih oznaka se prevodi na rješavanje jednačine

$$\frac{1+x}{3+x}=\frac{2}{3}$$

gdje je sa x označen nepoznat broj. Međutim, korišćenjem dobro poznate tehnike rada sa jednačinama lako se zaključuje[2]

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{3+x}=\frac{2}{3} &\Leftrightarrow 3\,(1+x)=2\,(3+x)\\ &\Leftrightarrow 3+3x=6+2x\\ &\Leftrightarrow 3x-2x=6-3\\ &\Leftrightarrow x=3\end{aligned}$$

pa je broj 3 traženi broj.

Tehnikom algebarskih jednačina rješavaju se mnogi problemi, ali, takođe, kao što nam je poznato, mnogi ostaju i van dosega te metode. Prirodno je misliti na izradu nekog posebnog simboličkog jezika, koji bi uopštio jezik jednačina i bio dovoljan za rješavanje bilo kojeg postavljenog problema. Lajbnic (*G. W. Leibnitz*, 1646—1716) je tragao za takvim vrlo opštim jezikom. U mnogim dostignućima, on je preteča savremene matematičke logike, u kojoj se, pored ostalog, nudi takav opšti jezik. Inače, osnivačem matematičke logike smatra se Bul (*G. Boole*, 1815—1864).

[1] Tako upotrebljena slova nazivaju se i *opšti brojevi*. Dakle, opšti broj *nije* nikakav broj, već dogovorena zajednička oznaka za brojeve.

[2] Znak $\Leftrightarrow$ zamjenjuje riječi *ako i samo ako*, odnosno *ekvivalentno*.

Značajne vrste matematičkologičkih znakova. Brz i kratak uvid u gradivo matematičke logike (prisutno u programima za I razred srednjih škola) može se postići i uočavanjem kakve vrste znakova su sadržane u njemu. Tako se u stvari, upoznaju značajne vrste matematičkologičkih znakova uopšte. To su:

(*i*) *Znaci* koji služe za označavanje određenih predmeta (objekata), odnosno označavanje *konstanti*. Kao takvi, obično se koriste znaci 1, 2, $\sqrt{2}$, π, —3 i sl.

(*ii*) *Promjenljive.* To su znaci koji služe kao *opšta*, odnosno *zajednička* oznaka za više određenih predmeta, odnosno konstante. U takvu se svrhu često koriste slova x, y, z, a, b, c, α, β, A, ... Neka je, recimo, dogovorno, x zajednička oznaka svih prirodnih brojeva. Tada su pojedini brojevi, kao 1, 2, 3, ..., tzv. *vrijednosti* te promjenljive.

(*iii*) *Operacijski znaci.* Ti znaci služe za označavanje operacija. Kao takvi, obično se uzimaju znaci $+$, $-$, $\cdot$, $\cup$, $\cap$, $*$, $\circ$ i sl.

(*iv*) *Relacijski znaci.* Ti znaci služe za označavanje relacija. Tako se koriste, recimo, znaci $=$, $>$, $\leqslant$, $\in$, $\subset$, $\perp$, $\|$, $\cong$, $\sim$ i drugi.

(*v*) *Znaci logičkih operacija.* Obično se, kao takvi, koriste znaci: $\wedge$ (*i*), $\vee$ (*ili*), $\neg$ (*nije*), $\Rightarrow$ (*ako ... onda*), $\Leftrightarrow$ (*ekvivalentno*), $\forall$ (*svaki*), $\exists$ (*neki*).

Prvih pet su tzv. znaci *osnovnih logičkih operacija*, a posljednja dva su tzv. *kvantori* (*kvantifikatori, kolikovnici*).

Zapis, riječ; izraz, formula. Idući korak u razmatranju gradiva matematičke logike je upoznavanje sa raznim zapisima koji nastaju dopisivanjem opisanih znakova jednog do drugog. Takvi se zapisi nazivaju drukčije i *riječi*, pri čemu se znaci konstanti, promjenljive, relacijski i operacijski znaci, te znaci logičkih operacija smatraju kao slova[3]. Neke od takvih riječi su:

$$1+2,\ x+y,\ (x+y)\cdot z,\ x+y\cdot z,\ x>y,\ x=y\Rightarrow y=x$$
$$x=0\vee y=0\Rightarrow x\cdot y=0,\ (\forall x)\,(\exists y)\,x=y,\ x+\forall=1>$$

Sve navedene riječi, osim posljednje, su smislene, odnosno jesu uobičajeni matematički zapisi. Podrobnije, prve četiri riječi su tzv. *izrazi*, a naredne četiri su tzv. *formule*.

Kratko rečeno, izrazi služe za označavanje raznih objekata (predmeta), dok se formulama izražavaju razni odnosi (relacije) među njima.

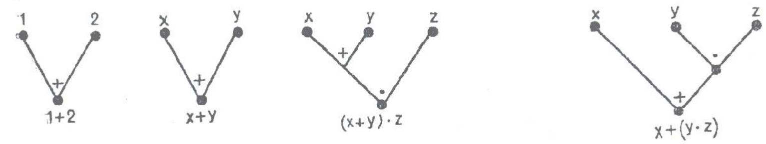
---

[3] U udžbeniku (strana 10) smo podrobnije uopšte opisali kako se u matematici shvata pojam slova i odgovarajućih riječi.

Najprostiji, najkraći izrazi su, recimo,

$$0,1,2,\ldots,x,y,\ldots,$$

tj. znaci konstanti i promjenljive. Složeniji, duži izrazi nastaju postupnim vezivanjem[4] kraćih izraza znacima matematičkih operacija. Uz to se, radi razgraničenja djelovanja pojedinih operacijskih znakova, u građenju izraza koriste i dva pomoćna znaka: znaci zagrada[5]), (. Svi maločas navedeni izrazi pripadaju vrsti dužih izraza. Crteži, tzv. *drveta* pregledno prikazuju njihovu



strukturu (*sklop*). Izraz $1+2$ predstavlja, izražava broj *tri*. Taj broj je tzv. *vrijednost* izraza. Uopšte, u slučaju ma kog izraza govori se o njegovoj vrijednosti. U slučaju prisustva promjenljivih, prethodno se pretpostavlja da one imaju određene vrijednosti. Recimo,

$$v(x+y)=3,\ \text{ako}\ v(x)=1,\ v(y)=2;$$
$$v(x+y)=8,\ \text{ako}\ v(x)=3,\ v(y)=5,\ \text{itd.}$$

gdje slovo v zamjenjuje riječ vrijednost[6].

---

[4] Nije teško izraze i potpuno strogo definisati. Recimo, izrazi građeni pomoću znakova 1, 2, 3, ..., promjenljivih $x, y, z, \ldots$ i operacijskih znakova $+$ i $\cdot$ mogu se ovako rekurzivno definisati:

(*i*) *Znaci konstanti i promjenljive su izrazi*

(*ii*) *Ako su A, B izrazi, tada su izrazi i zapisi* $(A+B)$, $(A\cdot B)$.

(*iii*) *Izrazi su jedino oni zapisi do kojih se dolazi primjenom pravila* (*i*), (*ii*) *konačno puta.*

Uz ovakvu definiciju, kao što nam je poznato, usvajaju se i razni dogovori o nepisanju izvjesnih zagrada. Tako, umjesto $(x+y)$, $(x+(y\cdot z))$, $((x\cdot y)+(z\cdot u))$, $(((x+y)\cdot z)+u)$, kraće pišemo $x+y$, $x+y\cdot z$, $x\cdot y+z\cdot u$, $(x+y)\cdot z+u$. U udžbeniku je ovakva definicija izložena na stranici 10, a u zbirci u vezi s njom su zadaci 15, 16, tačke 1. Čini se da se u školskoj praksi ne treba koristiti strogom definicijom izraza, izuzev ako se za to ne ukaže podesna prilika.

Inače, u vezi sa izrazima, zagradama u nastavi matematike vidjeti, i članak *S. Prešić*, Zagrade i izrazi u osnovnoj i srednjoj školi, časopis *Matematika*, 2/1976. posvećen tom pitanju.

[5] U građenju izraza dovoljne su te dvije zagrade, što ne znači da ponekad ne možemo, ako nam to poboljšava preglednost, upotrijebiti i neke drukčije zagrade, Ipak, dobro je znacima {,} koristiti se isključivo za označavanje skupova. Recimo, zapisom {1, 2} se označava skup čiji su elementi 1 i 2.

[6] U stvari, obično se znak v ne piše, izuzev ako ne želimo da posebno istaknemo da se radi o vrijednosti.

Zapisi

$$x>y, \quad x=y \Rightarrow y=x, \quad x=0 \vee y=0 \Rightarrow x \cdot y=0, \quad (\forall x)(\exists y)\, x=y,$$

kako već rekosmo, jesu formule. Pročita li se formula običnim riječima, iz nje nastaje izvjesna *rečenica*. Recimo, formulama

$$x>y, \quad 1+2=3, \quad 5-3<1$$

odgovaraju rečenice:

Iks je veći od ipsilon;

Zbir brojeva 1 *i* 2 *je jednak* 3;

Razlika broja 5 *sa brojem* 3 *je manja od* 1.

Najvažniji dio neke rečenice je njen *predikat* (*prirok*). Predikati posljednje tri rečenice su, može se tako reći, određeni relacijskim znacima $>$, $=$, $<$. Uopšte, a to je vrlo značajno, u slučaju matematičkih rečenica, odnosno, matematičkih formula, predikatima odgovaraju matematičke relacije[7]. Inače, za navedene tri formule, može se reći da su oblika

$$I_1 \, \rho \, I_2$$

pri čemu su I_1, I_2 izrazi, a ρ je znak relacije. Mnogo je matematičkih formula takvog oblika, odnosno, *jednorelacijskih* — kaže se i *elementarnih formula.* Formule

$$x=y \Rightarrow y=x, \quad x=0 \vee y=0 \Rightarrow x \cdot y=0, \quad (\forall x)(\exists y)\, x=y$$

nisu elementarne. U stvari, one su sagrađene, sklopljene od elementarnih $x=y$, $y=x$, i sl. pomoću znakova logičkih operacija[8].

Vrijednost formule, skup rješenja. Da li, poput izraza, i formule imaju nekakave vrijednosti? Recimo, šta bi bila vrijednost formula

$$2+2=4, \quad 2>3?$$

[7] Iz tog razloga u logici, čiji se jedan dio zove *Predikatski račun prvog reda* (u stvari, gradivo logike u I razredu srednje škole odgovara tom računu), riječi relacija i predikat se često koriste kao sinonimi.

[8] Evo i stroge definicije formula (podrobnije rečeno: formula *predikatskog računa ovog reda*):

(*i*) *Elementarna formula je formula.*

(*ii*) *Ako su* A, B *formule, tada su formule i zapisi* $(A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $\neg A$, $(\forall u)\, A$, $(\exists u)\, A$ *(u je ma koja promjenljiva).*

(*iii*) *Formule su jedino oni zapisi do kojih se dolazi primjenom pravila* (*i*), (*ii*) konačno puta.

Kao što se primjećuje, ova definicija pretpostavlja definiciju *elementarne formule.* Već smo naveli definiciju elementarne formule (kao riječi oblika $I_1 \, \rho \, I_2$) u slučaju relacijskih znakova dužine 2. U matematici se opštije razmatraju relacije ma koje dužine, pa s tim u vezi, i odgovarajuće elementarne formule. Recimo, neka slovo m označava relaciju *biti između.* Tada je zapis $m(A, B, C)$ (čitati *B je između A* i *C*) primjer ternarne elementarne formule.

Napustimo „ispitivački" ton i odmah istaknimo da se u slučaju formula govori o takozvanim istinitosnim vrijednostima: *tačan* (skraćenica $\top$), *netačan* (skraćenica $\perp$). Prvonavedena formula ima vrijednost $\top$, tj. tačna je, a druga ima vrijednost $\perp$, odnosno netačna je. To se i ovako piše

$$\tau(2+2=4)=\top, \quad \tau(2>3)=\perp,$$

jer se znak τ (prvo slovo riječi *tačnost*) obično koristi kao zamjena za riječi:

istinitosna vrijednost od . . .

Koliko iznosi $\tau(x>3)$, gdje je x oznaka prirodnih brojeva? I ovdje, slično kao u slučaju izraza, za posebne vrijednosti promjenljive x dobijaju se odgovarajuće istinitosne vrijednosti formule. Drukčije rečeno, $\tau(x>3)$ je zavisno od x. Ta je zavisnost predočena tablicom:

x	1	2	3	4	5	6	7 . . .
$x>3$	$1>3$	$2>3$	$3>3$	$4>3$	$5>3$	$6>3$	$7>3$ . .
$\tau(x>3)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Inače, u drugoj vrsti te tablice navedene su razne posebne formule koje nastaju iz formule $x>3$, kada se promjenljiva x zamijeni redom sa 1, 2, 3, ... Svaka od tih formula je *iskaz*, tj. to je formula koja ima određenu istinitosnu vrijednost $\top$ ili $\perp$. Odgovarajuće istinitosne vrijednosti navedene su u trećoj vrsti. Prema toj vrsti, formula $x>3$ ima vrednost $\top$, upravo kad x ima vrijednosti 4, 5, 6, . . . Drukčije kažemo: $\{4, 5, 6, \ldots\}$ je *skup rješenja* date formule.

Uopšte u vezi sa skupom rješenja izvjesne date formule[9] F, označenog recimo sa $R(F)$, istaknimo sljedeće:

[9] Kao što smo u Zbirci (poslije zadatka 9, tačke 3) napomenuli, ima formula, kao $x=x$ i sl. kod kojih nije moguće govoriti o skupu svih njenih rješenja, jer, u protivnom slučaju, bi trebalo govoriti o skupu svih objekata. Rekli smo u toj napomeni i da je u savremenoj teoriji skupova jedno od osnovnih pitanja u slučaju koje formule se može govoriti o skupu svih rješenja, tj. koje su formule *okupljajuće.* Evo nepobitnog dokaza da formula $x \notin x$ (x nije sam sebi element) nije okupljajuća. Pretpostavimo suprotno i neka je U skup svih rješenja te formule, tj.

$$U=\{x \mid x \notin x\}.$$

Odatle, drugim pisanjem, imamo ekvivalenciju

$$x \in U \Leftrightarrow x \notin x$$

kojom, se možemo tako reći, propisuje upravo kada neki predmet x pripada skupu U. Koristeći se tom ekvivalencijom raspravimo što biva ukoliko je x upravo sam U. Ekvivalencija postaje

$$U \in U \Leftrightarrow U \notin U,$$

odnosno: skup U je član skupa U ako i samo ako to nije. Zaključak je protivurječan. Navedimo da je navedeni primjer poznat kao tzv. Raselov paradoks (*B. Rusell*, 1872—1970).

(*i*) U slučaju dvije nepoznate, recimo, x, y, kao rješenja formule uzimaju se *uređene dvojke* (x, y), čiji članovi x, y zadovoljavaju datu formulu. Slično, u slučaju tri, četiri, ... nepoznatih, rješenja su uređene trojke, četvorke, ... Recimo, skup rješenja formule

$$x+y=5,$$

gdje su x, y prirodni brojevi, tj. skup rješenja formule[10]

$$x, y \in N \wedge x+y=5$$

je skup $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.

(*ii*) Za skup $R(F)$ rješenja formule F postoje ove mogućnosti:

(*I*) $R(F)=\phi$ (skup rješenja je prazan), tada kažemo i F nema rješenja ili F je nemoguća i sl.

(*II*) $R(F)\neq\phi$ (skup rješenja je neprazan), kažemo: F ima rješenja, ili F je moguća i sl.

U drugom slučaju postoje dva podslučaja[11]:

(*II*a) Card $R(F)=1$ (skup $R(F)$ ima tačno jedan član), kažemo: F ima tačno jedno rješenje, ili F ima jedinstveno rješenje i sl.

(*II*b) Card $R(F)>1$ (skup $R(F)$ ima bar dva člana), kažemo: F ima nejedinstveno rješenje, ili F ima više rješenja i sl.

Recimo, formule po x:

$$x\neq x, \quad x=1 \wedge x\neq 1, \quad x=2 \wedge x=3$$

su nemoguće, odnosno, njihovi skupovi rješenja su prazan skup. Slično, skup rješenja formule $2x=1$, uz uslov: x je prirodan broj, je prazan. Međutim, skup rješenja iste formule, uz pretpostavku da je x racionalan broj, nije prazan, već iznosi $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Ta dva zapažanja možemo i ovako zapisati

$$R(2x=1 \wedge x \in N)=\phi, \quad R(2x=1 \wedge x\in Q)=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Formula $F(x)$: $x\in \{1, 2\}$ je primjer formule koja ima tačno dva rješenja. To su 1, 2. To je, znači, primjer formule sa nejedinstvenim rješenjem. Recimo, takve su i ove formule (po x):

$$x \mid 2, \ x \mid 6, \ 2 \mid x, \ 6 \mid x, \ 2 \mid x \wedge x \mid 6,$$
$$x\neq 2, \ x^2>4, \ x^2<10, \ x^3+x>30,$$

gdje je x, po pretpostavci, prirodan broj.

[10] Obično se umjesto $x\in N \wedge y\in N$ kraće piše x, $y\in N$.
[11] Sa *card* smo označili broj elemenata, tzv. kardinalni broj.

Formule po x (x je prirodan broj)

$$x=1, \quad x=2, \quad x>1 \wedge x<3, \quad 1\in \{x, 2\}$$

su primjeri formula sa jedinstvenim rješenjima.

I formula (po x, y) $x = 1 \wedge y = 2$ je primjer formule sa jedinstvenim rješenjem (koje je $(1, 2)$).

(*iii*) Može se desiti da je formula F nastala od nekih drugih formula G_1, G_2, ... primjenom osnovnih logičkih operacija. U takvom slučaju postoji zanimljiva veza između skupova rješenja $R(F)$, $R(G_1)$, $R(G_2)$ ... tih formula. Najprije istaknimo ove dvije formule

$$R(G_1 \wedge G_2)=R(G_1)\cap R(G_2), \quad R(G_1 \vee G_2)=R(G_1)\cup R(G_2)$$

koje su u potpunosti u skladu sa istinitosnim tablicama konjunkcije i disjunkcije. Tim formulama se dovode u vezu konjunkcija i skupovni presjek, odnosno disjunkcija i unija.

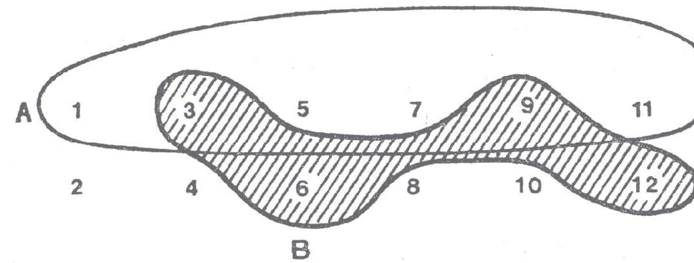
Recimo, u skladu sa tim formulama,

$$R(x=1 \vee x=2)=R(x=1)\cup R(x=2)=\{1\} \cup \{2\}=\{1, 2\},$$
$$R(x=1 \wedge x=2)=R(x=1)\cap R(x=2)=\{1\}\cap\{2\}=\phi$$
$$R(x>1 \wedge x<5)=R(x>1)\cap R(x<5)=\{2, 3, 4, \ldots\}\cap\{1, 2, 3, 4\}$$
$$=\{2, 3, 4\} \quad (x \text{ je prirodan broj})$$

Kako glasi formula za $R(G_1 \Rightarrow G_2)$? Razmotrimo prethodno jedan primjer. Neka je dogovorno x oznaka za elemente skupa $S = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$.

Koji brojevi su rješenja formule (*po x*)

$$2 \mid x \Rightarrow 3 \mid x$$



Recimo, broj 1 je jedno rješenje, jer:

$$\tau(2 \mid 1) \Rightarrow 3 \mid 1)=\perp \Rightarrow \perp=\top,$$

odnosno *pretpostavka date implikacije*, tj. $2 \mid 1$ je netačna, pa je implikacija tačna. Iz istog razloga i brojevi 3, 5, 7, 9, 11, tj. neparni brojevi, članovi skupa S su rješenja date formule. Tako smo došli do jedne skupine rješenja (na slici njoj odgovara slovo A). Broj 2 nije rješenje, jer $\tau(2 \mid 2 \Rightarrow 3 \mid 2) = \top \Rightarrow \bot = \bot$. Slično i broj 4 nije rješenje. Broj 6 jeste rješenje, jer

$$\tau(2 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 6) = \top \Rightarrow \top = \top.$$

Možemo dati i ovakvo obrazloženje. Za $x = 6$, drugi član imlikacije $2 \mid x \Rightarrow 3 \mid x$, odnosno njen zaključak $3 \mid x$ je tačan, te je otuda istinita čitava implikacija. Uopšte, sve one vrijednosti x za koje je tačna formula $3 \mid x$ su rješenja polazne implikacije. Tu dolaze brojevi 3, 6, 9 i 12 i na slici je njihov skup označen sa B. Na takav način, za datu implikaciju, označimo je sa $G_1 \Rightarrow G_2$, došli smo do dvije skupine rješenja:

A — to je skup rješenja formule $\neg G_1$,

B — to je skup rješenja formule G_2.

Da li važi jednakost $R(G_1 \Rightarrow G_2) = A \cup B$, tj. da li su skupovima A, B obuhvaćena sva rješenja? Odgovor je potvrdan. Zaista, neka je x_0 ma koje rješenje formule $G_1 \Rightarrow G_2$. Tada nastupa, na osnovu tablice implikacije, jedan od slučajeva:

1° $\tau(G_1) = \top$, $\tau(G_2) = \top$,

2° $\tau(G_1) = \bot$, $\tau(G_2) = \top$,

3° $\tau(G_1) = \bot$, $\tau(G_2) = \bot$.

Međutim, u slučaju 1° takav x_0 je, svakako, član skupa B, a u slučajevima 2° i 3° član skupa A. Znači, zamišljeno rješenje x_0 je, svakako, član unije $A \cup B$, pa je obrazloženje završeno.

U stvari, važi opšta formula

$$R(G_1 \Rightarrow G_2) = R(\neg G_1) \cup R(G_2),$$

gdje su G_1, G_2 ma koje formule.

Na kraju, potpunosti radi, navedimo i formulu za negaciju. Neka je $\neg G$ data formula, racimo, po x, koji je član datog skupa S. Tada, što se i očekuje, važi jednakost

$$R(\neg G) = S \setminus R(G),$$

tj. skup rješenje formule $\neg G$ je komplement skupa rješenja formule G u odnosu na postavljeni skup S.

iv) U vezi sa rješavanjem formula, istaknimo još jednu značajnu stvar. *Za datu formulu može se tražiti skup rješenja po ma kojim promjenljivim (i učestvujućim i neučestvujućim u toj formuli).* Neka su x, y, u primjeru koji slijedi, promjenljive koje uzimaju vrijednosti iz skupa $S = \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$. Šta je skup rješenja po x, y formule $x + 2y = 6$? Provjeravanjem nije teško zaključiti da je to skup dvojki: $\{(4, 1), (2, 2)\}$. Umjesto formule $x + 2y = 6$ uočimo formulu $x + 0 \cdot y = 6$ dobijenu iz nje zamjenom 2 sa 0. Šta je skup rješenja

po x, y formule $x + 0 \cdot y = 6$, tj. formule $x = 6$? U formuli $x + 0 \cdot y = 6$ promjenljiva y, može se tako reći: *prividno učestvuje* (ili: *stvarno ne učestvuje*). Vrijednost takve nepoznate — to je neobično važno — može biti proizvoljna (naravno, u posmatranom slučaju, u okviru skupa S).

Skup rješenja po x, y formule $x + 0 \cdot y = 6$ je sljedeći skup

$$\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}.$$

Slično vrijede i sljedeće jednakosti:

$R_{x,y}(x > 4) = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$,

$R_{x,y}(x > 4 \wedge x < 3) = \phi$, $R_{x,y}(x > 4 \wedge y < 3) = \{(5, 1), (6, 1), (5, 2), (6, 2)\}$,

gdje smo ispod slova R istakli po kojim se nepoznatim rješava formula.

Uočimo sada formulu $x = y$ i postavimo pitanja:

Koliko iznose skupovi $R_{x,y}(x = y)$, $R_x(x = y)$ gde $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$? U prvom slučaju važi jednakost

$$R_{x,y}(x = y) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

U drugom slučaju se traži da se formula $x = y$ riješi po x, zamišljajući da je y dato (iz polaznog skupa). U stvari, to znači da treba po x rješavati sljedeće formule

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4.$$

Svaka od tih formula ima jedinstveno rješenje, odnosno skupovi rješenja su redom

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$$

čime se daje odgovor na postavljeno pitanje. Međutim, izbjegavajući navođenje pojedinih skupova rješenja, možemo i ovako reći:

Skup rješenja po x formule $x = y$ je jednočlan skup $\{y\}$, tj. $R_x(x = y) = \{y\}$. Napomenimo još da se, u slučaju traženja rješenja po x formule $x = y$, promjenljiva y, koja se, znači, smatra poznatom, naziva i *parametar* („nepoznata poznata").

Na kraju, podrazumijevajući da promjenljive x, y, z, u pripadaju skupu $\{1, 2\}$, navodimo i ove primjere:

(1) $R_{x,y,z}(x = y \wedge y = z) = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$. Nepoznate su x, y, z.

(2) $R_{x,y}(x = y \wedge y = z) = \{(z, z, z)\}$. Tu je z parametar.

(3) $R_x(x = y \wedge y = z)$. Znači, x je nepoznata, a y i z su parametri. U ovom slučaju formula je po x moguća ako i samo ako važi jednakost $y = z$. U potvrdnom slučaju rješenje je jedinstveno — to je y.

(4) $R_{x,y,z,u}\,(x = y \wedge y = z) = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 2)$, gdje je ma koje rješenje uzeto kao četvorka (x, y, z, u). Promjenljiva u ne učestvuje, pa je njena vrijednost proizvoljna (1 ili 2).

Nastavne napomene. Do sada izloženo gradivo matematičke logike moglo bi se označiti kao minimum najvažnijih činjenica koje svaki đak mora dobro savladati. Inače, podrazumijevamo da tom minimumu pripadaju i opšte činjenice o osnovnim logičkim operacijama i kvantorima — kojima se iskazuju definicije tih operacija, upoznaju njihove istinitosne tablice, upoznaju značenja kvantora, kao i jednostavniji primjeri zapisa formula sa njima. Najzad, smatramo da tom minimumu mora pripadati i dublje upoznavanje sa raznim činjenicama u vezi sa implikacijom, među kojima su i razna jezička izražavanja implikacije $p \Rightarrow q$ (kao i ekvivalencije $p \Leftrightarrow q$).

U vezi sa ukazanim minimumom, navodimo i izvjesne nastavne napomene. Prethodno nekoliko riječi uopšte u vezi sa izlaganjem gradiva matematičke logike i gradiva algebre i geometrije.

Uputno je da se gradivo iz matematičke logike tako izlaže da se takvim izlaganjem ujedno vrši obnavljanje i utvrđivanje značajnih činjenica osnovnoškolske matematike. Ovo je važnije tim prije što, s obzirom na program matematike, broj odgovarajućih časova nije tako veliki. Međutim, s druge strane, istina je da je u tom programu tek mali dio đacima potpuno nepoznat. U skladu sa rečenim, ne treba štedjeti na vremenu posvećenom takvoj logici sa dosta elementarne algebre i geometrije. U stvari, pod pretpostavkom da se na takav način izloži i znatan dio algebre i geometrije, preostali dio gradiva može se obraditi brže i kraće njegovanjem deduktivne metode, odnosno razjašnjavanjem šta i kako iz čega proizlazi.

Pomenimo da su udžbenik i zbirka tako građeni da dopuštaju opisanu realizaciju. Na ovom mjestu istaknimo i to da je u udžbeniku, konačno, potpunosti radi, dokazan veliki broj teorema, ali nije neophodno da u nastavi budu sve dokazane.
Evo i nekoliko posebnijih napomena.

(*i*) Dovoljno pažnje posvetiti izgradnji matematičkologičkog jezika, kaže se i *sintaksi*. Tako, ističući značajne vrste matematičkih znakova podrobno objasniti pojam izraza, kao i pojam formule. Dobar dio savremene matematike bitno se koristi, može se reći, čak i počiva na sličnim pojmovima.

Pomenimo, primjera radi, matematičku lingvistiku, teoriju algoritama, programiranje, itd. Drukčije rečeno, pojmovi kao *slovo*, *riječ* (*zapis*) nemaju u matematici jedino pomoćnu ulogu, već često veoma značajnu. Otuda je dobro da đak navikne da radi sa izrazima i formulama kao sa matematičkim objektima, slično kao što je, recimo, navikao da radi sa brojevima.

(*ii*) Uporedo sa savlađivanjem matematičkologičkog jezika, odnosno *sintakse*, dobro je dosta pažnje posvetiti *tumačenju* (interpretaciji) tog jezika. Tako, u vezi sa izrazima treba upoznati razne primjere operacija, a u vezi sa formulama primjere relacija. Dalje, znake $\wedge$, $\vee$ treba povezivati sa skupovnim operacijama, a znak $\Rightarrow$ sa pojmovima: pretpostavka, posljedica.

(*iii*) Korisno je da se mnogi zadaci iskažu kao zadaci oblika *riješiti formulu*. Na takav način se prirodno objedinjuju prividno neslični problemi. U vezi s tim, naglasimo da je značajno da se istaknu tri prethodno navedene mogućnosti za skup rješenja $R(F)$ — formule F ($R(F)$ može biti ili prazan ili neprazan, a u drugom slučaju, ili jednočlan ili višečlan). Dobro je da đaci upoznaju zavisnosti skupova rješenja izvjesnih formula F, G, kao i od njih sklopljenih formula: $F \wedge G$, $F \vee G$, $\neg F$, $F \Rightarrow G$. Najzad, značajno je da đaci naviknu na rješavanje sistema od ma koliko formula sa ma koliko nepoznatih. Zadatke takve vrste navodili smo u prethodnom izlaganju.

(*iv*) U vezi sa rješavanjem formula, istaknimo i sljedeće. U, matematici se problemi, odnosno odgovarajuće formule često rješavaju na sljedeći način. U prvom koraku zaključujemo da rješenja mogu biti jedino izvjesni elementi odnosno da su ti elementi jedini kandidati (mogućnici) za rješenje. U drugom koraku provjeravanjem svih kandidata, određujemo rješenje. Recimo, ako treba odrediti u kojem mnogouglu broj svih njegovih dijagonala iznosi 9, onda, na osnovu formule za broj dijagonala, zadatak se svodi na rješavanje ove formule po n (n je traženi broj stranica mnogougla):

$$\frac{n(n-3)}{2} = 9 \wedge n \in N.$$

Iz date formule, kao posljedica, slijedi formula $n(n-3) = 18$, a odatle, slijedi da je n činilac broja 18, odnosno broja $2 \cdot 3 \cdot 3$.

Dakle:

$$n \in \{1, 2, 3, \quad 2 \cdot 3, \quad 3 \cdot 3, \quad 2 \cdot 3 \cdot 3\}.$$

Došli smo do konačno mnogo kandidata za rješenje. Provjerom lako zaključujemo da je broj 6 (tj. $2 \cdot 3$) jedinstveno rješenje.

U vezi sa *idejom kandidata*, pomenimo da je podesno postavljati i rješavati zadatke ovakvog oblika:

Riješiti formulu (po x)

$$x \in A \wedge \varphi(x)$$

gdje je A neki konačan skup, a $\varphi(x)$ je formula po x. U stvari, elementi skupa A su jedini kandidati za rješenja.

(*v*) Posebnu pažnju posvetiti implikaciji. Kao prvo, isticati probleme oblika:

Da li je to i to posljedica toga i toga; Da li je to i to dovoljan uslov za to i to i sl.?

U vezi sa raznim jezičkim oblicima implikacije, čini se, najvažnije je da đak dobro ovlada prevođenjem ma kojeg datog oblika na glavni oblik implikacije, odnosno oblik:

Ako p, onda q.

Neki zakoni našeg mišljenja. Naredni korak u ovladavanju matematičkom logikom jeste upoznavanje sa najvažnijim zakonima našeg mišljenja. Tu mislimo na zakone osnovnih logičkih operacija: konjunkcije, disjunkcije, implikacije, ekvivalencije i negacije, odnosno na *tautologije*, kao i na izvjesne jednostavnije zakone za kvantore. Naravno, dobro je da se u nastavi matematike teži što većem isticanju logičkih zakona koji se koriste, jer tako se olakšava shvatanje izlaganih činjenica. Međutim, s druge strane, i u upotrebi matematičke logike mora postojati izvjesna mjera. S tim u vezi, na ovom mjestu ćemo ukratko izložiti logičke zakone koje, po našem mišljenju, treba isticati i koristiti u nastavi. U stvari, riječ je o onim logičkim zakonima koji su izloženi i korišćeni u našem udžbeniku i zbirci zadataka.

Kao prvo, navedimo dvije tautologije:

$p \vee \neg p$ (Zakon isključenja trećeg)

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$ (Zakon dvojne negacije)

Drugu skupinu čine tautologije:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r), \quad ((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r),$$

odnosno zakoni *tranzitivnosti* (*prenosnosti*) za implikaciju i ekvivalenciju. Kao što nam je dobro poznato, ti se zakoni često koriste. U vezi s tim, vidjeti, recimo, u udžbeniku stranice 51, 69, 102, 103, 108, 109, 110, 112, itd; 159—180 u rješavanju jednačina i sistema jednačina, itd.

U treću skupinu ubrajamo tautologije:

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Zakon kontrapozicije)

$(\neg p \Rightarrow (r \wedge \neg r)) \Rightarrow p$ (Zakon svođenja na protivrječnost)

Prema prvoj tautologiji, radi dokaza implikacije $p \Rightarrow q$, može se dokazati njena kontrapozicija, odnosno formula $\neg q \Rightarrow \neg p$. Radi objašnjenja imena druge tautologije, pretpostavimo da je p ma koja rečenica (formula) koju treba dokazati. S tim ciljem pođimo od pretpostavke $\neg p$, odnosno pretpostavke da ne važi p. Zamislimo, dalje, da smo iz te pretpostavke izveli dva suprotna zaključka: izvjesnu rečenicu (formulu) r, a, takođe, i njenu negaciju $\neg r$. Prirodno je pomisliti da ukoliko smo došli do implikacije $\neg p \Rightarrow (r \wedge \neg r)$, odnosno uvjerili se da nije moguće da bude $\neg p$, treba očekivati da važi p. U stvari, navedena tautologija, upravo, to i izražava. Pomenimo još da se opisana metoda *reductio ad absurdum* često koristi radi dokazivanje izvjesne implikacije $A \Rightarrow B$. Tada se, umjesto $\neg(A \Rightarrow B)$ — što u prethodnom odgovara $\neg p$, uzima $A \wedge \neg B$, tj. polazi se od pretpostavki A i $\neg B$, pa se potom traga za dvjema suprotnim posljedicama R, $\neg R$, itd. Zašto se $\neg(A \Rightarrow B)$ može zamijeniti sa $A \wedge \neg B$? Razlog je jednostavan: formula

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

je tautologija.

U udžbeniku i zbirci obje opisane metode korišćene su često (vidjeti, recimo, u udžbeniku stranice 42, 56, 66, 79, 99—100, 106, itd.).

Četvrta skupina su razne tautologije, kao

$$p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

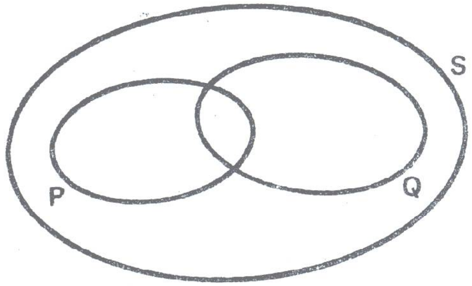
odnosno uopšte oblika $A \Leftrightarrow B$, gdje su A, B formule koje od znakova logičkih operacija sadrže $\wedge$, $\vee$, $\neg$, ali ne i $\Rightarrow$, odnosno $\Leftrightarrow$. Tu dolaze i dvije *de Morganove* tautologije:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q, \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Tautologije navedenog oblika $A \Leftrightarrow B$ su u uskoj vezi sa odgovarajućim skupovnim identitetima. Naime, svakoj takvoj tautologiji odgovara po jedan skupovni identitet čiji dokaz upravo počiva na odnosnoj tautologiji. Tako je u udžbeniku, na temelju tautologije $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, dokazan identitet

$$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$$

gdje su P, Q, R ma koji skupovi (stranica 54). Ovom prilikom dokazujemo jednakost



(*) $$(P \cup Q)' = P' \cap Q',$$

gdje su P, Q podskupovi datog skupa S. Dokaz vodimo po ovakvoj zamisli. U vezi sa formulom (*), obrazujemo niz njoj ekvivalentnih formula, trudeći se da se u tom nizu pojavi izvjesna formula za koju znamo da je tačna, jer tada je, svakako, tačna i formula (*). U stvari, ta uporišna formula, kao što ćemo vidjeti, je jedna tautologija. Evo jednog takvog dokaza:

$(*) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in (P \cup Q)' \Leftrightarrow x \in P' \cap Q')$

(Koristeći se definicijom jednakosti skupova)

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg (x \in P \cup Q) \Leftrightarrow x \in P' \cap Q')$

(Jer $x \in A' \Leftrightarrow \neg x \in A$, gdje je A skup $P \cup Q$)

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg (x \in P \vee x \in Q) \Leftrightarrow x \in P' \wedge x \in Q')$

(Koristeći se ekvivalencijom oblika

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$, $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$)

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg (x \in P \vee x \in Q) \Leftrightarrow \neg (x \in P) \vee \neg (x \in Q))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q)$

(Formule $x \in P$, $x \in Q$ smo redom označili sa p, q)

Formula $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ je tautologija. Znači, polazna formula (*) je ekvivalentna sa tačnom formulom[12]. Odatle slijedi da je i formula (*) tačna[13]. Kraj dokaza.

[12] U tom koraku smo iskoristili zakon tranzitivnosti ekvivalencije.

[13] Taj korak zaključivanja počiva na ovoj tautologiji: $(B \wedge (A \Leftrightarrow B)) \Rightarrow A$ prema kojoj ako je formula A ekvivalentna sa formulom B, koja je tačna, onda je tačna i formula A.

Najzad, u posljednju, petu skupinu po našem mišljenju za savlađivanje obaveznih logičkih zakona, uvrstimo ove zakone za kvantore:

$$\neg (\forall x) A \Leftrightarrow (\exists x) \neg A, \quad \neg (\exists x) A \Leftrightarrow (\forall x) \neg A$$

koji su u udžbeniku razmotreni na 53 stranici. Tim zakonima se negiraju formule koje sadrže kvantore. S tim u vezi, navodimo sljedeću tablicu u kojoj se, pored raznih formula F navode i njihove negacije $\neg F$ (u stvari, formule ekvivalentne sa negacijom) — vidjeti zadatak 49, tačke *Razni zadaci*, I zbirke:

F	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(\forall x) A$	$(\exists x) A$	$p \Rightarrow q$
$\neg F$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(\exists x) \neg A$	$(\forall x) \neg A$	$p \wedge \neg q$

$(\forall x)(A \Rightarrow B)$
$(\exists x)(A \wedge \neg B)$

Zašto je, na primjer, formula $(\exists x)(A \wedge \neg B)$ negacija formule $(\forall x)(A \Rightarrow B)$?

Evo jednog dokaza:

$\neg (\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x) \neg (A \Rightarrow B)$

(Koristeći se ekvivalencijom oblika $\neg (\forall x) P \Leftrightarrow (\exists x) \neg P$)

$\Leftrightarrow (\exists x) \neg (\neg A \vee B)$

(Koristeći se ekvivalencijom oblika $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$ kojom se, može se tako reći, implikacija prevodi na disjunkciju i negaciju. Korisno je zapamtiti tu vezu.)

$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg \neg A \wedge \neg B)$ (Jer $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$)

$\Leftrightarrow (\exists x)(A \wedge \neg B)$ (Jer $\neg \neg A \Leftrightarrow A$)

Dakle, na osnovu tranzitivnosti ekvivalencije, slijedi $\neg (\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x)(A \wedge \neg B)$. Kraj.

Riječ — dvije o dokazima. U stvaranju matematike od prevashodnog je značaja bogatstvo matematičke mašte, odnosno stvaralačko nadahnuće. S druge strane, u skladu sa prirodom matematike, od ne mnogo manjeg značaja je logičko sređivanje dobijenih dostignuća, odnosno s tim u vezi, njihovo dokazivanje. Na ovom mjestu ukratko[14] izlažemo izvjesne činjenice o dokazima formula oblika $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ i oblika $A = B$.

[14] Opširnije o dokazima vidjeti, recimo, u knjizi *S. Prešić*: Savremeni pristup nastavi matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1975. godine.

Zamislimo da je F neka formula (rečenica) koju treba dokazati. Jedna, u tu svrhu opšta, zamisao je dokazati da iz $\neg F$ slijede neka dva suprotna zaključka R, $\neg R$, odnosno koristiti se idejom svođenja[15] na protivurječnost, o čemu smo govorili u prošlom izlaganju. Druga, takođe, opšta zamisao je tražiti ekvivalencijski lanac oblika

$$F \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_k$$

tako da na kraju lanca bude izvjesna formula A_k, koja je tačna, odnosno, kraće rečeno, dokazati ekvivalentnost date formule sa nekom tačnom formulom. U prošlom izlaganju smo upoznali izvjesne takve primjere[16].

Pretpostavimo sada da je formula koju treba dokazati oblika implikacije $A \Rightarrow B$. Pored prethodno navedenih opštih ideja, u tom cilju moguće je postupiti, recimo, i ovako:

(*i*) Poći od pretpostavke A, pa izvesti implikacijski lanac

$$A \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_k$$

tako da formula P_k, odnosno kraj lanca bude formula B.

(*ii*) Dokazati kontrapoziciju date formule, tj. formulu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Kako se može dokazivati formula koja ima oblik ekvivalencije $A \Leftrightarrow B$? Jedan način je poći od formule A pa obrazovati ekvivalencijski lanac

$$A \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow P_k$$

tako da na kraju lanca bude formula B. Slično, moguće je poći od B i tragati za lancem oblika

$$B \Leftrightarrow Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow Q_l$$

tako da kraj lanca bude formula A. Recimo, u prošlom izlaganju, na takav način, dokazali smo formulu

$$\neg (\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x)(A \wedge \neg B)$$

Ekvivalencija $A \Leftrightarrow B$ je, kao što znamo, dvojna konjunkcija: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, pa otuda se dokazivanje ekvivalencije može raščlaniti na dokazivanje dviju implikacije $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$. Podesno je te dokaze zvati $\Rightarrow$ — dokaz, odnosno, $\Leftarrow$ — dokaz (vidjeti u udžbeniku, recimo, stranice 65, 102, 106, 129). Naravno, u dokazivanju svake od implikacija $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, možemo postupiti na neki od načina dokazivanja implikacija.

[15] U stvari, puniji naziv bi bio: metoda svođenja suprotnog na protivrječnost.

[16] U stvari, uvijek je moguće dokaze voditi na takav način, odnosno koristiti se načelom: *istinito je sve što je sa istinom ekvivalentno.*

Na kraju, nekoliko riječi o dokazima jednakosnih formula, odnosno, formula oblika $A = B$, gdje su A, B izvjesni brojevni izrazi. Jedan način, u skladu sa izloženim opštim idejama, je dokazivanje da je formula $A = B$ ekvivalentna sa nekom tačnom formulom. Recimo, jedan takav dokaz formule

(1) $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$
(a, b, c su realni brojevi)

glasi

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2+b^2+c^2$

(Korišćenjem poznatih obrazaca za $(a+b)^2$, $(a+b+c)^2$)

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac+2bc=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac+2bc$

(Svođenje)

$\Leftrightarrow 0=0$

Polazna formula je ekvivalentna sa tačnom formulom $0=0$, čime se završava dokaz.

U drugom načinu dokazivanja jednakosne formule $A=B$, slično prethodno opisanom za ekvivalencijske formule, pođe se od A, pa se dokaže jednakosni lanac oblika

$$A = I_1 = I_2 = \ldots = I_k,$$

gdje je I_k upravo izraz B. Slično može se poći od B, pa dokazivati jednakosni lanac oblika

$$B = J_1 = J_2 = \ldots = J_l,$$

gdje je J_l upravo izraz A. Dva opisana načina obično se nazivaju: dokazi „slijeva nadesno", odnosno „zdesna nalijevo" (vidjeti u udžbeniku, recimo stranice 126. 130). Radi dokaza formule oblika $A=B$, može se i ovako postupiti:

(*i*) Poći od A i od B, pa dokazati dvije jednakosti oblika

$$A=R, \quad B=R$$

tj. dokazati da su A, B jednaki istom izrazu R. Recimo, jedan takav dokaz formule (1) glasi:

$$\begin{aligned}(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 &= a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2\\ &= 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac+2bc\\ (a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2+b^2+c^2\\ &= 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac+2bc\end{aligned}$$

Zaključak: $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=(a+b+c)^2$
$+a^2+b^2+c^2.$

(*ii*) Dokazati formulu $A-B=0$.

(*iii*) Dokazati formulu oblika $CA=CB$, gdje je C neki izraz za koji znamo da je različit od 0 (vidjeti 130 stranicu udžbenika).

U stvari, ima veoma mnogo načina koji se mogu koristiti radi dokazivanja izvjesne jednakosne formule $A=B$. Čini se da je najopštiji opis tih načina sljedeći:

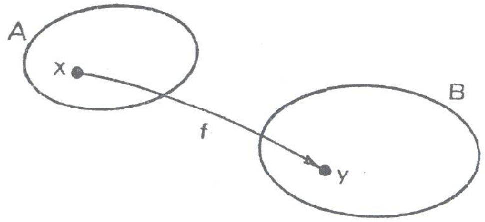
Radi dokaza formule $A=B$, dovoljno je dokazati neku drugu formulu F, ali takvu da iz nje slijedi formula $A=B$. Recimo, formula F, prema dosadašnjem izlaganju, može glasiti:

$A-B=0$, ili $A=R \wedge B=R$, ili $CA=CB$ (gdje $C\neq 0$) i sl.

Na kraju izlaganja istaknimo da u tački 7. nastavljamo sa razmatranjem gradiva matematičke logike. To gradivo je namijenjeno produbljivanju i proširivanju do sada izloženog materijala, za koji smatramo da, svakako, treba da bude prisutan u školskoj praksi.

3. FUNKCIJE, OPERACIJE I RELACIJE

1. Pojam funkcije (preslikavanja) spada u najvažnije matematičke pojmove uopšte. Ako su A, B neki dati neprazni skupovi, tada preslikavanje skupa A u skup B, označeno, recimo, sa f, kao



što znamo, je svaki[1] *dogovor*, *propis*, *zakon* kojim se svakom elementu x skupa A, tzv. *liku*, dodjeljuje po tačno jedan element y, tzv. *slika*, skupa B. Slika elementa x obično se označava i sa $f(x)$, tj. $y=f(x)$. U vezi sa svakom funkcijom se, znači, pojavljuju dva skupa A, B; prvi nazivamo *polazni skup* (ili *domen*), a drugi *dolazni skup* (ili *kodomen*). Za samu funkciju f se onda može reći da predstavlja *prelaz* (sa A u B).

[1] U udžbeniku smo na 35. stranici naveli i tzv. skupovnu definiciju preslikavanja — kao skup izvjesnih uređenih dvojki. Ta je definicija stroža, ali, s druge strane, više formalna. U stvari, istini za volju, u matematici se, prirodno, pojavljuju i funkcije koje nije moguće obuhvatiti skupom nekih dvojki. Čak ima funkcija kod kojih se ni likovi ni odgovarajuće slike ne mogu okupiti u jedan skup. Jedna takva funkcija je određena riječima *kardinalan broj*. Naime, u teoriji skupova svakom skupu S pridružuje se njegov kardinalni broj *card* S. Tako je *card* vrlo prirodno preslikavanje, kod kojeg nije moguće govoriti ni o skupu svih likova (to bi, u protivnom, bio „skup svih skupova"), a ni o skupu slika.

U vezi sa pojmom preslikavanje, ističemo sljedeće nastavne napomene:

(*i*) Neobično je značajno da đaci upoznaju više raznoraznih primjera preslikavanja. Tako treba za A, B i f, odnosno za „*polaz*", „*dolaz*" i „*prelaz*" uzimati što raznovrsnije mogućnosti. Recimo, uzimanjem da su A, B skupovi jednaki skupu R — realnih brojeva i da je f određeno formulom oblika $f(x)=ax+b$, gdje su a, b konstante, treba obnoviti i utvrditi činjenice o linearnim funkcijama, koje su đacima odranije već poznate. Istaći da su to ujedno i primjeri funkcija određenih jednom formulom, ali da ima i funkcija koje nisu takve. Treba istaći razne primjere funkcija koje se prirodno pojavljuju u fizici (zavisnost puta od vremena u slučaju jednolikog kretanja i sl.) i geometriji (zavisnost dijagonale kvadrata od njegove stranice, površine kvadrata, takođe od stranice i sl.). Posebno istaći razne primjere preslikavanja u geometriji, koja se opisuju riječima *simetrija prema tački*, *prema pravoj*, *ravni*, *translacija*, *rotacija* i sl.

Dalje, upoznati i primjere poput ovog:

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

gdje su likovi navedeni u prvoj vrsti, a odnosne slike u drugoj. Uzimati i ovakve slučajeve:

Likovi su neki izrazi, a slike su vrijednosti koje im odgovaraju. Likovi su neke jednačine, a slike su, recimo, slovo M — ukoliko je jednačina moguća, odnosno slovo N ukoliko je nemoguća.

U vezi sa daljim primjerima preslikavanja, vidjeti zadatke u zbirci (tačka 9).

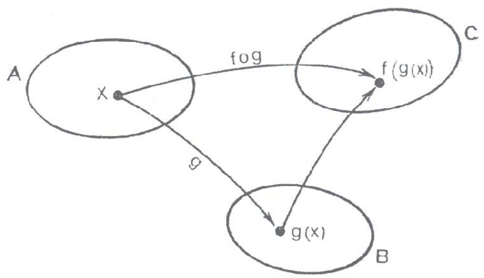
(*ii*) Pored upoznavanja sa što raznovrsnijim primjerima za *polaz*, *dolaz* i *prelaz*, smatramo da je vrlo značajno da đaci dobro ovladaju funkcijskom oznakom $f(x)$. S tim u vezi, podesno je zadavati zadatke poput ovog:

Neka je $f : R \to R$, (tj. f je preslikavanje skupa R u isti skup) određeno formulom

$$f(x)=2+3x.$$

Odrediti $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(f(1))$, $f(2f(1)+3)$, $f(a)$, $f(b)$, $f(-x)$, $f(-x)+f(x)$, $f(f(x)+f(-x))$ i sl.

Ima mnogo razloga zbog kojih je značajno ovladavanje funkcijskom oznakom $f(x)$. Jedan, veoma prirodan razlog je što se tako, u stvari, čini važan korak ka upoznavanju sa



operacijom *slaganje preslikavanja* — u savremenoj matematici jednoj od najvažnijih operacija uopšte. Naime, ako su A, B, C izvjesni skupovi i $f : B \to C$, $g : A \to B$ preslikavanje skupa B u skup C, odnosno skupa A u skup B, tada *proizvod (slog)* preslikavanja f sa preslikavanjem g, oznaka $f \circ g$, jeste preslikavanje skupa A u skup C, kojim se liku x (članu skupa A) dodjeljuje slika $f(g(x))$ (član skupa C).

U vezi sa slaganjem preslikavanja, navodimo sljedeće nastavne napomene:

(*i*) Korisno je tom operacijom često se koristiti u geometriji. To znači da valja obrazovati slogove raznih geometrijskih preslikavanja (transformacija), kao što su rotacije, translacije, simetrije prema tački, prema pravoj i druge. Na primjer, veoma je zanimljivo slaganje dvije osne simetrije u slučaju kada se ose sijeku. Rezultat je rotacija oko presječne tačke. U vezi sa tim vidjeti u udžbeniku str. 151.

(*ii*) Slučajevi slaganja geometrijskih transformacija spadaju među najvažnije, pa i najzanimljivije. Međutim, u vezi s tim, vreba jedna opasnost. Naime, da bi učenik shvatao takva slaganja, neophodno je da je prethodno dobro savladao operaciju slaganja u slučaju raznih jednostavnijih primjera preslikavanja. Recimo, dobro je uvježbavati zadatke poput ovog.

Odrediti $f \circ g$ gdje

(*a*) f, g su preslikavanja skupa R u samog sebe određena formulama $f(x)=3x+1$, $g(x)=x+2$.

(b) $f : \{a, b, c, d\} \to \{p, q, r\}$, $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c, d\}$

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & q & r \end{pmatrix}, \qquad g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & a & c & d & a \end{pmatrix}.$$

(*iii*) Značajno je da se ukaže na činjenicu da je slaganje preslikavanja asocijativna operacija, ali ne i komutativna.

2. Sada ukratko razmotrimo pojam dvojične (binarne) operacije. Taj se pojam, u naše vrijeme, smatra centralnim pojmom algebre. U slučaju dvojične operacije sa nekim elementima x, y, z, . . ., uvijek se od dva elementa, prelazi na treći element, recimo z. Označivši još operaciju sa $*$, možemo pisati

$$x*y=z.$$

Podesno je da se x, y, z redom zovu: prvi član, drugi član i rezultat (ishod) operacije.[2] U vezi s tim, izgleda da je podesno u slučaju oduzimanja i dijeljenja napuštati dobro nam poznat složen način izražavanja (umanjenik, umanjilac i sl.) i koristiti se navedenim opštim načinom. Recimo, takvim izražavanjem možemo postaviti ovakav zadatak: Odrediti drugi član razlike, ako prvi član iznosi 10, a sama razlika je 2.

U vezi sa pojmom dvojične operacije, navodimo sljedeće nastavne napomene:

(*i*) Dobro je da učenici upoznaju raznovrsne primjere operacija. Tako, treba uočavati operacije skupa R (ili nekog njegovog podskupa N, Z, Q), određene formulama sličnim ovim: $x*y=x^2+y^2$, $y \circ x=x+y+xy$, $x \triangle y=\max\,(x, y)$ itd.

---

[2] U matematici je čest slučaj razmatranja operacija sa elementima nekog skupa. U takvom slučaju, operaciju možemo definisati kao ma koje preslikavanje skupa S^2 u skup S, gdje smo sa S označili skup, a sa S^2 skup njegovih uređenih dvojki (a, b). Drugim riječima, operacija skupa S je funkcija dvije promjenljive, jer tako se obično nazivaju funkcije čiji su likovi uređene dvojke. Recimo, neka je S skup R — realnih brojeva i f — funkcija dvije promjenljive određena formulom

$$(*) \qquad f(x, y)=2x+3y.$$

Ta se funkcija, u skladu sa rečenim, može zvati i operacija. Istina, u takvom slučaju umjesto $(*)$, radije se piše $xfy=2x+3x$, ukoliko smo slovo f upotrijebili za oznaku operacije.

Pomenimo još da se u matematici koriste i operacije kod kojih odgovarajuće elemente nije moguće okupiti u neki skup. Recimo, za ma kakva dva skupa A, B govori se o njihovoj uniji $A \cup B$. Tu je nemoguće reći da je unija preslikavanje skupa S^2 u S, jer, u protivnom, S bi bio skup svih skupova.

Dalje, koristiti se tablicama (tj. *Cayley*eve tablice) radi zadavanja operacija. Recimo, navedena tablica definiše jednu operaciju skupa $\{a, b, c\}$. Uputno je razmatrati i operacije za koje bi se moglo reći da su „malo više apstraktne". Takva je, na primjer, operacija *dopisivanje*, uočena u skupu izvjesnih riječi. U sličnu vrstu dolazi i slaganje preslikavanja.

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	c	c
c	b	a	c

(*ii*) U vezi sa uočenom operacijom, zadavati razna pitanja. Tako se đak navikava na to da je operacija predmet posmatranja. Recimo, u vezi sa operacijom $*$, određenom prethodnom tablicom, mogu se postaviti razni zahtjevi, poput ovih:

a) Izračunati $(a*b)*(c*(b*a))$ i tok računanja pratiti na odgovarajućim drvetima.

b) Riješiti po x formule
$a*x=b,\ x*b=c,\ x*x=a,\ x*x=c.$

c) Riješiti po x, u formulu $x*y=a$.

d) Da li je operacija $*$ komutativna, odnosno asocijativna i sl.

U vezi sa pitanjem asocijativnosti, voditi računa da ispitivanje — da li je neka operacija $*$ datog skupa S asocijativna — znači ispitivanje da li jednakost oblika

$$(x*y)*z=x*(y*z)$$

važi *za sve elemente* x, y, z skupa S. Recimo, ako S ukupno ima tri elementa, tada ispitivanje asocijativnosti zahtijeva provjeravanje $3 \cdot 3 \cdot 3$, tj. 27 jednakosti navedenog oblika.

(*iii*) U savremenoj algebri operacije se, po pravilu, ne uočavaju odvojeno od skupova (na kojima su definisane). Drugim riječima, uočavaju se cjeline koje čine izvjestan skup S i izvjesne njegove operacije. Takva se cjelina zove *algebarska struktura*. Recimo, ako je S dati skup i $*$ njegova binarna operacija (tj. važi implikacija $x, y \in S \Rightarrow x*y \in S$, *za sve* elemente x, y skupa S), tada cjelinu, čiji su sastavni dijelovi S i $*$, nazivamo *grupoid* — oznaka $(S, *)$. U zavisnosti od pravilnosti, zakonitosti koje posjeduje operacija $*$, grupoid može biti:

komutativan, asocijativan, grupa i sl.

Dobro je da, barem u vrlo skromnom obimu, đaci upoznaju pojam grupoida uopšte, kao i pojam grupe (vidjeti str. 49. udžbenika).

(*iv*) Oduzimanje nije *unutrašnja* operacija skupa N, odnosno, drugim riječima, skup N *nije zatvoren* u odnosu na oduzimanje, jer može se dogoditi da razlika dva prirodna broja ne

bude prirodan broj. U stvari, $x-y$, gdje su x, y prirodni brojevi, takođe je prirodan broj ako i samo ako $x>y$. Iz tog razloga kaže se i ovako: oduzimanje je *uslovna* operacija skupa N. Značajno je da đaci upoznaju razne primjere uslovnih operacija. Evo nekih primjera.[3]

$x*y=\dfrac{y}{x}$ (x, y su realni brojevi; uslov glasi $x \neq 0$)

$x*y=\dfrac{y}{x}$ (x, y su prirodni brojevi; uslov glasi $x \mid y$)

$x*y=\dfrac{x+y}{x-y}$ (x, y su realni brojevi; uslov glasi $x \neq y$)

$x*y=\dfrac{x+y}{2}$ (x, y su cijeli brojevi; uslov glasi: x, y su iste parnosti)

3. Na kraju navodimo nekoliko nastavnih napomena u vezi sa dvojičnim (binarnim) relacijama:

(*i*) I u ovom slučaju uputno je upoznati raznovrsne primjere relacija. Evo nekih primjera:

(*a*) U skupu N uočiti relacije $=, <, >, |, \leqslant$, dalje uočiti relacije određene pomoću neke formule kao:

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x+y<10$$
$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} xy=12 \text{ i sl.}$$

(*b*) U skupu $\{a, b, c, d\}$ uočiti relaciju ρ zadanu, recimo tablicom:

ρ	a	b	c	d
a	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
b	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
c	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
d	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$

(*c*) U skupu izvjesnih skupova uočiti relaciju $\subset$ (inkluzija, uključivanje).

[3]) Neka je S skup tačaka $A, B, C, \ldots$ jedne ravni i u vezi sa ma kojom trojkom tačaka (A, B, C) uočimo $\triangle ABC$. Jednakost $f(A, B, C)=\triangle ABC$, može se tako reći, definiše jednu trojičnu (ternarnu) operaciju. Istina, to je nešto uopštenija operacija od do sada pominjanih, jer rezultat operacije je $\triangle ABC$, odnosno nije element skupa S. Ta operacija je uslovna. Uslov glasi: tačke A, B, C ne pripadaju nijednoj pravoj.

(*d*) U skupu, čiji su elementi

$$1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\},$$

uočiti relaciju $\in$ i napraviti njenu tablicu.

U vezi sa uočavanjem raznih relacija, pomenimo da je korisno relacije prikazivati grafovima.

(*ii*) U vezi sa uočenim relacijama, postavljati razna pitanja. Recimo, ako je ρ relacija *djeljivost*, uočena u skupu $\{1, 2, 3, 6\}$, možemo postavljati zahtjeve poput ovih:

(a) Izračunati $2\rho 3$, $3\rho 6$, $2\rho 3 \Rightarrow 3\rho 2$, $\neg(2\rho 6)$ i sl.

(b) Riješiti po x formule $2\rho x$, $x\rho 2$, $x\rho x$, $x\rho 6$ i sl.

(c) Da li je relacija ρ: refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna?

(*iii*) Upoznati razne značajne primjere relacija ekvivalencije (s tim u vezi i odgovarajućih klasa), kao i primjere relacija poretka. Tako, uočavati jednakost, paralelnost, sličnost, podudarnost, ekvivalentnost (jednačina), biti isto godište, biti učenik iste škole, biti ista vrsta riječi, itd. Recimo, korisno je radi uvježbavanja uslova (R), (S), (T), (AS) postavljati zahtjeve poput ovih:

(a) Odrediti sve relacije skupa $\{a, b\}$, koje su: 1° refleksivne, 2° refleksivne i simetrične.

(b) Obrazovati tablicu relacije ekvivalencije skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ako su poznate klase ekvivalencije:

$$\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{6, 7\}$$

Istaći da relacija $<$ (biti manji) nije relacija poretka skupa R, ali da takve jesu $\leqslant$, $\geqslant$. Kao relacije poretka, upoznati i relacije $\subset$ (inkluzija), $|$ (djeljivost u skupu N, ali, pazite, ne i u skupu Z).

(*iv*) Posvetiti pažnju i jednakosti, kao posebno značajnoj relaciji, ističući da je ta relacija *refleksivna, simetrična i tranzitivna* (tj. relacija ekvivalencije) i saglasna sa ma kojom matematičkom operacijom $*$, što znači da uvijek važi implikacija oblika $x=X \wedge y=Y \Rightarrow x*y=X*Y$(„Jednakosti se smiju zvjezdovati")[5] Iz tih svojstava jednakosti, kao logična posljedica slijedi

[5]) U stvari, jednakost je saglasna i sa ma kojom relacijom (vidjeti str. 58. udžbenika). Međutim, čini se, dio tvrđenja u vezi sa tim za đake je nešto složeniji, pa saglasnost jednakosti sa relacijom ne treba previše isticati i obrađivati.

zakon zamjene jednakosti: U bilo kom izrazu dozvoljeno je neki dio A zamijeniti drugim izrazom B, koji je jednak A.

Na primjer, u vezi sa tim, važi implikacija

$$A=B \Rightarrow (x+A)y+z=(x+B)y+z.$$

Jedan dokaz, izložen korak po korak, glasi:

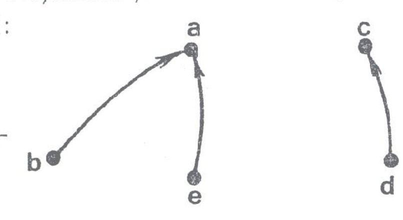
(1) $x=x$	(Refleksivnost jednakosti)
(2) $A=B$	(Pretpostavka)
(3) $x+A=x+B$	(Sabiranjem jednakosti (1), (2), što je dozvoljeno, jer je jednakost saglasna sa sabiranjem)
(4) $y=y$	(Refleksivnost)
(5) $(x+A)y=(x+B)y$	(Množenjem jednakosti (3), (4), što je dozvoljeno, jer je jednakost saglasna sa množenjem)
(6) $z=z$	(Refleksivnost)
(7) $(x+A)y+z=(x+B)y+z$	(Sabiranjem (5) i (6))

Kraj.

Veoma je značajno da se učenici naviknu na takva dokazivanja, jer tako se, u stvari, na jednostavnom gradivu obučavaju strogom (odnosno potpuno obrazloženom) matematičkom dokazivanju. Drukčije rečeno, poučno je da učenici umiju da dokazuju razne logičke posljedice, tj. razne teoreme, polazeći od navedenih svojstava jednakosti kao polaznih, odnosno, kao aksioma.

U vezi sa (R), (S), (T) svojstvima jednakosti zanimljivi su, recimo, i ovakvi zadaci:

(a) Koja od jednakosti $b=e$, $a=e$, $d=a$, $c=d$ jeste posljedica datih jednakosti



(*) $b=a$, $e=a$, $d=c$

(b) Dokazati da jednakost $a=c$ nije posljedica jednakosti (*).

4. GEOMETRIJA

Geometrija kao grana matematike. Ako bi nas neko zapitao šta je, zapravo, geometrija, ne bismo mnogo pogriješili kad bismo kratko odgovorili: nauka o prostoru. Bliže, mogli bismo reći da se u geometriji izučavaju osobine tijela, površina, linija koje se odnose na njihov položaj, oblik, veličinu. Pri tome se ne uzimaju u obzir razne fizičke osobine tijela, kao: vrsta materijala od kojih su građena, boja, temperatura, itd., kao ni kretanje tih tijela u vremenu. Drugim riječima, vrši se izvjesna apstrakcija kojom se od figure stvarnog fizičkog prostora dolazi do geometrijske figure.

Valja odmah napomenuti da navedeni opis geometrije ne može biti zadovoljavajući, i to iz više razloga. Prvo, ako imamo u vidu da se, sa savremenog stanovišta, svaka matematička teorija bavi izvjesnim skupovima objekata, zatim, izvjesnim relacijama i operacijama s tim objektima, nije, na prvi pogled, jasno da možemo, prema opisanom predmetu geometrije, i ovu svrstati među matematičke teorije. Međutim, ipak je tako, jer se i geometrija bavi, zapravo, raznim skupovima objekata — to su tačke, prave, ravni i opštije geometrijske figure, izvjesnim relacijama među tim objektima, kao što su pripadanje, paralelnost, podudarnost, itd.

Druga bitna odlika svake matematičke teorije, pa i geometrije, jeste deduktivnost. To znači, pri njenoj izgradnji polazi se od izvjesnih osnovnih geometrijskih objekata i relacija koje se ne definišu. Svojstva tih pojmova opisuju se izvjesnim stavovima koji se ne dokazuju, čija se istinitost pretpostavlja, tzv. aksiomama. Zatim se, raznim logičkim zaključivanjima postupno izvode ostala tvrđenja geometrije — teoreme, a raznim definicijama uvode se novi, složeniji pojmovi. Važno je istaći da se ideja deduktivnosti prvo i sreće u geometriji, da bi tek mnogo kasnije prodrla i u ostale oblasti matematike.

Po kakvom principu se biraju polazni pojmovi, odnosno polazni stavovi? U suštini, ovaj izbor je proizvoljan, ničim nije unaprijed određen. Kod matematičara koji su se bavili zasnivanjem geometrije ne postoji jedinstveno gledište pri izboru polaznih pojmova i aksioma. To su obično najjednostavniji pojmovi i razne osnovne činjenice o njima. Opisno govoreći, geometriju možemo zamisliti kao zgradu sa više ulaza: pitanje je na koja „vrata" je podesno ući da bi se što bolje i preglednije upoznala čitava zgrada. O raznim pristupima zasnivanju pojedinih geometrijskih pojmova kasnije će biti više riječi, kada budemo bliže razmatrali taj problem. Iako je, kako smo pomenuli, izbor polaznih pojmova i stavova proizvoljan, mora se voditi računa da osnovni pojmovi i stavovi čine neprotivrječan sistem. To znači da se iz njih ne mogu izvesti dva suprotna zaključka, tj. zaključci oblika A, *ne* A. Sem toga, izabrani sistem pojmova i aksioma treba da je dovoljan da se pomoću njega izgradi geometrija koju želimo. Ako se nijedan osnovni pojam ne može definisati pomoću ostalih, kaže se da su ti pojmovi nezavisni. Slično važi i za aksiome: one su nezavisne ukoliko se nijedna od njih ne može izvesti iz ostalih aksioma.

Pri izlaganju geometrije obično se ne poštuje u potpunosti uslov nezavisnosti; iz metodskih razloga, uzima se više polaznih pojmova i stavova nego što je neophodno da bi izlaganje bilo preglednije i jednostavnije.

Geometrija izgrađena na opisani način, predstavlja izvjesnu, dosta apstraktnu, sliku realnog svijeta. Međutim, po savremenom shvatanju, korisno je poći još jedan korak dalje. Umjesto od osnovnih pojmova, može se poći samo od riječi, termina koji označavaju te pojmove. Drugim riječima, termini se lišavaju svog pojmovnog sadržaja. Pošto izvođenja u geometriji počivaju samo na aksiomama i logičkim zakonima, u tom slučaju se može, takođe, izgraditi sistem logičkih posljedica — teorema, koje su tada lišene svog sadržaja. Kakva je korist od toga? U stvari, višestruka. Davanjem raznih određenih značenja geometrijskim terminima, pod uslovom da, pritom, aksiome postaju tačne rečenice, dobijaju se različiti „primjerci" izgrađene teorije, kaže se i različiti modeli. S tim u vezi, vidjeti, na primjer, u udžbeniku na str. 63, zadatak 3. Vidjeti i zadatke 1.8, 1.9. tačke 17, odn. 18. u Zbirci. U pomenutom primjeru u knjizi, riječi tačka, prava, ravan tumače se kao izvjesni podesno izabrani skupovi, uz uslov da za njih važe aksiome pripadanja. Tako se dolazi do jednog modela aksioma pripadanja (isključujući jedino zahtjev, sadržan u aksiomi 2, da postoje bar četiri tačke koje ne pripadaju jednoj ravni). Navedimo još jedan primjer interpretacije prve aksiome pripadanja: Kroz svake dvije tačke prolazi jedna i samo jedna prava. Neka riječ tačka znači par (x, y) realnih brojeva, riječ prava — jednačinu $ax+by+c=0$, a rečenica *tačka* (x, y) *pripada pravoj*

$ax+by+c=0$ neka znači da brojevi x, y zadovoljavaju tu jednačinu. Pri ovakvoj interpretaciji tačaka i pravih, uz određena tumačenja drugih termina, važe i ostale aksiome koje se odnose na tačke ravni; navedeni model je, zapravo, analitička geometrija ravni.

Navedeni postupak javlja se, na primjer, i u algebri; izrazu $a*b$ mogu se davati razna značenja, to može biti zbir dva prirodna broja ($*$ se tumači kao sabiranje, a, b kao prirodni brojevi), proizvod dva realna broja, slog dva preslikavanja, itd.

Jasno je da mogućnost različitih realizacija, raznovrsnih tumačenja, geometrije širi oblast njene primjene u raznim oblastima matematike.

S druge strane, ako se pojmovi liše svog prvobitnog sadržaja, i u izboru aksioma se mogu postaviti slobodniji zahtjevi, tj. zahtjevi koji ne moraju biti potpuno u skladu sa našim očiglednim prostornim predstavama. Tako se može, na primjer, izgraditi geometrija u kojoj se svake dvije prave neke ravni sijeku u nekoj tački, svake dvije ravni sijeku po nekoj pravoj, tj. nema paralelnih pravih i paralelnih ravni (projektivna geometrija); zatim, geometrija u kojoj se kroz ma koju tačku van neke prave, u ravni određenoj tom pravom i tom tačkom, može povući čak beskonačno mnogo pravih koje ne sijeku tu pravu (geometrija Lobačevskog); zatim se mogu izgraditi razne višedimenzione geometrije, konačne geometrije (sa konačnim brojem tačaka) itd. Takvo gledište na geometriju pokazalo se veoma plodonosnim. Broj raznih „geometrija", u današnje vrijeme, prilično je velik, a mnoge od njih povezane su i sa raznim drugim matematičkim, pa i ne samo matematičkim teorijama gdje nalaze primjenu. Tako su, na primjer, razne konačne geometrije našle primjenu u kombinatorici i raznim algebarskim strukturama, dalje, geometrija četvorodimenzionalnog prostora našla je primjenu u teoriji relativnosti, itd.

Moramo, međutim, naglasiti da je put razvoja geometrije od čisto emprijske nauke do njenog današnjeg oblika, bio veoma dug i složen. U jednom letimičnom pregledu ukazaćemo na najvažnije etape u njenom razvoju.

Kratak osvrt na istoriju geometrije. Rađanjem starih civilizacija Mesopotamije, Egipta, javila se i potreba za prikupljanjem, sređivanjem raznih iskustvenih činjenica u vezi sa mjerenjem zemlje (otud i riječ geometrija, koja na grčkom znači zemljomjerstvo), astronomskim posmatranjima, građevinskim radovima. Tako je nastala prva geometrija. Vremenom, uviđale su se razne

opšte pravilnosti koje vladaju među tim činjenicama, kao i mogućnost da se, polazeći od izvjesnih tačnih tvrđenja, pravilnim rasuđivanjem, izvedu razna druga tvrđenja. Drugim riječima, u geometriji se postepeno rađala ideja o deduktivnoj metodi. Taj stepen razvoja geometrije pada, kao što nam je poznato, u vrijeme cvjetanja stare grčke kulture[1], uglavnom u vrijeme između VI i II vijeka prije nove ere.

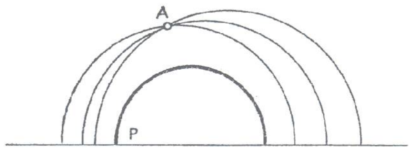
Međutim, i pored relativno visokog stepena strogosti, geometrija stare Grčke čvrsto se držala svoga korijena: pojmovi koji se u njoj javljaju još uvijek su čvrsto vezani jedino za realni, fizički prostor, što je i sasvim prirodno ako se ima u vidu tadašnji razvoj nauke opšte, a posebno logike.

Propašću stare Grčke dolazi do velikog zastoja u razvoju naučne misli, pa i matematike. Ovaj zastoj trajao je, sa malim izuzecima, čitav srednji vijek; stoga nije ni čudno da je Euklidova knjiga Elementi do 18. vijeka bila gotovo jedini udžbenik geometrije. Poslije opsežnih geometrijskih istraživanja u drugoj polovini 18. i tokom 19. vijeka, polako se lome stege koje su geometriju dotad držale isključivo prikovanu za stvarni prostor. Radovi Lobačevskog, Bolyaya, Gausa, ukazali su na nove puteve kojima se može ići u geometriji. Kako znamo, Lobačevski je razvio geometriju u kojoj je, umjesto Euklidovog petog postulata, uzeo za aksiomu njegovu negaciju. Razvijajući sistem posljedica takve geometrije, nije uspio da nađe nikakvu protivrječnost. To ga je ohrabrivalo u uvjerenju da je na dobrom putu, ali je i sam uviđao da to nije dovoljno, — možda, neka posljedica aksioma, koja nije obuhvaćena njegovim razmatranjem, krije u sebi protivrječnost. Lobačevski nije doživio pravu potvrdu svojih ideja; tek po njegovoj smrti, nađeni su logički ispravni dokazi o neprotivrječnosti njegove teorije — sagrađeni su razni njeni modeli. Ovi modeli su izgrađeni, doduše, sredstvima euklidske geometrije, pa je tako pitanje neprotivrječnosti geometrije Lobačevskog svedeno na pitanje neprotivrječnosti euklidske geometrije[2]. Među takvim modelima, dobro su poznati, na primjer, Klejn-Beltramijev model, model Poenkarea (Poincaré) i mnogi drugi. U Poincaréovom modelu, recimo, riječ ravan interpretira se kao otvorena poluravan euklidskog prostora (tj. poluravan bez početne prave), riječ prava kao polukružnica u toj ravni sa centrom na (izostavljenoj) početnoj polupravoj te ravni. Riječ tačka interpretira se kao tačka te polu-

[1] Nekoliko riječi o tome može se naći u udžbeniku, str. 82.

[2] Neprotivrječnost euklidske geometrije svedena je na pitanje neprotivrječnosti aritmetike.

ravni. Pripadanje tačke pravoj interpretira se kao pripadanje tačke polukružnici, a presjek pravih — kao presjek polukružnica, itd. Nije teško uvidjeti da pri takvoj interpretaciji važe sve aksiome geometrije Lobačevskog, koje se odnose na ravan. Tako je već i sa slike jasno da ne važi euklidska aksioma paralelnosti: kroz tačku A van prave p prolazi beskonačno mnogo pravih koje ne sijeku pravu p.



Osim rješenja problema petog postulata, koje je imalo dalekosežnih posljedica na razvoj matematike uopšte, u prošlom vijeku je izvršeno kritičko preispitivanje svih polaznih pojmova i stavova euklidske geometrije. Tako je, između ostalog, zapaženo da pojam neprekidnosti prave, kružnice i uopšte geometrijske linije treba da se temelji na nekim dodatnim aksiomama (Paš, 1882); primijećeno je, na primjer, da se na osnovu Euklidovih aksioma ne mogu dokazati čak ni tako na izgled jednostavne činjenice kao što je stav o presjeku prave i kružnice: prava siječe kružnicu ako je njeno odstojanje od centra manje od poluprečnika kružnice. Radi logičkog sređivanja i upotpunjavanja sistema aksioma geometrije, istraživanja su vršili matematičari Peano (G. Peano), Paš (M. Pasch), Pieri (M. Pieri), Klajn (F. Klein) i mnogi drugi. Vrhunac toga poduhvata, može se tako reći, je čuveno djelo „Osnovi geometrije" D. Hilberta iz 1899. godine. U tom djelu geometrija dostiže stupanj razvoja koji, otprilike, ima i danas. Moramo primijetiti da je na tako nagli razvoj geometrije krajem 19 vijeka, imao velikog uticaja i razvoj matematike uopšte; teorija skupova, teorija grupa, matematička logika, otprilike, u isto vrijeme doživljavaju buran procvat i, pritom, neobično mnogo utiču jedna na drugu.

O raznim pristupima geometriji. Već smo ranije pomenuli da postoji više „puteva" koji vode u geometriju, odnosno, u izboru osnovnih pojmova vlada određena sloboda. Opisujemo sada nekoliko mogućih pristupa geometriji.

Pođimo od Hilbertovih osnovnih pojmova, kao najpoznatijih. Osnovni objekti u njegovoj aksiomatici su tačke, prave, ravni, a osnovne relacije su pripadanje, između i podudarnost (duži i uglova). Hilbertove aksiome podijeljene su na nekoliko skupina, to su aksiome pripadanja, rasporeda, podudarnosti, paralelnosti i neprekidnosti. Istaknimo da Hilbert metrička svojstva euklidskog prostora uvodi preko pojma podudarnosti. Zanimljivo je da se, pri raznim pristupima geometriji, raskrsnica javlja, upravo, na putu zasnivanja metričkih svojstava prostora. Pored Hilbertovog pristupa, ističu se, uglavnom, još dva: pristup u kojem je kretanje osnovni pojam (ne mehaničko kretanje, već određeno preslikavanje, koje se uzima za osnovni pojam) i pristup u kojem je rastojanje osnovni pojam (tj. određeno preslikavanje,[3] koje svakom paru tačaka pridružuje tačno jedan pozitivan realan broj). Nije teško uvidjeti da navedena tri pristupa dovode do istog pojma euklidskog prostora: polazeći od bilo kojeg od njih, mogu se definisati ostala dva i dokazati sva njihova svojstva. Polazeći, na primjer, od podudarnosti, može se definisati kretanje i rastojanje (tako je, na primjer, učinjeno u našoj knjizi). Ako je kretanje osnovni pojam, tada se podudarnost duži definiše: $AB=CD$ ako postoji kretanje koje preslikava duž AB na duž CD, a rastojanje je, u tom slučaju, jedna invarijanta kretanja. Najzad, ako se pođe od pojma rastojanja, tj. dužine duži, može se lako definisati podudarnost: $AB=CD \Leftrightarrow \overline{AB}=\overline{CD}$, a, takođe, i kretanje, kao preslikavanje koje prevodi tačke A i B u tačke C i D, takve da je $\overline{AB}=\overline{CD}$. Među geometrima kod kojih je kretanje osnovni pojam, ističemo Peana i Pieria, a među onima kod kojih je rastojanje osnovni pojam, ističemo Kagana (V. F. Kagan) i Birkhofa (G. D. Birkhof). Svaki od navedenih pristupa ima odraza i u udžbenicima srednjoškolske geometrije. Pomenimo neke poznatije među njima: F. Šur (F. Schur), *Osnovi geometrije* (na njemačkom), 1909, gdje je kretanje osnovni pojam; A. P. Kiseljev, *Geometrija*, gdje je podudarnost osnovni pojam; E. E. Moiz i F. L. Dauns (E. E. Moise i F. L. Downs), *Geometrija* i A. V. Pogorelov, *Elementarna geometrija*, gdje je rastojanje osnovni pojam.

Aksiomatika, sa rastojanjem kao polaznim pojmom, ima raznih prednosti u odnosu na Hilbertovu aksiomatiku. Na primjer, prelaz od pojma podudarnosti duži ka pojmu mjerenja duži, odnosno, uvođenja rastojanja prilično je složen, dok je obratan put, od pojma rastojanja ka podudarnosti, vrlo jednostavan i lak; dalje, polazeći od relacije između i odgovarajućih Hilbertovih aksioma, raspored tačaka na pravoj uvodi se prilično složenim sistemom stavova, dok se, koristeći se pojmom rastojanja i njego-

[3] Ovdje je, u stvari, sadržana ideja metričkog prostora, jer se pretpostavlja da to preslikavanje zadovoljava uslove:

(1) $\rho(A, B)>0$, za $A \neq B$, $\rho(A, A)=0$

(2) $\rho(A, B)=\rho(B, A)$

(3) $\rho(A, C)+\rho(C, B) \geqslant \rho(A, B)$,

gdje $\rho(A, B)$ označava rastojanje tačaka A i B. Ovi uslovi nisu ništa drugo nego aksiome metričkog prostora.

vim svojstvima, raspored tačaka na pravoj definiše vrlo lako. Iz navedenih razloga, pristup geometriji preko rastojanja izgleda dosta prihvatljiv i ima mnoge pristalice. Međutim, ovaj prividno lak pristup geometriji ima „manu": od samog početka geometrije koristi se teorija realnih brojeva, pa su teškoće, koje nastaju u izgrađivanju geometrije kod Hilberta, potisnute, zapravo, na drugo područje — teoriju realnih brojeva.

Pomenimo još dva pristupa geometriji koji se suštinski razlikuju od svih navedenih. Riječ je o zasnivanju geometrije na osnovu pojma simetrije, koji je izgradio savremeni njemački matematičar Bahman (F. Bachmann) i o zasnivanju geometrije preko vektorskog prostora, koje je vezano za ime poznatog matematičara Vejla (H. Weyl).

Geometrija u našem udžbeniku. Gradivo geometrije u našem udžbeniku podijeljeno je na nekoliko cjelina, koje bi se mogle ovako opisati: Važniji skupovi tačaka, Podudarnost trouglova i razne posljedice, Izometrije, Transformacija sličnosti, Obim i površina mnogougla i kruga. Način našeg izlaganja je, može se tako reći, delimično aksiomatski. To, otprilike, znači ovo: gdje god je to bilo podesno, gradivo je izloženo aksiomatski, polazeći od izvjesne skupine polaznih stavova. Razlog tome je vrlo jednostavan: potpuno strogo deduktivno izlaganje je uopšte veoma složen proces i stoga često nedostupno učeniku ovog uzrasta. Mjestimično je dokazivanje potpuno strogo, ali u mnogim prilikama koristili smo se i očiglednošću slike kao „pomoćnim sredstvom". Mnogi stavovi, koji imaju težak dokaz, a pritom iskazuju razne, naizgled, jednostavne činjenice, navedeni su bez dokaza. Takav je, na primjer, stav da mnogougaona linija neke ravni dijeli skup preostalih tačaka te ravni na dvije oblasti (unutrašnju i spoljašnju oblast), zatim stavovi o presjeku dvije kružnice, o presjeku kružnice i prave i sl. Aksiome su u knjizi podijeljene na nekoliko cjelina, koje bi se mogle ovako opisati: aksiome pripadanja, paralelnosti, rasporeda, podudarnosti. U vezi sa mjerenjem duži, pomenute su i aksiome neprekidnosti. Aksiome podudarnosti, podijeljene su, dalje, na tri skupine, koje čine aksiome o podudarnosti duži, uglova, trouglova.
Poslije ovih opštih napomena, prelazimo na detaljnije razmatranje pojedinih geometrijskih sadržaja.

(*i*) **Važniji skupovi tačaka.** U našem izlaganju polazimo od izvjesnog nepraznog skupa koji zovemo prostor, a njegove elemente zovemo tačke. Razni neprazni podskupovi tačaka zovu se i geometrijske figure. Među njima se ističu prava,

ravan, duž, poluprava, ugao, mnogougao, kružnica. U ovom dijelu razmatraju se pitanja koja se odnose, uglavnom, na pripadanje, paralelnost, raspored (tačaka) i mjerenje (duži i uglova).
Aksiome pripadanja, kojih ima pet, iskazuju jednostavne činjenice o odnosu tačaka, pravih i ravni, a nekoliko njihovih posljedica je potpuno strogo dokazano. Smatramo da je vrlo korisno da učenik savlada dobro ove dokaze zbog njihove pregledne logičke strukture. Tako je, na primjer, u dokazu teoreme o presjeku dvije prave korišćen zakon kontrapozicije, u dokazu prvog dijela teoreme o ravni određenoj tačkom i pravom zakon tranzitivnosti implikacije, a u drugom dijelu zakon svođenja na protivrječnost. Da bismo se u to uvjerili, zadržimo se na ovoj teoremi i analizirajmo njen dokaz. Prvi dio dokaza možemo zapisati i u obliku produžene implikacije:

$A \notin p$	(Pretpostavka),
$\Rightarrow A \notin p$ i na p postoje dvije tačke B i C	(Aksioma 2 i zakon $p \Rightarrow p \wedge \top$)
$\Rightarrow$ Tačke A, B, C nisu kolinearne	(Definicija kolinearnosti)
$\Rightarrow$ Postoji ravan π koja sadrži tačke A, B, C	(Aksioma 3)
$\Rightarrow$ Postoji ravan π koja sadrži tačke A i pravu p	(Aksioma 4).

U drugom dijelu stava treba dokazati da *postoji najviše jedna ravan koja sadrži pravu p i tačku A*. Označimo ovaj iskaz sa P. Pretpostavimo da važi *ne* P, tj. da postoje bar dvije ravni, π i π', koje sadrže pravu p i tačku A. Odavde zaključujemo da postoje bar dvije ravni koje sadrže tačke A, B i C. Ovo je suprotno aksiomi 3, dakle, $\pi = \pi'$. Drugim riječima, ako aksiomu 3 označimo Q, navedeni dokaz oslanja se na poznati logički zakon *reductio ad absurdum* koji glasi

$(\neg P \Rightarrow Q \wedge \neg Q) \Rightarrow P$.

Uopšte, kad god smo u prilici da dokazujemo neko tvrđenje oblika: *postoji samo jedan objekt takav i takav*, postupamo slično, pretpostavljamo da postoje bar dva takva objekta i tu pretpostavku dovodimo do kontradikcije.

Napomenimo da se u geometriji često dešava da za neki skup tačaka $\mathcal{P}$ postoji tačno jedna figura $\mathcal{F}$, takva da $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$.

Tada kažemo da skup $\mathcal{P}$ određuje figuru $\mathcal{F}$. Tako, prema prethodno razmatranom stavu, prava p i tačka A određuju ravan π. Slično, dvije različite tačke A i B određuju pravu kojoj pripadaju, tri nekolinearne tačke A, B, C određuju ravan kojoj pripadaju. Pravu određenu tačkama A i B, označavamo i prava AB, slično, ravan određenu tačkama A, B, C označavamo i ravan ABC.

Zanimljivo je da tome možemo dati i drugo tumačenje. U slučaju prave, možemo smatrati da je riječ o uslovnoj operaciji kojom se svakom paru (A, B) različitih tačaka pridružuje jedna prava, kao rezultat ove operacije. Tu je uslov različitost tačaka A i B. Slično, u slučaju ravni, svakoj trojci (A, B, C) nekolinearnih tačaka pridružuje se tačno jedna ravan, u oznaci ABC. Eto, dakle, primjera uslovne ternarne operacije (uslov je nekolinearnost tačaka). O sličnim uslovnim operacijama bilo je već ranije riječi.

U tački koja se odnosi na paralelnost navode se teoreme čiji su dokazi nešto složeniji. Smatramo da nije neophodno da učenici savladaju sve te dokaze. Važno je i neophodno da svi učenici dobro shvate formulacije teorema i njihov smisao, i poneki jednostavniji dokaz. Na primjer, svaki učenik treba da zna dobro, da je paralelnost pravih relacija ekvivalencije i da mu je jasno šta to znači. Međutim, u vezi sa dokazom stava o tranzitivnosti paralelnosti pravih, primijetimo ovo. Ako prave pripadaju jednoj ravni, tranzitivnost se vrlo lako dokazuje svođenjem na kontradikciju sa aksiomom paralelnosti, i može ga svaki učenik savladati. Međutim, za prave u prostoru, dokaz je prilično složen, pa smatramo da nije neophodno da ga prosječan učenik savlada. Ipak je naveden u knjizi, jer smo imali u vidu i one učenike koji se više zanimaju za matematiku.

Raspored tačaka na pravoj uveden je u našoj knjizi pomoću relacije između kao osnovnog pojma. Kako znamo, to je polazna relacija i u Hilbertovoj aksiomatici. Aksiome u knjizi su, međutim, prilagođene uzrastu učenika[4] — sadrže mnogo više informacija nego što je neophodno, da bi tako izlaganje postalo jednostavnije i da bi se brže postigao cilj: to su definicije duži, poluprave, poluravni.

[4] Slične se aksiome rasporeda nalaze u knjizi A. V. Pogorelov, Elementarna geometrija (na ruskom), Moskva, 1974.

Na osnovu aksiome 8 može se jednostavno dokazati da između dvije različite tačke neke prave ima beskonačno mnogo tačaka te prave. Evo tog dokaza. Ako su A i B dvije različite tačke, po aksiomi 8 postoji tačka C između tačaka A i B.

Dalje, po istoj aksiomi, postoji tačka D između tačaka A i C, pa, zatim, tačka E između tačaka C i B, i tako dalje, možemo nastaviti to „zgušnjavanje", dodajući sve nove i nove tačke između dvije stare. Da li je tim dokaz završen? Prividno, izgleda da smo dokazali da između tačaka A i B ima proizvoljno mnogo tačaka, ali nije tako, jer tačka D jeste između A i C, a da li je između A i B? Slično pitanje može se postaviti i za tačku E i sve ostale tačke dobijene prethodnim rasuđivanjem. Odgovor je, ipak, potvrdan, to nam, zapravo, obezbjeđuje drugi dio aksiome 8, jer, prema njemu, važi implikacija $A—C—B$ i $A—D—C \Rightarrow A—D—B$. Navedena formula iskazuje, u izvjesnom smislu, tranzitivnost relacije između.

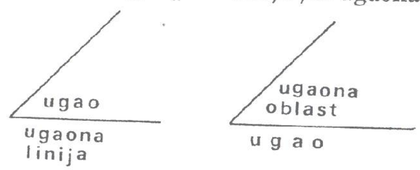
Aksiome 9 i 10 iskazuju značajna svojstva prave, odnosno ravni. Iz aksiome 9 proizilazi da svaka tačka A prave definiše jednu relaciju ekvivalencije skupa preostalih tačaka prave koja ima tačno dvije klase. Tu relaciju možemo opisati riječima: biti sa iste strane tačke A, ili formulski, ako tu realciju označimo $\sim_A$: $P \sim_A Q \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A—P—Q$ ili $A—Q—P$. Relacija $\sim_A$ je, zapravo, osnova za definiciju poluprave sa početnom tačkom A. To je unija skupa $\{A\}$ i jedne od klasa relacije $\sim_A$. Potpuno je analogna situacija u vezi sa aksiomom 10 i definicijom poluravni.

Zadržimo se, dalje, na definiciji ugla. U našoj knjizi je to, opisno rečeno, dio ravni ograničen ugaonom linijom. Postoje, međutim, u matematičkoj literaturi različiti pristupi tom pojmu, ne samo u načinu definisanja već i u značenju riječi ugao. Navodimo nekoliko karakterističnih pristupa. Početkom 19. vijeka (tačnije 1812) Bezu (E. Bézout) definiše ugao kao veličinu okretaja kojom se dovodi jedan krak u položaj drugog. Godine 1867. Hankel definiše ugao kao lik koji obrazuju dva poluzraka, koja polaze iz jedne tačke, a slična definicija nalazi se i kod Hilberta. Bertran (L. Bertrand), 1774, definiše ugao kao dio ravni „koji je zajednički poluravnima koje su ograničene njegovim kracima", a 1891.

Veroneze (G. Veronese) predlaže da se ugao definiše kao skup polupravih u ravni koje su „između" dvije polupravne sa zajedničkim početkom. Navodimo i jednu knjigu na našem jeziku, to je Elementarna geometrija M. Radojčića (Beograd, 1961), gdje se ugao, takođe, definiše kao dio ravni. U našoj knjizi prihvatili smo taj pristup.

Prva od navedenih definicija je u vezi sa mehaničkim kretanjem, pa nije u skladu sa današnjim shvatanjem geometrije. Primijetimo, međutim, da se i danas može ponegdje čuti slična definicija, ne, doduše, u vezi sa mehaničkim okretanjem, već u vezi sa proslikavanjem koje zovemo rotacija. Takav je pristup, recimo, u poznatoj knjizi Šokea (Gustave Choquet, L'Enseignement de la Geometrie, 1964), prevedenoj i na ruski jezik. Ta definicija ima određenih prednosti, na primjer, u vezi sa sabiranjem uglova, ali zahtijeva u osnovi drugačiji pristup geometriji, tj. prethodno uvođenje izometrijskih preslikavanja.

Definicije Hankela i Hilberta odnose se na ono što mi zovemo ugaona linija, pa se svakom uglu pridružuje još ugaona površ, a to je ono što mi zovemo konveksan ugao. U tom slučaju ne postoje ugaone površi „veće" od površi opruženog ugla.



Takva je, na primjer, definicija ugla i ugaone površi u već citiranoj knjizi Pogorelovljevoj. Definicije Bertrana i Veronezea slične su definiciji koju smo mi prihvatili (uz jednu primjedbu: u definiciji Veronezea stoji skup polupravnih, dok se kod nas radi, zapravo, o uniji tih polupravnih, odnosno o skupu svih tačaka tih polupravnih). „Mana" naše i sličnih definicija ugla javlja se pri njihovom sabiranju, kad taj zbir „pređe" pun ugao. Stoga smo i proširili pojam ugla (vidjeti o tome u našoj knjizi, na str. 80), tako proširen pojam ugla sastoji se u stvari iz dva dijela, izvjesnog broja punih uglova i jednog „starog" ugla.

U definisanju mnogougla, takođe, ne postoji jedinstveno gledište: ponegdje se govori o mnogougaonoj liniji i mnogouglu (kao uniji mnogougaone linije i njene unutrašnje oblasti), a ponegdje o mnogouglu (kao liniji) i mnogougaonoj površi. Mi smo se opredijelili za prvo gledište, radi analogije sa definicijom ugla. Drugi je razlog taj što se često govori

o konveksnom mnogouglu, a taj pojam ima smisla ukoliko je mnogougao izvjestan dio ravni. Doduše, mogli bismo govoriti i o konveksnoj mnogougaonoj površi, što predstavlja samo malo složenije izražavanje. Prigovor našoj definiciji mnogougla može biti ovakav: ne postoji mogućnost uopštavanja našeg mnogougla na prostorni mnogougao. Ali i tu je rješenje slično: može se govoriti o prostornoj mnogougaonoj liniji.

Pri upoređivanju duži i uglova, polazimo od podudarnosti duži i podudarnosti uglova kao osnovnih pojmova. Pretpostavljamo da su to relacije ekvivalencije saglasne sa sabiranjem duži, odnosno, uglova. Zbog navedenog svojstva, podudarnost duži i uglova ima mnogo zajedničkog sa, na primjer, jednakošću brojeva. Stoga je uobičajeno, u slučaju podudarnosti duži i uglova, umjesto riječi podudarno, upotrebljavati riječ jednako (ovu jednakost ne smijemo brkati sa skupovnom jednakošću, jer dva skupa su jednaka („skupovno") ako sadrže iste elemente.

U vezi sa pojmom mjere duži, tj. njene dužine, važno je istaći da je tu riječ o izvjesnom preslikavanju skupa svih duži u skup pozitivnih realnih brojeva i da su, pritom, ispunjeni uslovi:

(1) postoji duž čija je dužina jednaka 1;

(2) podudarne duži imaju jednake dužine;

(3) dužina zbira dvije duži jednaka je zbiru njihovih dužina.

Duž čija je mjera 1 naziva se jedinična duž.

Razmjera dvije duži uvedena je u našem izlaganju kao količnik njihovih dužina u izvjesnom sistemu mjerenja. Pri tome je istaknuto da ovaj broj ne zavisi od izabranog sistema mjerenja, što je neobično važna činjenica, jer, inače, ovako definisana razmjera ne bi bila korektna.

Primijetimo i ovo. Kao što smo u knjizi definisali mjeru duži, upoređivanjem proizvoljne duži AB sa izvjesnom duži PQ izabranom za jediničnu, tako možemo upoređivati i ma koje dvije duži PB i CD, tj. dokazati da postoji tačno jedan pozitivan realan broj r koji pokazuje „koliko puta" se duž CD sadrži u duži AB, i to zapisujemo ovako $AB=rCD$. S tim u vezi, istaknimo i ovu značajnu ekvivalenciju: za ma koje duži AB i CD važi:

$$\frac{AB}{CD}=r \Leftrightarrow AB=rCD.$$

Mjerenje uglova uvodi se analogno mjerenju duži, pa se, na tome nećemo posebno zadržavati.

(*ii*) **Podudarnost trouglova i razne posljedice.** U Hilbertovom spisku aksioma podudarnosti, sem aksioma koje se odnose na podudarnost duži, odnosno uglova, nalazi se još samo jedna aksioma koja povezuje podudarnost duži i uglova. Možemo je ovako iskazati:

Za ma koja dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ važi

$$AB=A'B' \wedge AC=A'C' \wedge \sphericalangle A=\sphericalangle A' \Rightarrow \sphericalangle B=\sphericalangle B'.$$

Koristeći se samo ovom aksiomom, pored ranije navedenih aksioma podudarnosti duži i uglova, mogli bismo dokazati sve stavove o podudarnosti trouglova. Da bismo skratili izlaganje, mi smo, u stvari, ove stavove uzeli za polazne, da bismo time stavili veći naglasak na njihovu primjenu. Ideja da se stavovi podudarnosti uzmu za aksiome nije nova: slično je postupljeno u već ranije pomenutom udžbeniku geometrije za srednje škole u SAD, Moiza i Daunsa.

Osvrnimo se, sada, sa nekoliko rečenica, na problem geometrijskih konstrukcija[5]. Može se govoriti o geometrijskim konstrukcijama u ravni i u prostoru; mi se ovdje zadržavamo samo na konstrukcijama u ravni, kojima odgovara crtanje pomoću šestara i lenjira. Pri konstrukcijama u ravni, smatramo da su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) Za svake dvije konstruisane tačke A, B može se konstruisati prava AB;

2) Za svaku konstruisanu tačku O i konstruisanu duž[6] r može se konstruisati kružnica $k(O, r)$;

3) Ako se dvije konstruisane prave sijeku, njihov presjek se može konstruisati;

4) Ako se dvije konstruisane kružnice sijeku, njihov presjek se može konstruisati;

5) Ako se konstruisana prava i konstruisana kružnica sijeku, njihov presjek se može konstruisati.

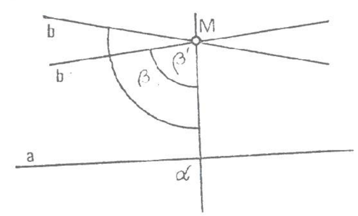
Navedene konstrukcije pravih, kružnica i njihovih presječnih tačaka zovu se elementarne konstrukcije. Dogovorno, svaka konstrukcija u ravni sastoji se od izvjesnog konačnog broja

[5] U vezi sa geometrijskim konstrukcijama i raznim pitanjima koja se na njih odnose, vidjeti detaljnije, na primer, u knjizi B. J. Argunov, M. B. Balk, Elementarna geometrija (na ruskom), Moskva, 1966.

[6] Smatra se da je duž konstruisana ako su konstruisane njene krajnje tačke.

elementarnih konstrukcija, kojima se, polazeći od datih elemenata za koje smatramo da su konstruisani, može konstruisati tražena figura.

Teme *Uglovi na transverzali* i *Neki odnosi stranica i uglova trougla* obrađene su na način uobičajen u takvim prilikama, pa se na tome nećemo posebno zadržavati; ukazaćemo samo na nekoliko važnijih mjesta. Teoreme o uglovima uz transverzalu date su u obliku ekvivalencije, odnosno možemo ih tumačiti kao razne potrebne i dovoljne uslove za paralelnost dvije prave, stoga su od velike važnosti u primjeni. Preporučujemo da se dobro prorade i dokazi ovih teorema. Naročito je zanimljiv dokaz teoreme o saglasnim uglovima. Naglasimo da se dokaz implikacije $\alpha=\beta \Rightarrow a \parallel b$ temelji na stavu o spoljašnjem i nesusjednom unutrašnjem uglu trougla, dok se implikacija $a \parallel b \Rightarrow \alpha=\beta$ bitno oslanja na aksiomu paralelnosti. Štaviše, može se dokazati da joj je i ekvivalentna, tj. ako se pretpostavi da važi $a \parallel b \Rightarrow \alpha=\beta$, aksioma paralelnosti može se dokazati (uz korišćenje ostalih već uvedenih aksioma). Evo jednog dokaza tog tvrđenja pomoću metode raductio ad absurdum. Predpostavimo da ne važi aksioma paralelnosti, tj. da postoje tačka M i prave a, b i b' takve da $b \times b'=M$, $b \parallel a$, i $b' \parallel a$. Neka je p ma koja prava koja sadrži tačku M i siječe pravu A. Tada je (vidjeti sliku) $\beta=\alpha$, i $\beta'=\alpha$, odakle je $\beta=\beta'$. Ovo je suprotno aksiomi 19, dakle, aksioma paralelnosti važi.



U tački *Neki odnosi stranica i uglova trougla*, navedeni su, kratko, stavovi o presjeku prave i kružnice, odnosno stavovi o presjeku dvije kružnice. Kako smo već napomenuli, dokazi stavova o postojanju presjeka oslanjaju se na aksiome neprekidnosti, pa su, stoga, izostavljeni; međutim, neobično je važno za primjenu da učenik dobro savlada sve slučajeve koji se tu javljaju, a pregledno su dati u vidu crteža i odgovarajućih formula.

U vezi sa dokazom teoreme o uglovima jednakokrakog trougla, primijetimo da se ona može dokazati i koristeći se samo stavovima *SSS* i *USU*, dakle, kao neposredna posljedica aksioma podudarnosti trouglova. Evo takvog dokaza (uz oznake na str. 108. u knjizi):

$AB = AC$

$\Leftrightarrow AB = AC \wedge AC = AB \wedge BC = CB$

$\Leftrightarrow \triangle ABC \cong \triangle ACB$ (Po stavu SSS)

$\Leftrightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle C \wedge \sphericalangle C = \sphericalangle B \wedge BC = CB$ (Po stavu USU)

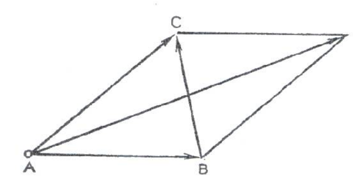
$\Leftrightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle C$

Pređimo sada na razmatranje o vektorima. Istaknimo glavna mjesta. Prvo je data definicija vektora kao usmjerene duži, zatim je definisana jednakost dva vektora i istaknuta su njena osnovna svojstva, pri čemu je najznačajnije da je to relacija ekvivalencije. Iza toga je definisano sabiranje vektora i dokazani su osnovni zakoni sabiranja vektora, odakle proizilazi da skup svih vektora u odnosu na sabiranje čini komutativnu grupu. Najzad, definisano je množenje vektora realnim brojem i istaknuti su zakoni koje zadovoljava ova operacija. Podsjećamo da se navedena svojstva sabiranja vektora i množenja vektora brojem uzimaju za aksiome jedne algebarske strukture koja se zove vektorski ili linearni prostor nad poljem realnih brojeva. Ovo je neobično važna algebarska struktura; napominjemo da se na osnovu nje, kao polazne, uz određene dopune, može izgraditi čitava euklidska geometrija. Kao što smo već pomenuli, u vezi sa raznim pristupima geometriji, tim putem u izgradnji euklidske geometrije pošao je i čuveni matematičar H. Vejl u svom djelu „Prostor, vrijeme, materija" iz 1918. Kako je takav „put u geometriju" neobično jednostavan i može se reći, vrlo elegantan, našao je mnoge zagovornike i među autorima udžbenika geometrije. Iako su aksiome kojima se tako izgrađuje geometrija vrlo jednostavne, — to su već pomenute aksiome vektorskog prostora, zatim aksiome skalarnog proizvoda i tzv. aksiome dimenzije — takvom načinu izgradnje geometrije može se staviti prigovor zbog odsustva očiglednih predstava vezanih za stvarni prostor, koje karakterišu, na primjer, Hilbertovu aksiomatiku. Među najistaknutijim sljedbenicima Weylove ideje, nalazi se veliki savremeni francuski matematičar Žan Djedone (Jean Dieudonné). koji u knjizi „Linearna algebra i elementarna geometrija" (Pariz, 1964) ovu potonju izlaže isključivo kao vrstu linearne algebre, zalažući se, pritom, za takav pristup geometriji u srednjoj školi. Valja napomenuti da je ova efektno napisana knjiga izazvala različite burne reakcije među matematičarima, naročito onim koji se bave srednjoškolskom matematikom i da je, svakako, uticala na njeno preispitivanje koje traje, može se slobodno reći, i danas. Smatramo da je neobično korisno za svakog nastavnika matematike da bude upoznat sa takvim načinom izlaganja geometrije, bez obzira na način kojim trenutno realizuje nastavu.

Vratimo se sada našem izlaganju o vektorima, i istaknimo ukratko glavne činjenice koje bi svaki učenik trebalo da zna.

Prvo, učeniku mora biti potpuno jasna definicija jednakosti vektora, tj. njen smisao: dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su jednaka ukoliko su duži AB i CD jednake i paralelne i još ako su "jednako usmjerene", smatrajući ovdje da je pojam jednake usmjerenosti vizuelno jasan. Drugo, neobično je važno da učenik dobro zapamti da je jednakost vektora relacija ekvivalencije i da mu je jasno šta su tu klase ekvivalencije.

(Primijetimo ovdje da se u literaturi često riječ vektor koristi samo za čitavu klasu ekvivalencije, dok se pojedini član klase zove samo usmjerena duž.) Dalje, učenik treba da dobro ovlada tehnikom rada sa vektorima i, s tim u vezi, da proradi odgovarajuće zadatke u zbirci. Sem sabiranja „po pravilu trougla", učenik treba da savlada i tehniku sabiranja i oduzimanja vektora „po pravilu paralelograma", kao i ekvivalentnost ova dva pravila. Dakle, učenik treba da zna ovo: ako su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ dva vektora sa zajedničkim početkom A, tada je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, gdje je D četvrto tjeme paralelograma, što ga razapinju vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, i $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. U vezi sa sabiranjem vektora, učenik treba da uoči da su istaknuta svojstva upravo aksiome komutativne grupe. Ovo je značajno stoga što je grupa vektora, tako reći, prvi primjer grupe različite od brojevnih grupa



$(Z, +)$, $(Q, +)$ i sl., koje već dobro poznaje.

(*iii*) **Izometrijske transformacije.** U tačkama koje se odnose na ovo gradivo data je prvo opšta definicija izometrije, zatim su redom definisane osna i centralna simetrija, translacija i rotacija, svojim karakterističnim svojstvima, i dokazano je da su to izometrijske transformacije. Zatim su uočene razne veze između tih izometrija, kao i mogućnost da se svaka izometrija predstavi kao proizvod izvjesnih simetrija. Najzad, data je definicija podudarnosti ma kakvih geometrijskih figura. Objasnimo sa nekoliko rečenica našu koncepciju. Prvo, dokazivanje svojstava uvedenih transformacija, prije svega, dokazivanje da one „čuvaju" podudarnost duži, temelji se na stavovima podudarnosti trouglova. Drugo, simetrija, translacija i rotacija definisane su nezavisno jedna od druge, preko njihovih, tako reći, prirodnih karakterističnih osobina, a tek su, zatim, istaknute veze među njima. Istaknimo i ovdje te veze: svaka translacija ravni je proizvod dvije osne simetrije te ravni sa paralelnim osama, a svaka rotacija ravni je proizvod dvije osne simetrije te ravni sa osama koje se sijeku u centru rotacije. Napominjemo da se ta svojstva rotacije i translacije mogu uzeti i za njihove definicije, a moguće je, dalje, i same simetrije definisati kao izometrije sa izvjesnim fiksnim tačkama. U takvom pristupu može se izgraditi teorija izometrija bez korišćenja stavova o podudarnosti trouglova. Mi, u našem izlaganju, nismo prihvatili takvu koncepciju, smatrajući da je, sa metodskog stanovišta, manje podesna, jer su tada definicije pojedinih izometrija, čini nam se, u izvjesnoj mjeri vještačke. Prema našoj koncepciji, pojmovi podudarnosti i izometrije „uporedo rastu" da bi se na određenim mjestima, da tako kažemo, preplitali i povezivali.

A sad nekoliko nastavnih napomena. Smatramo da svaki učenik mora dobro da savlada osnovne karakteristike svih navedenih preslikavanja, njihove zajedničke odlike, kao i posebnosti koje sadrži svako od njih. Zatim, treba da poznaje njihove međusobne veze, kao i veze centralnih simetrija sa translacijama i osobine proizvoda centralnih simetrija uopšte. S tim u vezi, vidjeti u zbirci zadatke: 15—19 (tačka 36), zadatke 8—17 (tačka 37), 10 i 11 (tačka 38). S druge strane, učenici treba da znaju da primijene pojedine izometrije u raznim konstruktivnim zadacima. To su u zbirci, na primjer, zadaci 4—9 (tačka 36), 4—7 (tačka 37), 4—6 (tačka 39). U vezi sa primjenama izometrija, pored stavova o uglovima sa paralelnim i sa normalnim kracima, ističemo stav o uglu

između tetive i tangente kružnice i konstruktivne zadatke koji se rješavaju pomoću njega. Skrećemo, međutim, pažnju da ne treba pretjerivati u broju i vrstama konstruktivnih zadataka uopšte, smatramo da je korisnije da učenik dobro savlada i shvati razne opšte činjenice, da bolje sagleda cjeline, nego da se izgubi u rješavanju konstruktivnih zadataka.

(*iv*) **Transformacija sličnosti.** U ovoj cjelini je prvo izvedena Talesova teorema koja je tu od osnovnog značaja. Primjećujemo da se njen dokaz zasniva na zakonu distributivnosti množenja vektora brojem prema sabiranju, tj. na zakonu $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$, koji smo, u tački o vektorima, naveli bez dokaza. Primijetimo da se navedena formula može izvesti iz Talesove teoreme, one su, dakle, ekvivalentne. Neposredan dokaz bilo koji od njih nije nimalo jednostavan, pa smo ga izostavili. Poslije Talesove teoreme, data je opšta definicija transformacije sličnosti, zatim homotetije i, najzad, dokazan je stav da je svaka transformacija sličnosti proizvod jedne izometrije i jedne homotetije. Iza toga je data definicija sličnosti trouglova i njihove primjene.

Ističemo da je, u vezi sa navedenim gradivom, važno da učenik uoči i shvati osobine transformacije sličnosti, zatim da upozna sličnost kao relaciju ekvivalencije među figurama. S tim ciljem, korisno je, recimo, postavljati učenicima i ovakva pitanja: šta čini klasu ekvivalencije neke kružnice (odgovor: sve kružnice ravni) i nekog jednakostraničnog trougla (odgovor: svi takvi trouglovi), neke duži, nekog pravougaonika, proizvoljnog trougla, itd? Najzad, korisno je da se učenik nauči koristiti metodom sličnih slika u rješavanju konstruktivnih zadataka.

(*v*) **Obim i površina mnogougla i kružnice.** U vezi sa obradom teme o površini mnogugla, smatramo da je korisno da učenici prethodno upoznaju ideju razlaganja mnoguglova, kao i razloživu jednakost. Stoga preporučujemo da se obrade zadaci 1—10 (tačka 49) u zbirci. Pošto je gradivo ove cjeline učenicima, uglavnom, već poznato, nećemo se na njemu duže zadržavati. Ističemo samo da je neobično važno da učenik shvati ideju mjerenja mnoguglova, tj. određivanja njihove površine. Stoga ističemo i ovdje da je određivanje površine mnogougla preslikavanje skupa mnogouglova u skup pozitivnih realnih brojeva, koje zadovoljava sljedeće uslove:

(1) Postoji mnogougao čija je površina 1;

(2) Podudarni mnogouglovi imaju jednake površine;

(3) Ako je mnogougalo M razložen na mnogouglove M_1 i M_2, površina mnogougla M jednaka je zbiru površina mnogouglova M_1 i M_2.

Pored toga, učenik mora da shvati ideju povezivanja dužina izvjesnih duži koje određuju mnogougao i površine tog mnogougla, preko odgovarajućih formula.

5. ALGEBRA BROJEVA

Uvod. U naslovu stoji algebra brojeva, jer, zapravo, gradivo I razreda srednje škole koje se odnosi na algebru (razne vrste brojeva, djeljivost prirodnih brojeva, osnovne algebarske pravilnosti, polinomi, jednačine, sistemi jednačina i drugo), može se shvatiti kao gradivo, slobodnije rečeno, *o zgradi brojeva*, odnosno *algebri brojeva*. Dajemo podrobnije objašnjenje. Jedna od odlika savremene matematike jeste da se u njoj veoma često razmatraju tzv. *matematičke strukture*. To su cjeline koje se sastoje iz izvjesnog skupa S, nekih njegovih operacija i nekih njegovih relacija. Recimo,

$$(N, +),\ (N, +, \cdot),\ (N, +, \cdot, |)$$

su primjeri takvih struktura. Prvu gradi skup prirodnih brojeva i sabiranje, a drugu uz njih još i množenje prirodnih brojeva. U prve dvije strukture nije uočena i neka relacija — takva struktura se naziva *algebarska struktura*, kaže se kraće i *algebra*. Do sada smo već pominjali grupoide i grupe kao primjere algebarskih struktura.

U skladu sa izloženim, navedeno gradivo algebre I razreda može se shvatiti kao istraživanje strukture

$$(R, +, -, \cdot, :)$$

odnosno algebre brojeva[1]. Može se, recimo, prigovoriti: Kako izlaganje o jednačinama ne uzimati kao posebnu cjelinu, već

[1] Istina, u vezi sa brojevima, istražuju se i relacije | (djeljivost u skupovima N i Z), kao i relacije $\leqslant, <, >, \geqslant$, pa bi puniji naziv bio matematička struktura brojeva. Ipak, čini se, naziv algebra brojeva potpuno je prikladan. Pomenimo još da u I razredu đaci upoznaju još jednu algebru — *iskaznu algebru*, koju gradi skup $\{\top, \bot\}$ u odnosu na pet operacija $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \urcorner$. Zanimljivo je ovo poređenje tih algebri:

Pojmovima *iskazna formula, tautologija* iskazne algebre odgovaraju pojmovi *polinoma* (opštije, racionalnih izraza) i *identiteta.*

jedino kao dio istraživanja algebre brojeva? Pa, savremena algebra se izlaže i razvija razmatranjem raznih algebarskih struktura. S tim u vezi, u svakoj strukturi može se postaviti pitanje rješavanja jednačina. Uostalom, ranije smo u vezi sa nekom datom tablicom operacije uočavali jednačine poput $x * a = b$, $x * x = c$, i sl.

Nastanak algebre brojeva. Razvojni put algebre brojeva može se predočiti crtežom

$$(N, +, \cdot) \to (Z, +, -, \cdot) \to (Q, +, -, \cdot, :) \to (R, +, -, \cdot, :)$$

Polazna struktura je $(N, +, \cdot)$ koja posjeduje pravilnosti izražene formulama:

$$(*) \qquad \begin{array}{ll} x+y=y+x & x\cdot y=y\cdot x \\ (x+y)+z=x+(y+z) & (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z) \\ & x\cdot 1=x \\ x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z & \end{array}$$

$(x, y, z$ ma koji prirodni broj$)$

ali ima i značajan nedostatak: sabiranje nema obratnu operaciju, tj. postoje jednačine po x oblika $a+x=b$, gdje $a, b \in N$, koje u skupu N nisu moguće. Radi otklanjanja tog nedostatka, struktura $(N, +, \cdot)$ se „nadograđuje", proširuje u strukturu $(Z, +, -, \cdot)$, koja je građena tako da i u njoj ostanu sačuvane pravilnosti $(*)$, a u vezi sa oduzimanjem pojavljuju se još ove dvije pravilnosti:

$$(**) \qquad x+0=x, \qquad x+(-x)=0$$

$(x$ ma koji cio broj$)$

Oduzimanje se, inače, definiše ovako:

$$x-y \overset{\text{def}}{=} x+(-y)$$

Nova struktura $(Z, +, -, \cdot)$, takođe, ima jedan značajan nedostatak — u vezi sa dijeljenjem. Iz tog razloga obavljamo proširenje

$$(Z, +, -, \cdot) \to (Q, +, -, \cdot, :)$$

Nova struktura zadovoljava pravilnosti $(*)$, $(**)$ i još pride ovu:

$$(***) \qquad x \neq 0 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Dijeljenje se, pritom, ovako definiše:

$$x : y \overset{\text{def}}{=} x \cdot \frac{1}{y} \qquad (\text{Ako } y \neq 0)$$

Zašto se u građenju brojeva ne zadržavamo na strukturi $(Q, +, -, \cdot, :)$? Razlog je u tome što sa takvim brojevima ne možemo, na način kako uobičajeno postupamo, obaviti mjerenje duži, mjerenje površi, tijela i sl. Tako, ako se stranica kvadrata uzme kao jedinična duž, tada bi dužina njegove dijagonale bio broj čiji kvadrat iznosi 2. Ali, takvog broja u skupu Q nema (vidjeti str. 99. udžbenika).

U vezi sa izloženim, navodimo sljedeće nastavne napomene:

(*i*) Učenici su postupno upoznavali brojeve već od prvog razreda osnovne škole. Mnoge činjenice iz algebre brojeva su im dobro poznate. Pa ipak, poznato je da učenici griješe u radu sa brojevima. Otuda, po našem mišljenju, na samom početku školske godine treba obnoviti i utvrditi razna pravila računanja. S tim u vezi, u zbirci se nalazi odeljak *Ponovimo o brojevima* i u njemu su izloženi razni zadaci prikladni za uvježbavanje „računice". Kratko rečeno, učenici moraju dobro ovladati osnovnim računskim operacijama: pogrešno je smatrati da modernizacija nastave matematike smanjuje značaj računice — što se, nažalost, ponegje čuje. Međutim, skrećemo pažnju da i u obnavljanju i utvrđivanju računice treba biti sistematičan i strpljiv. Recimo, treba izbjegavati glomazne računske zadatke, ali, s druge strane, treba dobro uvježbati zadatke oblika:

Izračunati $a * b$, gdje se $*$ jedna od operacija $+, -, \cdot, :$ i gdje su a, b, na primjer, članovi skupa

$$\left\{1;\ -2;\ \frac{1}{2};\ 6{,}32\right\}$$

i sl. Drugim riječima, učenici treba da urade veliki broj izračunavanja oblika: *broj, operacija, broj*, pri čemu riječ broj treba zamjenjivati raznovrsnim primjerima.

(*ii*) Uporedo sa obnavljanjem i utvrđivanjem računice, korisno je da učenici dobro usvoje opisani razvojni put algebre brojeva. Pored ostalog, treba da dobro upamte pravilnosti $(*)$, $(**)$, $(\overset{*}{**})$, jer su one, u stvari, logička osnova algebre brojeva.

Jednakost $a=bq+r$**. Djeljivost.** U aritmetici, odnosno strukturi prirodnih brojeva, od najvećeg značaja je relacija djeljivost (znak $|$), a sa njom u vezi, jednakost $a=bq+r$, odnosno ovo tvrđenje:

Za svaka dva prirodna broja a, b jedinstveno postoje dva cijela broja q, r koji zadovoljavaju uslove $a=bq+r$, $q\geqslant 0$, $0\leqslant r<b$.

Brojevi q, r se redom nazivaju količnik, odnosno ostatak dijeljenja broja a brojem b. Recimo, moguće je koristiti se ovim oznakama:

$$q=Q\,(a, b),\quad r=R\,(a, b).$$

Primjeri: $Q\,(5, 3)=1$, $R\,(5, 3)=2$, $Q\,(3, 5)=0$, $R\,(3, 5)=3$.

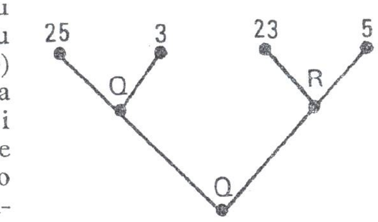
Kao što znamo, u slučaju $R\,(a, b)=0$, kažemo da je b djelilac broja a, oznaka: $b \mid a$. Drugim riječima:

$$b \mid a \Leftrightarrow (\exists\, q\in N)\, a=bq.$$

Navedene činjenice, uključujući Euklidov algoritam, kao i razmatranje raznih brojevnih sistema (osnove 10, 2,5 i sl.) u udžbeniku, kao i zbirci nalaze se u tačkama 24. i 25. Istina, oznake $Q\,(a, b)$, $R\,(a, b)$ nalaze se jedino u zbirci.

U vezi sa izloženim, navodimo sljedeće nastavne napomene:

(*i*) Značajno je da učenici dobro shvate istaknuto tvrđenje o količniku i ostatku. S tim u vezi, značajno je da umiju određivati $Q\,(a, b)$, $R\,(a, b)$ za ma koja dva prirodna broja. Drukčije rečeno, Q i R valja shvatiti i kao dvije operacije. Mogu se, skladno tome, zadavati i ovakvi zadaci: Koji broj odgovara drvetu



(*ii*) U vezi sa jednakošću $a = bQ\,(a, b) + R\,(a, b)$, dobro je da učenici naviknu na ovakva izražavanja.

Ako je b dati broj, tada svi prirodni brojevi, koji pri dijeljenju sa b daju ostatak r, imaju oblik $qb+r$, gdje je q neki prirodan broj ili 0.

Tako, u vezi sa brojem 3, svaki prirodan broj a je ili oblika $3k$, ili oblika $3k+1$, ili oblika $3k+2$, gdje[2] $k\in Z \wedge k\geqslant 0$. Slično važi opštije i za sve cijele brojeve.

Ovladavajući takvom mogućnošću izražavanja, trebalo bi očekivati da je učenicima blisko tvrđenje poput ovog:

Ako je kvadrat nekog cijelog broja djeljiv sa 3, tada je i taj broj djeljiv sa 3.

(*iii*) U vezi sa relacijom *djeljivost*, prirodno se pojavljuje relacija kongruencije po modulu m (oznaka $\equiv$ mod m), obrađena u tački 24. zbirke. Broj m je ma koji prirodan broj. Relacija $\equiv$ mod m je veoma bliska običnoj jednakosti. Naime, i ona je refleksivna, simetrična, tranzitivna, kao i saglasna sa sabiranjem, množenjem i oduzimanjem cijelih brojeva. Ta okolnost dopušta da se sa tom relacijom može postupati slično kao sa jednakošću. Određenije rečeno, ako je

$$I\,(a, b, \ldots, c, +, -, \cdot)$$

[2]) Razlog je što pri dijeljenju sa 3 odnosni ostatak može biti ili 0, ili 1, ili 2.

ma koji izraz građen pomoću operacijskih znakova $+$, $-$, i $\cdot$, i promjenljivih $a, b, \ldots, c$, koje označavaju cijele brojeve, tada je taj izraz, po modulu m, kongruentan sa izrazom koji nastaje iz njega ukoliko se jedan njegov dio (podizraz) A zamijeni izrazom B, uz uslov da je $A \equiv B \pmod m$. Drukčije rečeno, važi zakon zamjene (bilo čega kongruentnim). Recimo, tačna je implikacija

$$A \equiv B \pmod m \Rightarrow x+yA \equiv x+yB \pmod m$$

a dokaz je posve sličan dokazu slične implikacije za slučaj jednakosti.

Dobro je (ali, znači, to ne smatramo obaveznim) ako učenici savladaju tehniku upotrebe kongruencije, pa im, s tim u vezi, budu bliski zadaci poput ovog:

Da li je broj $583 \cdot 2^{10} - 324 \cdot 7^{60} + 834 \cdot 5^{40}$ djeljiv sa 3? U zbirci, pri kraju tačke 24, više zadataka je posvećeno takvim pitanjima.

(*iv*) Takođe, smatramo značajnim da učenici ovladaju i raznim drugim postupcima i tvrđenjima iz aritmetike, kao što su: Euklidov algoritam, rastavljanje na proste činioce, određivanje najmanjeg zajedničkog sadržioca i najvećeg zajedničkog djelioca, osnovne činjenice u vezi sa raznim brojevnim sistemima i slično.

Pravilnosti algebre brojeva. Algebra brojeva obiluje pravilnostima i, što je veoma zanimljivo, sve se one mogu izvesti kao logičke posljedice iz njih nekoliko, uzetih kao polazne, kao aksiome. Jednu takvu skupinu čine formule (*), (**), $(\overset{*}{**})$, navedene u izlaganju o nastanku algebre brojeva. Evo tih formula:

$$x+y=y+x \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(x+y)+z=x+(y+z) \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x+0=x \qquad x \cdot 1 = x$$

$$x+(-x)=0 \qquad x \neq 0 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Oduzimanje i dijeljenje se, kao što znamo, uvode definicijama

$$x-y \overset{\text{def}}{=} x+(-y); \quad x:y \overset{\text{def}}{=} x \cdot \frac{1}{y} \qquad (\text{Ako } y \neq 0)$$

Uz navedene aksiome treba priključiti još aksiomu $0 \neq 1$ i tako se dolazi do spiska aksioma algebarske strukture, koja se naziva polje (vidjeti str. 100 udžbenika). Pored navedenih aksioma, koristimo se i ovakvim definicijama:

$$2=1+1, \; 3=2+1, \; 4=3+1, \ldots, \; 20=19+1, \ldots,$$

pomoću kojih se ma koji prirodan broj izražava kao zbir jedinica. Kakve sve logičke posljedice, odnosno teoreme slijede iz navedenih aksioma polja? U mnoštvu svih teorema, uočićemo ove tri značajne skupine:

1° „KADAK" — teoreme,

2° teoreme u vezi sa razlikom,

3° teoreme u vezi sa dijeljenjem.

Imenom KADAK-teoreme označavamo sve one teoreme koje slijede iz komutativnog i asocijativnog zakona sabiranja i množenja, te distributivnog zakona množenja prema sabiranju. Otuda smo i napravili naziv KADAK (dvije komutativnosti, dvije asocijativnosti, jedna distributivnost). Te teoreme smo razmatrali u tački 22. udžbenika.

Kao prvo, istaknimo posledice asocijativnog zakona. One se mogu opisati riječima (str. 84 udžbenika).

U slučaju asocijativne operacije, dozvoljeno je kod izraza (sagrađenog pomoću znaka te operacije) zagrade brisati, pa ih zatim — ali bez mijenjanja redoslijeda članova, ponovo, po volji, postaviti. Tako se dolazi do izraza jednakog polaznom.

Na primjer, tačne su jednakosti:

$$(a+b)+(c+d)=(a+(b+c))+d, \quad a+(b+(c+d))=((a+b)+c)+d$$

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d, \quad a \cdot (b \cdot (c \cdot d)) = ((a \cdot b) \cdot c) \cdot d$$

gdje su a, b, c, d ma koji realni brojevi. Recimo, jedan dokaz prve jednakosti glasi

$(a+b)+(c+d)=((a+b)+c)+d$ (Jer $x+(y+z)=(x+y)+z$, gdje su x, y, z redom $a+b, c, d$

$=(a+(b+c))+d$ (Jer $(x+y)+z=x+(y+z)$, gde su x, y, z redom a, b, c

Dokaz jednakosti $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d$ može se napravit direktno pomoću tog dokaza: dovoljno je znak $+$ zamijeniti znakom $\cdot$. U stvari, podrobnije rečeno, preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & + \\ a & b & c & d & \cdot \end{pmatrix}$$

navedeni dokaz se prevodi u dokaz jednakosti $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d$. Na str. 84. smo naveli slično zapažanje. Ovdje ističemo da je posrijedi nešto veoma značajno i da se u vezi s tim ztv. *ideja prenosa* (iz jednog dokaza nekakvim preslikavanjem osnovnih znakova gradi se drugi dokaz, odnosno izvodi nova činjenica) pojavljuje kao jedna od najvažnijih istraživačkih ideja u matematici.

U vezi sa asocijativnim zakonom, pomenimo da sve jednakosti „tablice" sabiranja prirodnih brojeva, kao

$$2+2=4, \ 3+5=8, \ 17+5=22$$

i druge, jesu njegove posljedice. Tako, koristeći se definicijom $2=1+1$, $4=((1+1)+1)+1$, prvu jednakost možemo napisati u obliku

$$(1+1)+(1+1)=((1+1)+1)+1$$

i očigledno je da se obje strane razlikuju jedino u rasporedu zagrada[3]. Takođe, i razna svojstva stepenovanja (prirodnim izložiocem), kao

$$x^2 \cdot x^2 = x^4, \ x^3 \cdot x^5 = x^8, \ (x^3)^2 = x^6 \text{ i sl.},$$

slijede iz asocijativnog zakona (množenja). Recimo, u skladu sa definicijama

$$x^2 = x \cdot x, \ x^3 = (x \cdot x) \cdot x, \ x^4 = ((x \cdot x) \cdot x) \cdot x, \ldots,$$

prva jednakost se može preobratiti u jednakost

$$(x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = ((x \cdot x) \cdot x) \cdot x,$$

čija se lijeva i desna strana razlikuju jedino u rasporedu zagrada.

Opaska. Napravite jedan direktan dokaz te jednakosti na temelju asocijativnog zakona. Šta se dobija kad se na taj dokaz primijeni preslikavanje?

$$\begin{pmatrix} x & \cdot \\ 1 & + \end{pmatrix}$$

Na osnovu asocijativnog i komutativnog zakona, naravno, može se dokazati još mnogo novih teorema. Dobar uvid u takva tvrđenja se može opisati ovako (str. 84 udžbenika).

U slučaju operacije koja je i komutativna i asocijativna, u izrazu, izgrađenom pomoću znaka te operacije, dozvoljeno je zagrade obrisati, članove izraza po volji razmjestiti, pa potom, zagrade po volji, postaviti. Tako se dolazi do izraza jednakog polaznom.

[3]Više u vezi sa pitanjima „tablice" sabiranja i množenja prirodnih brojeva vidjeti u knjizi S. Prešić: *Savremeni pristup nastavi matematike*, Naučna knjiga, Beograd, 1975.

Jedna primjena te opšte teoreme je sljedeće svojstvo stepena $(xy)^n = x^n y^n$, gdje su x, y ma koji realni brojevi, a n prirodan broj. Najzad, ukoliko se koristimo komutativnim i asocijativnim zakonom sabiranja, kao i distributivnim zakonom množenja prema sabiranju, dolazimo do raznih novih zanimljivih tvrđenja. Jedno od središnjih je *teorema o množenju dva zbira:*

Proizvod dva zbira jednak je zbiru svih proizvoda po jednog sabirka prvog zbira sa po jednim sabirkom drugog zbira.

Pomoću te teoreme se lako izvode, na primjer, obrasci za $(a+b)^2$ i $(a+b)^3$ i sl. (vidjeti str. 86 u udžbeniku).

U vezi sa teoremom o množenju dva zbira, posebno ističemo sljedeće tvrđenje — tzv. *teoremu o sređivanju izraza:*

Za svaki izraz $I(+, \cdot)$, sagrađen od operacijskih znakova $+$ i $\cdot$, nekih promjenljivih i znakova konstanti, postoji njemu jednak izraz oblika

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k$$

gdje su $M_1, \ldots, M_k$ monomi. Monomi su, kao što nam je poznato, izrazi kao x^2y, $5x^3y^8$ i sl., odnosno izrazi koji od operacijskih znakova mogu sadržati jedino znak množenja. Drugim riječima, svaki izraz $I(+, \cdot)$ jednak je zbiru nekih monoma. Inače, to tvrđenje se dokazuje primjenom teoreme o množenju dva zbira. Recimo, jedan takav dokaz jednakosti

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ca) + abc$$

glasi

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) &= (xx+xb+ax+ab)(x+c)\\ &= xxx+xxc+xbx+xbc+axx+axc+abx+abc\\ &= x^3+x^2(a+b+c)+x(ab+bc+ca)+abc\end{aligned}$$

Slobodnije rečeno, dokaz se izvodi „izmnožavanjem" i sređivanjem polaznog izraza.

U vezi sa teoremom o sređivanju izraza $I(+, \cdot)$, istaknimo dvije opšte stvari.

Prvo, to tvrđenje, odnosno njegovo uopštenje za izraze oblika $I(+, \cdot, -)$, je osnovno u radu sa takvim izrazima, tj. polinomima. Drugim riječima, „računica" polinoma počiva na činjenici da je svaki izraz $I(+, \cdot, -)$ dovodljiv na zbir nekih monoma.

Drugo, tvrđenje o sređivanju izraza $I(+, \cdot)$ počiva na ovim aksiomama:

komutativnom zakonu za $+$ i $\cdot$, asocijativnom zakonu za $+$ i $\cdot$, distributivnom zakonu $\cdot$ prema $+$

Iz tog razloga potpuno slično tvrđenje važi za izraze I $(*, \circ)$, gdje su $*$, $\circ$ dvije operacije (nekog skupa), ali takve da su obje komutativne i asocijativne i da je $\circ$ distributivna prema $*$ (što znači važenje jednakosti $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ Z)$ za sve elemente x, y, z odnosnog skupa). Jedan takav primjer su izrazi kao

$$A \cap (B \cup C),\ (A \cup B) \cap (B \cup C),\ (A \cap B) \cup (B \cap C),$$

odnosno izrazi koji sadrže skupovne operacije $\cup$, $\cap$. Svaki takav izraz je dovodljiv na oblik

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$$

gdje su $A_1, \ldots, A_k$ izrazi koji ne sadrže znak $\cup$. Međutim, takvi izrazi su dovodljivi i na oblik

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_l$$

gdje su $B_1, \ldots, B_l$ izrazi koji ne sadrže znak $\cap$. To je otuda što je svaka od skupovnih operacija $\cup$, $\cap$ distributivna jedna prema drugoj. Nešto slično i iz potpuno sličnih razloga važi i za logičke operacije $\wedge$, $\vee$. Svaka iskazna formula oblika $F(\wedge, \vee)$ ekvivalentna je sa jednom formulom oblika

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k \qquad (A_1, \ldots, A_k \text{ ne sadrže znak } \vee)$$

kao i sa nekom formulom oblika

$$B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_l \qquad (B_1, \ldots, B_l \text{ ne sadrže znak } \wedge)$$

Navodimo primjer za ilustraciju. Uočimo formulu F:

$$((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \vee t$$

po slovima p, q, r, s, t. Radi dovođenja na $\vee$-oblik, tj. oblik $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$, uočimo ove ekvivalencije

$$F \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)) \vee t.$$

(Na formulu $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ smo primijenili distributivnost operacije $\wedge$ prema operaciji $\vee$. Slobodnije rečeno, „pomnožili" smo „zbir" $p \vee q$ „zbirom" $r \vee s$.)

$$\Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) \vee t$$

čime se formula F dovodi na $\vee$-oblik. Radi dobijanja $\wedge$-oblika, uočimo ove ekvivalencije:

$$F \Leftrightarrow (p \cdot q + r \cdot s) \cdot t$$

(Privremeno smo, radi bolje preglednosti, znak $\wedge$ zamijenili sa $\cdot$, a znak $\vee$ sa $+$. Sada ćemo jednostavno obaviti „izmnožavanje" i sređivanje, pa na kraju se vratiti starim oznakama.)

$$\Leftrightarrow p \cdot q \cdot t + r \cdot s \cdot t$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee t) \wedge (r \vee s \vee t).$$

Znači, $(p \vee q \vee t) \wedge (r \vee s \vee t)$ je traženi $\wedge$-oblik date formule F. S tim završavamo pregled „KADAK" — teorema i prelazimo na razmatranje teorema u vezi sa razlikom. Među tim teoremama osnovnu ulogu ima *teorema o suprotnom broju* (vidjeti str. 122 udžbenika):

$$-(-x) = x, \quad -(x+y) = (-x) + (-y)$$

Pomoću te teoreme, kao i definicije razlike

$$x - y \stackrel{\text{def}}{=} x + (-y)$$

neposredno se raspravljaju pitanja sabiranja i oduzimanja cijelih brojeva. Tako se lako dokazuju jednakosti

$$(-5)+2=-3, \quad (-2)+(-3)=-5, \quad 2-3=-1$$

i druge koje se navode na str. 123 udžbenika.

U vezi sa razlikom (i, u stvari, množenjem), značajna je *teorema o znaku proizvoda* (str. 124 udžbenika):

$$x \cdot 0 = 0, \quad (-x)\, y = -xy, \quad x \cdot (-y) = -(xy), \quad (-x)(-y) = xy,$$

kojom se, između ostalog, raspravlja pitanje množenja cijelih brojeva. Koristeći se teoremama o suprotnom broju i o znaku proizvoda, lako izvodimo distributivni zakon množenja prema oduzimanju, odnosno formulu $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$, a dalje i *teoremu o množenju dva zbira* u slučaju kada je neki sabirak oblika $-x$, $-y$ i sl. Recimo, tačna je formula

$$(-x+y-z)(a-b) = -ax+bx+ay-by-az+bz)$$

U stvari, na osnovu takvih jednakosti, neposredno se zaključuje da *teorema o sređivanju izraza* važi i za izraze oblika $I(+, \cdot, -)$, što je, prema ranije rečenom, osnova „računice" polinoma. Posebno, lako se izvode formule kao $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ i druge (vidjeti str. 125 udžbenika).

U vezi sa dijeljenjem, glavnu ulogu ima tzv. *osnovno tvrđenje o razlomcima* (str. 127 udžbenika):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \qquad \text{(Ako } b,\ d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \qquad \text{(Ako } b,\ d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \qquad \text{(Ako } b,\ d \neq 0 \text{, odnosno } b,\ d,\ c \neq 0)$$

na kome, u stvari, počiva rad sa racionalnim izrazima (tačka 34). U vezi sa tim tvrđenjem, istaknimo da je ono *uslovno*, odnosno *implikacijsko: ako su imenioci različiti od* 0, *onda važi jednakost* . . . U vezi sa dosad izloženim pravilnostima algebre brojeva, kao i rada sa polinomima i racionalnim izrazima, navodimo sljedeće nastavne napomene:

(*i*) U razmatranju zakonitosti algebre brojeva imali smo kao polazne aksiome polja i dalje njihove posljedice razvrstane u: KADAK–teoreme, teoreme u vezi sa razlikom i teoreme u vezi sa dijeljenjem.

Nije neophodno da učenici savladaju dokaze svih tih tvrđenja, ali neophodno je da nauče i razumiju sve te teoreme, kao i da shvate da su one logičke posljedice aksioma polja. S tim u vezi, značajno je da shvate da je „računica" sa cijelim brojevima i razlomcima takođe posljedica aksioma polja.

(*ii*) Uporedo sa savlađivanjem ukazanih pravilnosti algebre brojeva, dobro je da se učenici postupno uvježbavaju u rastavljanju izraza. Recimo, sa takvim problemima se treba baviti već od 22. tačke. Naravno, pitanju rastavljanja polinoma, kao i radu sa racionalnim izrazima, valja posvetiti posebnu pažnju (tačka 34).

(*iii*) U vezi sa rastavljanjem polinoma — koje đaci obično ne nauče najbolje, pomenimo i ovo. U učenju rastavljanja ne treba se koristiti glomaznim zadacima, a, takođe, nije podesno počinjati sa savlađivanjem nekoliko formula i postupaka. Recimo, dobro je da se na jednom posebnom času dosta pažnje posveti razlici kvadrata, odnosno formuli

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Tako, da bi učenici potpuno navikli na oblik razlike kvadrata, uputno je zadavati niz zadataka oblika:

Rastaviti izraze a^2-b^2, b^2-a^2, a^2-x^2, a^2-4, a^2-3, $4a^2-1$, $2a^2-1$, $1-x^2$, $1-4x^2$, $(x+y)^2-(x-y)^2$, $x^2y^4-z^2$, $4a^2b^6-c^2$, $(2x-y)^2-(x-y+z)^2$, itd.

Takođe, treba zadavati i ovakve zadatke:

Napisati deset razlika kvadrata, odnosno izraza oblika P^2-Q^2, gdje su P, Q neki izrazi. Drukčije rečeno, razliku kvadrata (ili, na primjer, formulu $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ koja se po redoslijedu izlaganja pojavljuje prije obrasca za razliku kvadrata) treba obraditi opširno i podrobno. Na takav način će se savlađivanje ostalih formula i postupaka u vezi sa rastavljanjem postati lakše i zahtijevaće, što je dosta značajno, manje vremena.

Linearne jednačine i sistemi. Često se događa da se rješavanje nekog praktičkog problema prevodi na rješavanje određene formule algebre brojeva. U prvom razredu srednje škole, u tom smislu, razmatra se rješavanje linearnih jednačina, kao i sistema takvih jednačina. Radi rješavanja takvih formula, obično se ovako postupa: U skupu linearnih jednačina po nepoznatoj koja se traži (odnosno sistema linearnih jednačina po odgovarajućim nepoznatim) uočava se relacija ekvivalentnost formula[4].

$F_1 \sim F_2$ Formula $F_1 \Leftrightarrow F_2$ je tačna (za sve vrijednosti svojih promjenljivih)

Ta definicija je ekvivalentna sa ovom

$$F_1 \sim F_2 \text{ ako } R(F_1)=R(F_2)$$

gdje smo sa $R(\ldots)$ označili skup rješenja. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Zamislimo da je F formula koju treba riješiti. U rješavanju uporedo sa tom formulom, uočavamo i razne druge iz njene klase ekvivalencije. Tačnije, u vezi sa formulom F pravimo lanac ekvivalencija (govorimo, i rješavajući lanac):

$$F \sim F_1 \sim F_2 \sim \ldots \sim F_k,$$

čija krajnja formula F_k pripada vrsti tzv. riješenih formula. U stvari, rješavanje formula se i sastoji iz građenja rješavajućeg lanca koji se završava formulom riješenog oblika. Ako je riječ o formulama po x, tada u slučaju linearnih jednačina u rješenje dolaze ovakve jednačine:

$x=a$ (a je ma koji realan broj),

$0=0$ (ili $x=x$ i sl), $0=1$ (ili $0 \cdot x=1$ i sl.)

U skladu sa tim, linearna jednačina ili može imati jedinstveno rješenje, ili biti identitet (svaki broj je njeno rješenje), ili biti nemoguća (slučaj ekvivalentnosti sa jednačinom $0 \cdot x=1$).

Prije opisivanja sistema linearnih jednačina riješenog oblika, podsjetimo da se u traganju za formulom F_k — krajem rješavajućeg lanca, koriste razna svojstva jednakosti (vidjeti str. 160 i 163 udžbenika), odnosno Gausov postupak (str. 170) u slučaju linearnih sistema.

[4]) Primijetite da je ta definicija opšta, odnosi se ne samo na linearne jednačine, odnosno njihove sisteme, već i na ma koje formule po odnosnim nepoznatim.

Neka je sada F neki sistem linearnih jednačina po x, y, broj samih jednačina nije bitan. U skladu sa opštim mogućnostima koje postoje za skup rješenja, imamo sljedeće slučajeve označene sa (1), (2), (3).

Slučaj (1): *Skup $R(F)$ rješenja je prazan skup.* Tada je sistem nemoguć i ekvivalentan je sa jednačinom $0=1$ (tj. $0\cdot x+0\cdot y=1$). Evo takvog primjera. Uočimo sistem F po x, y: $x+y=3 \wedge x-y=1 \wedge 2x+y=p$, gdje je p poznat realan broj (odnosno parametar). Jedan gausovski rješavajući lanac izgleda ovako:

$$\begin{array}{lllllll} & x+y=3 & & x+y=3 & & x+y=3 & & x+y=3 \\ F \Leftrightarrow & x-y=1 & \Leftrightarrow & -2y=-2 & \Leftrightarrow & y=1 & \Leftrightarrow & y=1 \\ & 2x+y=p & & -y=p-6 & & y=6-p & & 0=5-0 \end{array}$$

Prvu jednačinu množimo sa -1, pa sa -2 i proizvode dodajemo drugoj, odnosno trećoj jednačini.

Drugu jednačinu smo pomnožili sa -1 i proizvod dodali trećoj.

Tako smo stigli do sistema koji je jednostavan za rješavanje. Jedna njegova jednačina ne sadrži nepoznate. Dalje, rasuđujemo ovako: Jednakost $0=5-p$ daje potreban i dovoljan uslov da je sistem moguć. Naime, ukoliko je $p\neq 5$, sistem F nije moguć, a ukoliko je p, zaista, jednak 5, imamo:

$$F \Leftrightarrow \begin{array}{l} x+y=3 \\ y=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}$$

Korišćena je tautologija oblika $A \Leftrightarrow A \wedge T$, gdje je T jednakost $0=0$.

pa je dvojka (2,1) jedinstveno rješenje sistema F.

U vezi sa slučajem (1) navedimo i ovu opštu činjenicu: Izvjestan sistem linearnih jednačina (ma koliko jednačina sa ma koliko nepoznatih) nemoguć je ako i samo ako Gausovim postupkom iz toga sistema proizilazi jednačina $0=1$. Da bi ovo opšte i veoma značajno tvrđenje bilo jasno shvaćeno, ističemo da rješavanje Gausovim postukom — znači korišćenje ovih opštih formula, odnosno pravilnosti algebre brojeva:

(*i*) $A=0 \Leftrightarrow kA=0$ (gdje $k\neq 0$), tj. dozvoljeno je jednu jednačinu sistema pomnožiti sa k, ako $k\neq 0$)

(*ii*) $A=0 \wedge B=0 \Leftrightarrow A=0 \wedge B+\lambda A=0$

Pored tih formula, koriste se, u stvari, jedino još razna opšta svojstva konjunkcije, kao:

$$(p\wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r), \quad p\wedge q \Leftrightarrow q\wedge p, \ldots$$

prema kojima redoslijed jednačina u nekom sistemu nije uopšte bitan, a dalje i ekvivalencije

$$p\wedge\top \Leftrightarrow p, \quad p\wedge\bot \Leftrightarrow \bot$$

prema kojima prilikom rješavanja sistema linearnih jednačina identički ispunjene jednačine možemo izostavljati, odnosno sistem je nemoguć ako je to slučaj sa jednom njegovom jednačinom.

Slučaj (2): *Skup $R(F)$ nije prazan i ima tačno jedan član.* U takvom slučaju je ekvivalentan sa nekim sistemom oblika $x=a \wedge y=b$, odnosno tako izgleda odgovarajući sistem riješenog oblika. Recimo, u prethodno razmatranom primjeru, u takvom smislu se pojavio sistem $x=2 \wedge y=1$.

Slučaj (3): *Skup $R(F)$ nije prazan i ima više od jednog elementa.* Kao prvo, istaknimo da u takvom slučaju sistem F ima beskonačno mnogo rješenja. To je bitna odlika linearnih jednačina i njihovih sistema: čim imaju dva rješenja, imaju ih i beskonačno mnogo[5]. U slučaju (3) postoje razni podslučajevi. Međutim, za sve njih jedno je zajedničko:

Izvjesne nepoznate mogu imati proizvoljne vrijednosti, a ostale se izražavaju pomoću njih.

Prve su *slobodne*, a druge *vezane* nepoznate. Može se dogoditi da su sve nepoznate slobodne, tj. da je sistem zadovoljen za bilo koje vrijednosti svojih nepoznatih. U takvom slučaju, sistem je ekvivalentan sa jednačinom $0=0$. Navodimo primjere za ilustraciju. Uočimo date sisteme po napisanim nepoznatim:

$$F_1: \begin{array}{l} 0\cdot x+0\cdot y=0 \\ 0\cdot x+0\cdot y=0 \end{array} \qquad F_2: \begin{array}{c} x+y=1 \\ 0=0 \end{array} \text{ odnosno } \begin{array}{l} y=1-x \\ 0=0 \end{array}$$

odnosno $y=1-x$,

$$F_3: \begin{array}{l} x=3+5y \\ z=2+3y \end{array} \qquad F_4: \begin{array}{l} x=2-y+z \\ u=1+y-z \\ 0=a \end{array} \quad (a \text{ je parametar})$$

Sistem F_1 (po x, y) je zadovoljen za sve vrijednosti x, y, odnosno, obje njegove nepoznate x, y su slobodne. Sistem F_2 se svodi na

[5] Recimo, neka su x_1, x_2 dva različita rješenja jednačine po x: $ax=b$. Tada je i broj, $x_1+k(x_2-x_1)$, gdje je k ma koji realan broj, takođe, rješenje, jer: $a[x_1+k(x_2-x_1)]=ax_1+akx_2-akx_1=ax_1+kax_2-kax_1=b+kb-kb=b$ bez obzira šta je k. Slično, ako su dvojke (x_1, y_1), (x_2, y_2) rješenja nekog sistema linearnih jednačina $F(x, y)$, tada je njegovo rješenje i dvojka (x_3, y_3), pri čemu

$$x_3=x_1+k(x_2-x_1), \quad y_3=y_1+k(y_2-y_1).$$

a k je ma koji realan broj.

jednu jednačinu po x, y, odnosno jednačinu $x+y=1$. Nepoznatu x možemo uzeti kao slobodnu, a y izraziti pomoću nje: $y=1-x$. Rješenja su dvojke $(p, 1-p)$, gdje je p ma koji realan broj. U slučaju sistema F_2 i druga nepoznata, odnosno y se može uzeti kao slobodna, a x računati po formuli $x=1-y$. To dovodi do zaključka da su sva rješenja sistema F_2 izraziva i u obliku $(1-q, q)$, gdje je q ma koji realan broj. Sistem F_3 po x, y, z ima slobodnu nepoznatu y. Njegova rješenja se određuju formulama

$$x=3+5p, \ y=p, \ z=2+3p,$$

gdje je p ma koji realan broj. Sistem F_4 je moguć ako i samo ako je $a=0$. U potvrdnom slučaju, rješenja su četvorke (x, y, z, u) određene formulama

$$x=2-p+q, \ y=p, \ z=q, \ u=1+p-q,$$

gdje su p, q ma koji realni brojevi. Dakle, nepoznate y i z su slobodne, a nepoznate x i u vezane.

Dosadašnjim izlaganjem o linearnim sistemima gotovo da smo razmotrili opšti slučaj, odnosno sistem od ma koliko jednačina sa ma koliko nepoznatih. U stvari, opšti slučaj nije tako težak za razmatranje i za tu svrhu se ne moraju koristiti ni matrice ni determinante. Evo opštih činjenica u vezi sa ma kojim linearnim sistemom F:

Gausovim postupkom primijenjenim konačno puta, dati sistem F može se prevesti na sistem F_1 koji ima dvije skupine jednačina. Jednu skupinu čini jedna jednačina oblika $0=\lambda$ i ta jednačina[6] *ne sadrži nepoznate. Drugu skupinu čini nekoliko jednačina poput prve dvije jednačine sistema F_4, odnosno takvim jednačinama se izvjesne nepoznate (tzv. vezane) izražavaju pomoću ostalih*[7] *(odnosno slobodnih nepoznatih). Tada je uslov $\lambda=0$ potreban i dovoljan da sistem F ima rješenja. U potvrdnom slučaju do rješenja se dolazi tako što se slobodne nepoznate biraju po volji, a ostale se određuju pomoću njih koristeći se jednačinama sistema F_1.*

Primjedba. Kao što nam je poznato, linearni sistemi se mogu rješavati i tzv. *metodom zamjene*. Šta je logička podloga te metode, odnosno njeno logičko obrazloženje? To pitanje smo razmotrili u zbirci (tačka 42, zadaci 17 i 44). Metoda zamjene počiva na logičkom zakonu ovakvog oblika[8]:

$x=A \wedge \varphi(x) \Leftrightarrow x=A \wedge \varphi(A)$ (Zakon zamjene za jednakost)

prema kojem sistem dvije formule $x=A$, $\varphi(x)$ — od kojih je prva riješena po x, a druga je ma koja formula koja sadrži x (a može da sadrži i neke druge, odnosno ma koje promjenljive), ekvivalentan je sa novim sistemom koji čine $\varphi(A)$ (tj. formula nastala iz $\varphi(x)$ poslije obavljene zamjene promjenljive x sa A) i formula zamjene, tj. formula $x=A$. Recimo, tačne su ekvivalencije[9]:

$$x=3 \wedge x+y=5 \Leftrightarrow x=3 \wedge 3+y=5,$$
$$x=y \wedge x^2+y>5 \Leftrightarrow x=y \wedge y^2+y>5,$$
$$z=x+y \wedge z>1 \Leftrightarrow z=x+y \wedge x+y>1$$

Kraće rečeno, ako obavimo zamjenjivanje, onda je polazni sistem ekvivalentan sa novodobijenom formulom, ukoliko uz nju priključimo i formulu zamjene.

Na kraju, navodimo ove nastavne napomene:

(*i*) Neobično je važno da đak navikne na to da se može postaviti pitanje rješavanja sistema od ma koliko jednačina sa ma koliko nepoznatih.

Recimo, đacima bi trebalo da budu bliski ovakvi zadaci:

a) Riješiti po x sistem $2x=3 \wedge 6x=9 \wedge 8x=12$;

b) Riješiti po x sistem $3x=7 \wedge 4x=a$, gdje je a parametar;

c) Riješiti po x, y jednačinu $x+y=5$;

d) Riješiti po y jednačinu $x+y=5$ (x je parametar);

e) Riješiti po x, y, z jednačinu $x-y+z=3$;

f) Riješiti po x, y, z, u sistem

$$u=2+y-z$$
$$x=3-y+z$$

[6] U toku primjene Gausovog postupka, može se dogoditi da se pojavi više jednačina bez nepoznatih, na primjer,

$$0=5 \wedge 0=6 \wedge 0=0.$$

Množenjem prve sa $\frac{1}{5}$, a druge sa $\frac{1}{6}$, dobijamo ove jednačine:

$0=1 \wedge 0=1 \wedge 0=0$, što je ekvivalentno sa $0=1 \wedge 0=0$, odnosno sa $0=1$. Uopšte, više jednačina

$$0=a_1 \wedge 0=0_2 \wedge \ldots \wedge 0=a_k$$

koje ne sadrže nepoznate može se svesti na jednu takvu jednačinu.

[7] Naravno, događa se da nijedna nepoznata nije slobodna. Tada postoje dvije mogućnosti: sistem ima jedinstveno rješenje ili je nemoguć, prema tome, da li jeste $\lambda=0$ ili nije.

[8] Dokaz je krajnje jednostavan. Slobodnije rečeno, pustimo da x „teće" preko realnih brojeva. Postoje dvije mogućnosti:
(*i*) x je upravo jedanko A, (*ii*) x se razlikuje od A.
U prvom slučaju, navedena ekvivalencija se svodi na ovu, očigledno tačnu ekvivalenciju $A=A \wedge \varphi(A) \Leftrightarrow A \wedge \varphi(A)$. U drugom slučaju pojavljuje se tačna ekvivalencija vida $\perp \Leftrightarrow \perp$. Kraj dokaza.

[9] Primijetite da se zakon zamjene ne mora primjenjivati jedino na jednačine. Na kraju, $\varphi(x)$ može biti proizvoljna formula.

(*ii*) Nije neophodno da se u rješavanju sistema strogo držimo Gausovog postupka, ili prethodno podrobno objašnjenog metoda zamjene. Sistem možemo rješavati i, slobodnije rečeno, nekakvim dosjetkama, kao sabiranjem jednačina, oduzimanjem i sl. Međutim, bitno je ako nekom takvom metodom dođemo do vrijednosti za nepoznate, da tu ne stanemo, odnosno da ne smatramo da je posao završen, što se, nažalost, ponekad dešava. U stvari, dobijene vrijednosti valja shvatiti samo kao jedine kandidate za rješenja! Recimo, uočimo sistem po x, y:

$$x+y=5$$
$$x-y=3$$
$$2x+3x=a$$

gdje je a parametar. Sabiranjem prve dvije jednačine dobijamo $2x=8$, odakle je $x=4$. Zamjenom u prvu jednačinu, ona postaje $4+y=5$, odakle je $y=1$. Dakle, iz datog sistema slijede jednakosti $x=4$, $y=1$, pa je dvojka (4, 1) jedini kandidat za rješenje (i ništa više). Neophodno je uraditi provjeru. Zamjenom umjesto x, y, redom 4, 1 iz datog sistema, nastaju jednakosti:

$$4+1=5 \wedge 4-1=3 \wedge 2\cdot 4+3\cdot 1=a,$$

tj. $5=5 \wedge 3=3 \wedge 11=a$. Znači, da smo rješavali sistem $x+y=5 \wedge x-y=3$, dvojka (4, 1) bi, zaista, bila rješenje. Međutim, dati sistem ima tri jednačine, pa moramo uvažiti i treću, koja je postala $11=a$. Na osnovu toga, dati sistem je moguć ako i samo ako $a=11$, i u potvrdnom slučaju dvojka (4, 1) je njegovo jedinstveno rješenje.

(*iii*) Vrlo je značajno da se linearne jednačine, kao i njihovi sistemi, koriste za rješavanje raznovrsnih problema prakse.

Uređenost polja realnih brojeva. Nejednačine. Do sada smo razmatrali pravilnosti realnih brojeva u vezi sa sabiranjem, množenjem, oduzimanjem i dijeljenjem. Realni brojevi se odlikuju pravilnostima i u vezi sa poretkom, odnosno relacijom $\leqslant$. U razmatranju tih pravilnosti, može se poći od ovih aksioma (sa polaznim pojmovima pozitivan, negativan):

($\mathcal{U}_1$) $(\forall x)$ (ili $x<0$ ili $x=0$ ili $x>0$),

($\mathcal{U}_2$) $(x>0 \Rightarrow -x<0) \wedge (x<0 \Rightarrow -x>0)$,

($\mathcal{U}_3$) $(x>0 \wedge y>0) \Rightarrow (x+y>0 \wedge x\cdot y>0)$

i definicija

$$x>y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x-y>0,\quad x\geqslant y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x>y \vee x=y,\quad x<y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} y>x,$$
$$x\leqslant y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} y\geqslant x.$$

Te aksiome zajedno sa ranije navedenim aksiomama polja, poznate su kao aksiome uređenog polja. Kraće rečeno: Realni brojevi čine uređeno polje[10]. Na osnovu navedenih aksioma izvode se razne teoreme u vezi sa relacijama $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, kao i u vezi sa odnosima tih relacija sa operacijama $+$, $-$, $\cdot$, $:$. (Vidjeti str. 186, 187, 199 i 190 udžbenika). U mnogim dokazima korisno je upotrijebiti funkciju signum (znak):

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{ako } x>0\\ 0, & \text{ako } x=0\\ -1, & \text{ako } x<0\end{cases}$$

koja, pored ostalog, posjeduje ovu pravilnost:

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn} x\cdot \operatorname{sgn} y$$

Recimo, radi dokaza formule

$$z<0 \Rightarrow (x<y \Leftrightarrow zx>zy),$$

dosta je uporediti $\operatorname{sgn}(y-x)$ i $\operatorname{sgn}(zy-zx)$ pod pretpostavkom da $z<0$. Zaista,

$$\operatorname{sgn}(zy-zx)=\operatorname{sgn} z(y-x)=\operatorname{sgn} z\cdot \operatorname{sgn}(y-x)=-\operatorname{sgn}(y-x),$$

jer iz $z<0$ slijedi $\operatorname{sgn} z=-1$. Otuda zaključujemo

$$\operatorname{sgn}(zy-zx)=\operatorname{sgn}(x-y),$$

na osnovu čega imamo: $x<y \Leftrightarrow zy<zx$.

Pored funkcije $\operatorname{sgn} x$,ističemo i funkciju

$|x|$ — apsolutna vrijednost broja x, koja se ovako definiše

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{ako } x>0\\ 0, & \text{ako } x=0.\\ -x, & \text{ako } x<0\end{cases}$$

Na osnovu te definicije, slijedi $|x|\geqslant 0$. Evo nekih svojstava te funkcije:

(1) $|x|=x \operatorname{sgn} x$.

(2) Ako su x, y dvije tačke brojevne prave, tada je njihovo međusobno rastojanje, označeno, recimo, sa $d(x, y)$, određeno formulom $d(x, y)=|y-x|$.

(3) Važi nejednakost

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$

[10]) To polje je i potpuno. Naime, svaki neprazan skup realnih brojeva, ograničen sa gornje strane, ima najmanje takvo ograničenje, odnosno gornju među (supremum) — vidjeti str. 190 udžbenika).

gdje su x, y z, ma koji realni brojevi. U vezi sa apsolutnom vrijednošću, vidjeti u zbirci zadatke 23. i 24. tačke 44, kao i zadatak 28. tačke 45.

U vezi sa rješavanjem linearnih nejednačina i njihovih sistema, pomenimo da se postupa slično kao u slučaju linearnih jednačina, jer postoje sličnosti između svojstava nejednakosti i jednakosti, s tim što ekvivalencija oblika

$$A \leqslant B \Leftrightarrow CA \leqslant CB$$

i slične važe tek pod uslovom $C>0$. Otuda u primjeni te ekvivalencije (i njoj sličnih, nastalih iz nje zamjenom znaka $\leqslant$ znacima $>$, $<$, $\geqslant$) treba biti obazriv. Na primjer, pogrešno je da se nejednačina oblika

$$\frac{x-1}{x-2}>0$$

ovako rješava. Pomnožimo datu nejednačinu sa $x-2$. Dobijamo

$$(x-2)\cdot\frac{x-1}{x-2}>0,$$

tj. $x-1>0$, odnosno $x>1$. Ispravno se rješava, recimo, ispitivanjem znakova brojitelja i imenitelja (pomoću dvije brojne linije) i utvrđivanjem za koje vrijednosti x je dati razlomak pozitivan, ili korišćenjem ekvivalencije oblika

$$\frac{A}{B}>0 \Leftrightarrow (A>0 \wedge B>0) \vee (A<0 \wedge B<0).$$

Navodimo sljedeće nastavne napomene:

(*i*) Korisno je da đaci upoznaju i shvate da razna, njima odranije poznata svojstva relacija $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ logički slijede iz tri aksiome $(\mathcal{U}_1)$, $(\mathcal{U}_2)$, $(\mathcal{U}_3)$ — uz pretpostavku aksiome polja. Međutim, nije neophodno da nauče dokaze svih tih tvrdenja, što ne znači da nije korisno da nauče dokaze nekih od njih.

(*ii*) Neobično je značajno da đaci razna tvrđenja o nejednakostima umiju „geometrijskim očima" da gledaju na brojevnoj pravoj.

(*iii*) Đaci treba da budu spremni u rješavanju linearnih nejednačina i njihovih sistema, i to na dva načina: ispitivanjem znakova (na brojevnim pravama) i upotrebom logičko-matematičkog jezika.

(*iv*) Značajno je posvetiti pažnju i funkcijama $\operatorname{sgn} x$, $|x|$. Posebno je važno da đaci naviknu na to da $|x-y|$ predstavlja rastojanje tačaka x, y.

6. PREGLED ZNAČAJNIJIH LOGIČKIH ZAKONA

U matematici se, kao i uopšte u ma kojoj nauci, u izvođenju zaključaka koriste razni logički zakoni. Naravno, nije moguće navesti sve takve zakone. Ovom prilikom dajemo spisak zakona koji se upotrebljavaju veoma često. U tom spisku navodimo i značajnija svojstva jednakosti. Inače, slovima A, B, ... označavamo ma koje formule.

I *skupina* — u vezi sa $\Leftrightarrow$

(1) $A \Leftrightarrow A$
(Refleksivnost)

(2) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$
(Simetrija)

(3) $(A \Leftrightarrow B \wedge B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
(Tranzitivnost)

(4) $(A_1 \Leftrightarrow B_1 \wedge A_2 \Leftrightarrow B_2) \Rightarrow (A_1 * A_2 \Leftrightarrow B_1 * B_2)$
(Saglasnost ekvivalencije sa $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$)
$*$ je jedan od znakova $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

(5) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$
(Saglasnost ekvivalencije sa $\neg$)

Napomena. U skladu sa zakonima (1) — (5) za ekvivalenciju, slično kao za jednakost, važi tzv. *zakon zamjene:*

U ma kojoj formuli F dio (podformula) može se zamijeniti ekvivalentnom formulom. Od formule F prelazi se na ekvivalentnu formulu F_1.

II *skupina* — u vezi sa $\Rightarrow$

(6) $A \Rightarrow A$
(Refleksivnost)

(7) $(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$
(Antisimetrija)

(8) $(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
(Tranzitivnost)

(9) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(Zakon kontrapozicije)

(10) $(A_1 \Rightarrow B_1 \wedge A_2 \Rightarrow B_2) \Rightarrow (A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2)$
$(A_1 \Rightarrow B_1 \wedge A_2 \Rightarrow B_2) \Rightarrow (A_1 \vee A_2 \Rightarrow B_1 \vee B_2)$
(Saglasnost implikacije sa $\wedge$ i $\vee$)

(11) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
(Svođenje implikacije na $\vee$ i $\neg$)

(12) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
(Svođenje negacije implikacije na $\wedge$ i $\neg$)

III *skupina* — u vezi sa $\wedge$, $\vee$, $\neg$ („bulovske tantalogije")[1]

(13) $A \wedge A \Leftrightarrow A, \ A \vee A \Leftrightarrow A$
(Zakon idempotencije za $\wedge$ i $\vee$)

(14) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, \ A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
(Zakon komutativnosti za $\wedge$, $\vee$)

(15) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), \ (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
(Zakon asocijativnosti za $\wedge$, $\vee$)

(16) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A, \ A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
(Zakon apsorpcije za $\wedge$, $\vee$)

(17) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(Distributivni zakon $\wedge$ prema $\vee$, odnosno $\vee$ prema $\wedge$)

(18) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \ \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
(De Morganovi zakoni)

(19) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
(Zakon dvojne negacije)

(20) $A \vee \neg A$
(Zakon isključenja trećeg)

(21) $\neg(A \wedge \neg A)$
(Zakon neprotivurječnosti)

IV *skupina* — u vezi sa $\top$, $\perp$; gdje znak $\top$ možemo shvatiti kao jedan tačan iskaz, recimo $1=1$, a znak $\perp$ kao iskaz $1 \neq 1$.

(22) $A \wedge \top \Leftrightarrow A, \ A \wedge \perp \Leftrightarrow \perp, \ A \vee \top \Leftrightarrow \top, \ A \vee \perp \Leftrightarrow A,$
$(A \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top, \ (A \Rightarrow \perp) \Leftrightarrow \neg A, \ (\top \Rightarrow A) \Leftrightarrow A, \ (\perp \Rightarrow A) \Leftrightarrow \top$
$(A \Leftrightarrow \top) \Leftrightarrow A, \ (A \Leftrightarrow \perp) \Leftrightarrow \neg A$

[1] Te tautologije podsjećaju na razne skupovne identitete, a one, dalje, na aksiome tzv. *Bulove algebre*.

V *skupina* — razne tautologije

(23) $(A \Leftrightarrow \top) \Rightarrow A, \ (\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$
$(A \wedge \neg B \Rightarrow R \wedge \neg R) \Rightarrow (A \Rightarrow B), \ (A \wedge \neg A) \Rightarrow B$
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (A \wedge B \Rightarrow C), \ (A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)) \Leftrightarrow (A \wedge B \Leftrightarrow A \wedge C)$
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B \Leftrightarrow A)$

VI *skupina* — u vezi sa $\forall$, $\exists$
(24) $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A, \ \neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$

VII *skupina* — značajnija svojstva jednakosti
(25) $x=x, \ x=y \Rightarrow y=x, \ (x=y \wedge y=z) \Rightarrow x=z.$
Jednakost je refleksivna, simetrična i tranzitivna.
(26) *Zakoni jednakosne zamjene*
Neka je $I(x)$ ma koji izraz koji sadrži x (a možda i neke druge promjenljive). Tada važi implikacija

(*i*) $x=A \Rightarrow (I(x)=I(A))$,

tj. u izrazu se nešto smije zamijeniti jednakim. Slično, ako je $\varphi(x)$ formula koja sadrži x (a možda i neke druge promjenljive), tada važi implikacija

(*ii*) $x=A \Rightarrow (\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(A))$.

Formule (*i*), (*ii*) nazivamo *zakoni jednakosne zamjene* za izraz, odnosno formulu. Radi razlikovanja sa narednim svojstvom jednakosti, za te zakone zamjene kažemo da su *implikacijskog* oblika. Formulu

(*iii*) $x=A \wedge \varphi(x) \Leftrightarrow x=A \wedge \varphi(A)$

nazivamo zakon zamjene za jednakost[2] (*konjunktivnog* oblika).

7. NEKOLIKO ZADATAKA RIJEŠENIH STROGIM KORIŠĆENJEM LOGIČKOMATEMATIČKOG JEZIKA*

U razmatranju matematičkih problema uopšte, od najvećeg značaja je matematička intuicija, odnosno, misaoni sadržaj koji odgovara matematičkoj simbolici. Bavljenjem matematikom se ta intuicija postupno gradi, širi, obogaćuje. Nešto slično vrijedi i za svaku drugu misaonu djelatnost. U svakoj od njih, od odlučujućeg je značaja odnosni misaoni sadržaj, odnosno, s tim u vezi,

[2] Zanimljivo je da su formule (*ii*), (*iii*) ekvivalentne. To slijedi otuda što je formula $(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r)$ tautologija.

*) *Ovaj tekst je namijenjen onima koji se više zanimaju za matematičku logiku i njenu primjenu.*

često se i tako kaže, *nadahnuće*. Međutim, između matematike i drugih misaonih djelatnosti postoji i jedna krupna razlika. Naime, u matematici je od veoma velikog značaja matematički jezik, od mnogo većeg nego što je, recimo, slučaj sa pjesništvom. Bliže, matematički zapisi, s jedne strane, ne odlikuju se nepreciznošću i nedovoljnom određenošću, kakav je slučaj sa običnim jezikom, a, s druge strane, ti zapisi su dovoljni za izražavanje matematičkih misli[1].

U daljem izlaganju, ukazujemo kako se savremeni logičkomatematički jezik može pogodno upotrijebiti u razmatranju raznih pitanja. Inače, u zbirci se nalaze razni takvi primjeri (vidjeti, recimo, zadatak 19 tačke 41; zadatke 17. i 44. tačke 42; dalje, 7, 22, 25, 31. i 33. zadatak tačke 43; kao i gotovo sve zadatke tačaka 44. i 45).

Primjer 1. Uočimo konjunkcije

$$\text{a) } x=1 \wedge 1=2, \quad \text{b) } x=1 \wedge 2=2$$

sa nepoznatom x. Prvu konjunkciju ne zadovoljava nijedan broj x, jer njen drugi član $1=2$ je netačan (nezavisno od toga šta je x). Drugim riječima, ta konjunkcija je ekvivalentna sa $\perp$, jer uopšte $p \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$. Kod konjunkcije b) drugi član $2=2$ je tačan, pa, na osnovu zakona $p \wedge \top \Leftrightarrow p$, zaključujemo da je ona ekvivalentna sa $x=1$. Znači, broj 1 je jedinstveno rješenje konjunkcije b). Uočimo sada konjunkciju

$$x=1 \wedge a=2,$$

smatrajući da je x nepoznata, a da je a dat broj (tj. a je parametar). Šta je sada rješenje po x? U stvari, tu se pojavljuje problem rješavanja beskonačno mnogo konjunkcija koje nastaju iz date, kada se za a uzmu sve moguće realne vrijednosti. Za a postoje dvije mogućnosti

$$1^\circ \ a \text{ jeste } 2, \quad 2^\circ \ a \text{ nije jednako } 2.$$

U prvom slučaju, konjunkcija $x=1 \wedge a=2$ postaje $x=1 \wedge 2=2$, odnosno $x=1$ i broj 1 je njeno jedinstveno rješenje, a u drugom slučaju je data konjunkcija nemoguća. Kraće rečeno: *Uslov $a=2$ je potreban i dovoljan da konjunkcija po x: $x=1 \wedge a=2$ bude moguća. U potvrdnom slučaju, konjunkcija se svodi na član $x=1$ i broj 1 je njeno jedinstveno rješenje.* Slično, konjunkcija po x: $x=a \wedge b=c$, gdje su a, b, c parametri je moguća ako $b=c$,

[1] Blagodareći takvoj povezanosti matematike sa njenim, odnosno logičko-matematičkim jezikom omogućeno je, na primjer, da nas u rješavanju mnogih problema zamjenjuju mašine.

i u potvrdnom slučaju se svodi na $x=a$, tj. a je jedinstveno rješenje. Konjunkcija po x:

$$0 \cdot x=0 \wedge a=5$$

je moguća ako $a=5$ i u takvom slučaju je svaki broj njeno rješenje. Uopšte, neka je

$$F(x) \wedge \varphi$$

konjunkcija po x, gdje je $F(x)$ formula koja sadrži x (a možda i neke druge promjenljive), a φ je formula koja ne sadrži x. Ta konjunkcija je nemoguća u slučaju kad ne važi φ, a ako važi φ, svodi se na prvi član $F(x)$.

Evo primjera sličnih razmatranim: Riješiti po x konjunkcije

a) $2x=3 \wedge 1=2$, b) $x+1=x \wedge 2=2$, c) $x \in \{1, 2\} \wedge 1=1$,
d) $x \in \{a, 2\} \wedge a=3$, e) $x \mid 6 \wedge a>1$, f) $2x+3>7 \wedge a<2$,
g) $ax=b \wedge b=a$, h) $ax=b \wedge a \neq 0$, i) $ax=b \wedge a=0$.

Primjer 2. Razmatramo razne primjere koji su u vezi sa ovakvim zakonom zamjene za jednakost

$$x=A \wedge \varphi(x) \Leftrightarrow x=A \wedge \varphi(A).$$

Taj zakon je logička osnova metode zamjene rješavanja sistema linearnih jednačina (vidjeti zadatke 17. i 44. tačke 42). Međutim, ima i raznih drugih slučajeva njegove podesne primjene. Recimo, konjunkcija po x

$$x=1 \wedge x<3$$

je, prema njemu, ekvivalentna sa konjunkcijom $x=1 \wedge 1<3$, a ova sa $x=1$, jer je $1<3$ tačna formula. Znači, 1 je jedinstveno rješenje date konjunkcije. Slično, važe ekvivalencije:

$x=1 \wedge x=2 \Leftrightarrow x=1 \wedge 1=2$, $x=a \wedge x=b \Leftrightarrow x=a \wedge a=b$,

$x=1 \wedge x^2=a \Leftrightarrow x=1 \wedge a=1$, $x=2 \wedge x \neq a \Leftrightarrow x=2 \wedge 2 \neq a$,

prema kojima, na primjer, važi tvrđenje:

Uslov $a=b$ je potreban i dovoljan da je moguća konjunkcija po x: $x=a \wedge x=b$. U potvrdnom slučaju a je jedinstveno rješenje. Kao naredni primjer, uočimo sistem po x, y:

$$x+y=1 \wedge x-y>3.$$

Radi dobijanja rješenja, uočimo ekvivalencijski lanac

$$\begin{aligned} x+y=1 \wedge x-y>3 &\Leftrightarrow x=1-y \wedge x-y>3 \\ &\Leftrightarrow x=1-y \wedge (1-y)-y>3 \\ &\quad \text{(Primenjujemo zakon zamjene za jednakost)} \\ &\Leftrightarrow x=1-y \wedge y<-1 \end{aligned}$$

Znači, rješenja su uređene dvojke (x, y), gdje je y ma koji broj manji od -1, a za tako odabran y vrijednost za x iznosi $1-y$.
Na sličan način riješite ove konjunkcije po x, y (a je parametar):

a) $x+y=1 \wedge x-y=3$, b) $x+y=1 \wedge x-y\neq 3$,

c) $x+y=1 \wedge x-y<3$, d) $x=1+a \wedge y=2+a \wedge x+y>3$,

e) $x+y=1+a \wedge x-y=1-a \wedge x>a$.

Takođe, riješiti po x, y, z ovaj sistem:

$$x+y+z=1 \wedge x-y-z=3 \wedge 2x+y-z>0.$$

Primjer 3. Jednačina $x^2=4$ ima dva rješenja: 2 i -2, odnosno, tačna je ekvivalencija

$$x^2=4 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2.$$

Riješimo sada konjunkciju (po x):

$$(*) \qquad x^2=4 \wedge a>x,$$

gdje je a parametar. Radi toga, uočimo ovaj ekvivalencijski lanac

$x^2=4 \wedge a>x \Leftrightarrow (x=2 \vee x=-2) \wedge a>x$

$\Leftrightarrow (x=2 \wedge a>x) \vee (x=-2 \wedge a>x)$

(Koristeći distributivnost $\wedge$ prema $\vee$)

$\Leftrightarrow (x=2 \wedge a>2) \vee (x=-2 \wedge a>-2)$

(Koristeći se zakonom zamjene za jednakost — oblik u prethodnom primjeru).

Za parametar a su se pojavili uslovi $a>2$, $a>-2$. U vezi sa njihovim ispunjenjima, logički su moguća ova četiri slučaja:

1° jeste $a>2$, jeste $a>-2$, 2° jeste $a>2$, nije $a>-2$,

3° nije $a>2$, jeste $a>-2$, 4° nije $a>2$, nije $a>-2$,

što je po redu ekvivalentno sa

$$1^\circ\ a>2, \quad 2^\circ\ \perp, \quad 3^\circ\ -2<a\leqslant 2, \quad 4^\circ\ a\leqslant -2,$$

jer je slučaj 2° nemoguć. U svakom od tih slučajeva razmotrimo konjunkciju $(*)$.

Slučaj $a\leqslant -2$. Tada se ekvivalencija

$$x^2=4 \wedge a>x \Leftrightarrow (x=2 \wedge a>2) \vee (x=-2 \wedge a>-2)$$

svodi na ekvivalenciju

$x^2=4 \wedge a>x \Leftrightarrow (x=2 \wedge \perp) \vee (x=-2 \wedge \perp)$

$\Leftrightarrow \perp \vee \perp$

$\Leftrightarrow \perp$,

pa, u tom slučaju, konjunkcija $(*)$ je nemoguća.

Slučaj $-2<a\leqslant 2$. Tada imamo ekvivalencije

$x^2=4 \wedge a>x \Leftrightarrow (x=2 \wedge \perp) \vee (x=-2 \wedge \perp)$

$\Leftrightarrow \perp \vee x=-2$

$\Leftrightarrow x=-2$ (Jer $p \wedge \top \Leftrightarrow p$, $p \vee \perp \Leftrightarrow p$),

pa je -2 jedinstveno rješenje.

Slučaj $a>2$. Na osnovu ekvivalencije

$x^2=4 \wedge a>x \Leftrightarrow (x=2 \wedge \top) \vee (x=-2 \wedge \top)$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$,

zaključujemo da konjunkcija $x^2=4 \wedge a>x$ ima upravo dva rješenja: -2 i 2.

Primjer 4. Prilikom rješavanja mnogih pitanja u matematici, prirodno se pojavi razlikovanje izvjesnih slučajeva; slobodnije rečeno, istraživač se nađe pred nekom *misaonom raskrsnicom*. Razmotrimo najprije rješavanje po x formule

$$ax<1,$$

gdje je a parametar. U vezi sa svojstvima nejednakosti, razlikujemo tri slučaja: 1° $a<0$, 2° $a=0$, 3° $a>0$. U prvom slučaju imamo ekvivalenciju

$$ax<1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{a},$$

pa su rješenja svi brojevi veći od $\frac{1}{a}$. U drugom slučaju se data ekvivalencija svodi na $0 \cdot x<1$ i ispunjena je za svaki x, a u trećem vrijedi ekvivalencija

$$ax<1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{a},$$

pa je rješenje svaki broj manji od $\frac{1}{a}$.

Kako se navedeno rasuđivanje može izraziti strogo formulski? Nije teško zaključiti da jedno takvo izražavanje glasi:

$ax<1 \Leftrightarrow ax<1 \wedge \top$

(Zakon $p \Leftrightarrow p \wedge \top$. On se uopšte koristi neposredno prije razlikovanja slučajeva),

$\Leftrightarrow ax<1 \wedge (a<0 \vee a=0 \vee a>0)$

(Umjesto $\top$, zamijenili smo $a<0 \vee a=0 \vee a>0$)

$\Leftrightarrow (ax<1 \wedge a<0) \vee (ax<1 \wedge a=0) \vee (ax<1 \wedge a>0)$
(Distributivnost $\wedge$ prema $\vee$)

$$\Leftrightarrow \left(x>\frac{1}{a} \wedge a<0\right) \vee (0 \cdot x<1 \wedge a=0) \vee \left(x<\frac{1}{a} \wedge a>0\right)$$

odakle neposredno slijede već navedeni zaključci.

Evo još jednog sličnog primjera. Razmotrimo rješavanje po x jednačine $ax=b$. Važe ekvivalencije:

$$ax=b \Leftrightarrow ax=b \wedge \top$$
$$\Leftrightarrow ax=b \wedge (a\neq 0 \vee a=0)$$
$$\Leftrightarrow (ax=b \wedge a\neq 0) \vee (ax=b \wedge a=0)$$
$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{b}{a} \wedge a\neq 0\right) \vee (ax=b \wedge a=0)$$

Na osnovu te ekvivalencije, ako $a\neq 0$, polazna jednačina je ekvivalentna sa jednačinom $x=\frac{b}{a}$, pa je broj $\frac{b}{a}$ njeno jedinstveno rješenje. U slučaju $a=0$, jednačina je ekvivalentna sa $0 \cdot x=b$ i tada:

Uslov $b=0$ je potreban i dovoljan da razmatrana jednačina ima rješenja. U potvrdnom slučaju, ona postaje $0 \cdot x=0$, pa je svaki broj njeno rješenje.

Primjer 5. Jedan od, za upotrebu često pogodnih, zakona je sljedeći:

$$p \wedge q \Leftrightarrow p \quad (\text{Ako } p \Rightarrow q)$$

tzv. *zakon svođenja za konjunkciju*. Prema tom zakonu konjunkcija $p \wedge q$ se može svesti na svoj član p, ukoliko je q posljedica tog člana. Logička podloga je tome što je formula

$$(p\Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q \Leftrightarrow p)$$

tautologija. Recimo, tačne su konjunkcije

$x=1 \wedge x<2 \Leftrightarrow x=1$, $\quad x>0 \wedge y>0 \wedge x+y>0 \Leftrightarrow x>0 \wedge y>0$.
(Jer $x=1 \Rightarrow x<2$) $\quad$ (Jer $x>0 \wedge y>0 \Rightarrow x+y>0$)

Događa se da se zakon svođenja koristi i „zdesna nalijevo", tj. da se od p prelazi na $p \wedge q$. Razmotrimo, recimo, rješavanje po x jednačine

$$\frac{x}{a}=1.$$

Tada imamo

$$\frac{x}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{a}=1 \wedge a\neq 0$$

(Jer $\frac{x}{a}=1 \Rightarrow a\neq 0$, odnosno ako važi jednakost $\frac{x}{a}=1$ mora biti $a\neq 0$)

$$\Leftrightarrow a \cdot \frac{x}{a}=1 \wedge a\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x=a \wedge a\neq 0$$

Znači, uslov $a\neq 0$ je potreban i dovoljan da jednačina $\frac{x}{a}=1$ bude moguća. U potvrdnom slučaju, broj a je jedinstveno rješenje. Evo još jednog primjera upotrebe zakona svođenja. Razmotrimo rješavanje po x konjunkcije

$$x^2+x=12 \wedge x\in N$$

Jedan rješavajući lanac glasi:

$x^2+x=12 \wedge x\in N \Leftrightarrow x^2+x=12 \wedge x\in N \wedge x^2<12$
(Jer iz $x^2+x=12$ slijedi $x^2<12$, budući da je x pozitivan)

$\Leftrightarrow x^2+x=12 \wedge x\in N \wedge x<4$
(Jer: $x^2<12 \Leftrightarrow x<4$, budući da $x\in N$)

$\Leftrightarrow x^2+x=12 \wedge x\in N \wedge x\in \{1, 2, 3\}$

$\Leftrightarrow x^2+x=12 \wedge x\in \{1, 2, 3\}$
(Jer $x\in \{1, 2, 3\} \Rightarrow x\in N$)

$\Leftrightarrow x^2+x=12 \wedge (x=1 \vee x=2 \vee x=3)$

$\Leftrightarrow (x^2+x=12 \wedge x=1) \vee (x^2+x=12 \wedge x=2)$
$\vee (x^2+x=2 \wedge x=3)$

$\Leftrightarrow (x=1 \wedge 1^2+1=12) \vee (x=2 \wedge 2^2+2=12)$
$\vee (x=3 \wedge 3^2+3=12)$

$\Leftrightarrow (x=1 \wedge \perp) \vee (x=2 \wedge \perp) \vee (x=3 \wedge \top)$

$\Leftrightarrow x=3.$

Znači, 3 je jedinstveno rješenje.

Primjer 6. Razmotrimo rješavanje po x formule

$$|x-1|+|x-2|\geqslant 3.$$

Radi oslobađanja od znaka apsolutne vrijednosti, razlikujemo razne slučajeve u vezi sa znacima izraza $x-1$, $x-2$. Ukupno se pojavljuju tri slučaja[2]:

$$x \leqslant 1, \quad 1<x<2, \quad x \geqslant 2.$$

U stvari, treba obaviti rješavanje date nejednačine u svakom od ta tri slučaja. Evo jednog rješavajućeg lanca sa strogom upotrebom formulskog jezika (i logičkih zakona):

$$\begin{aligned}
|x-1|+|x-2| \geqslant 3 &\Leftrightarrow |x-1|+|x-2| \geqslant 3 \wedge \top \\
&\Leftrightarrow |x-1|+|x-2| \geqslant 3 \wedge (x \leqslant 1 \vee 1<x<2 \vee x \geqslant 2) \\
&\Leftrightarrow (|x-1|+|x-2| \geqslant 3 \wedge x \leqslant 1) \\
&\quad \vee (|x-1|+|x-2| \geqslant 3 \wedge 1<x<2) \\
&\quad \vee (|x-1|+|x-2| \geqslant 3 \wedge x \geqslant 2) \\
&\Leftrightarrow [-(x-1)+(-(x-2)) \geqslant 3 \wedge x \leqslant 1] \\
&\quad \vee [x-1+(-(x-2)) \geqslant 3 \wedge 1<x<2] \\
&\quad \vee [x-1+x-2 \geqslant 3 \wedge x \geqslant 2] \\
&\Leftrightarrow (x \leqslant 0 \wedge x \leqslant 1) \vee (1 \geqslant 3 \wedge 1<x<2) \\
&\quad \vee (x \geqslant 3 \wedge x>2) \\
&\Leftrightarrow x \leqslant 0 \vee \perp \vee x \geqslant 3 \\
&\Leftrightarrow x \leqslant 0 \vee x \geqslant 3
\end{aligned}$$

Rješenja su, dakle, brojevi manji ili jednaki od 0, kao i brojevi veći ili jednaki 3.

Evo nekoliko sličnih primjera. Riješiti po x datu formulu:

a) $|x-1|+5x-2=0$; b) $|x-1|+|x-2| \leqslant 1$; c) $\operatorname{sgn}(x-2)+x=0$, d) $\varphi(x)+\varphi(x-1)=2x$, gdje je $\varphi(x)$ određeno definicijom $\varphi(x)=x$, *ako* $x \geqslant 1$; $\varphi(x)=1$, *ako* $-1<x<1$; $\varphi(x)=-x$, *ako* $x \leqslant -1$.

Kao što se iz rješavanja nejednačine $|x-1|+|x-2| \geqslant 3$ vidi, a slično i iz poslednje fusnote, često se koristi i zakon distributivnosti $\wedge$ prema $\vee$. Recimo, taj zakon se, prirodno, pojavljuje tokom rješavanja ovakvih formula po x:

$$\text{a) } \frac{x-1}{x-2}>0, \quad \text{b) } \frac{(x-1)(3-x)}{x-2}<0, \quad \text{c) } \frac{2-x}{x-3}>2.$$

U tom rješavanju koriste se i ekvivalencije oblika

$$AB>0 \Leftrightarrow (A>0 \wedge B>0) \vee (A<0 \wedge B<0) \text{ i slične.}$$

Primjer 7. Upoznaćemo ukratko jedan način rješavanja sistema linearnih nejednačina. Riječ je o tzv. Furije-Mockinovom metodu (*Fourier* i *Motzkin*). Taj metod se oslanja na ovakve ekvivalencije:

$$x<A \wedge x<B \Leftrightarrow x<\min(A, B), \quad x>A \wedge x>B \Leftrightarrow x>\max(A, B).$$
$$x<A \wedge x>B \Leftrightarrow B<A \wedge B<x<A,$$

kao i slične, u kojima umjesto znaka $<$ stoji $\leqslant$, $>$, $\geqslant$. Prvim dvjema ekvivalencijama, može se tako reći, vrši se *skupljanje* sistema $x<A$, $x<B$, odnosno $x>A$, $x>B$ u jednu (prostu) formulu. Posljednja ekvivalencija se može ovako tumačiti. Nejednačina po x

$$x<A \wedge x>B$$

je moguća ako $B<A$, i u potvrdnom slučaju rješenja su svi brojevi između A, B.

Uočimo sada ove sisteme nejednačina po x, y:

(1) $x+y<1 \wedge 2x+y<3$, (2) $x+y<1 \wedge x-y-3<0$,

(3) $\quad 3x-y-5<0 \wedge x+y<3 \wedge x-y+1>0 \wedge x>0 \wedge y>0$.

Za prvi važe ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow y<1-x \wedge y<3-2x \\
&\Leftrightarrow y<\min(1-x, 3-2x)
\end{aligned}$$

pa je rješenje ma koja dvojka (x, y), gdje je x proizvoljan broj, a odnosni y je ma koji broj manji od $\min(1-x, 3-2x)$.

Za sistem (2) važe ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow y<1-x \wedge y>x-3 \\
&\Leftrightarrow x-3<1-x \wedge x-3<y<1-x \\
&\Leftrightarrow x<2 \wedge x-3<y<1-x
\end{aligned}$$

Znači, x može biti ma koji broj manji od 2, a odnosni y ma koji broj između brojeva $x-3$ i $1-x$.

Radi rješavanja sistema (3) uočimo ovaj lanac:

[2] Do tih slučajeva se može i ovako doći:

$$\begin{aligned}
\top \Leftrightarrow \top \wedge \top &\Leftrightarrow (x<1 \vee x=1 \vee x>1) \wedge (x<2 \vee x=2 \vee x>2) \\
&\Leftrightarrow (x<1 \wedge x<2) \vee (x<1 \wedge x=2) \vee (x<1 \wedge x>2) \\
&\quad \vee (x=1 \wedge x<2) \vee (x=1 \wedge x=2) \vee (x=1 \wedge x>2) \\
&\quad \vee (x>1 \wedge x<2) \vee (x>1 \wedge x=2) \vee (x>1 \wedge x>2) \\
&\Leftrightarrow x<1 \vee \perp \vee \perp \vee x=1 \vee \perp \vee \perp \vee 1<x<2 \vee x=2 \vee x>2 \\
&\Leftrightarrow x \leqslant 1 \vee 1<x<2 \vee x \geqslant 2
\end{aligned}$$

gdje smo se koristili distributivnošću $\wedge$ prema $\vee$, odnosno tautologijom oblika:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee q_3) \Leftrightarrow (p_1 \wedge q_1) \vee (p_1 \wedge q_2) \vee (p_1 \wedge q_3) \vee \ldots \vee (p_3 \wedge q_3)$$

a dalje, ekvivalencijama:

$x<1 \wedge x<2 \Leftrightarrow x<1$ (Na osnovu zakona svođenja)

$x=1 \wedge x=2 \Leftrightarrow \perp$ i slično.

(3) $\Leftrightarrow y>3x-5 \wedge y<3-x \wedge y<x+1 \wedge x>0 \wedge y>0$
(Obavili smo rješavanje po y)

$\Leftrightarrow (y>3x-5 \wedge y>0) \wedge (y<3-x \wedge y<x+1) \wedge x>0$

$\Leftrightarrow (y> \max(0, 3x-5) \wedge y< \min(3-x, x+1)) \wedge x>0$

$\Leftrightarrow \max(0, 3x-5)<\min(3-x, x+1) \wedge x>0$
$\wedge \max(0, 3x-5)<y< \min(3-x, x+1)$

$\Leftrightarrow 0<3-x \wedge 0<x+1 \wedge 3x-5<3-x \wedge 3x-5<x+1 \wedge x>0$
$\wedge \max(0, 3x-5)<y< \min(3-x, x+1)$
(Korišćena je ekvivalencija vida
$\max(A, B)< \min(C, D)$

$\Leftrightarrow A<C \wedge A<D \wedge B<C \wedge B<D$)

$\Leftrightarrow x<3 \wedge x>-1 \wedge x<2 \wedge x<3 \wedge x>0$
$\wedge \max(0, 3x-5)<y< \min(3-x, x+1)$

$\Leftrightarrow 0<x<2 \wedge \max(0, 3x-5)<y< \min(3-x, x+1)$

Znači, rješenja su dvojke (x, y) čiji je prvi član bilo koji broj između 0 i 2, a odnosni drugi ma koji broj između

$$\max(0, 3x-5) \text{ i } \min(3-x, x+1).$$

Na kraju pomenimo da se na sličan način rješavaju sistemi i sa više nepoznatih, recimo po x, y, z. Na primjer, sistem F po x, y, z:

$$x>0 \wedge y>0 \wedge z>0 \wedge z<x+y \wedge x<y+z \wedge y<z+x$$

se može ovako riješiti:

$F \Leftrightarrow z>0 \wedge z<x+y \wedge z>x-y \wedge z>y-x \wedge (x>0 \wedge y>0)$
(Rješavali smo po z)

$\Leftrightarrow z> \max(0, x-y, y-x) \wedge z<x+y \wedge (x>0 \wedge y>0)$

$\Leftrightarrow (\max(0, x-y, y-x)<x+y \wedge x>0 \wedge y>0)$
$\wedge \max(0, x-y, y-x)<z<x+y$

$\Leftrightarrow 0<x+y \wedge x-y<x+y \wedge y-x<x+y \wedge x>0 \wedge y>0$
$\wedge \max(0, x-y, y-x)<z<x+y$

$\Leftrightarrow y>-x \wedge y>0 \wedge x>0 \wedge x>0 \wedge y>0 \wedge |x-y|<z<x+y$
(Jer važi jednakost oblika $\max(0, A, -A)=|A|$. Inače, obavili smo rješavanje po y)

$\Leftrightarrow (y>-x \wedge y>0) \wedge (x>0) \wedge |x-y|<z<x+y$

$\Leftrightarrow y>0 \wedge x>0 \wedge |x-y|<z<x+y$

Dobijena konjunkcija određuje sva rješenja (x, y, z). Nepoznate x, y mogu biti ma koji pozitivni brojevi, a odnosno z ma koji broj između brojeva $|x-y|$, $x+y$.

8. NEKE NAPOMENE O NASTAVI I OCJENJIVANJU

Na kraju dajemo nekoliko opštih napomena vezanih za izvođenje nastave i ocjenjivanje učenika. Nadamo se da će one biti korisna dopuna prethodnom izlaganju.

Da bi nastavnik što uspješnije ostvario sve zadatke koji se postavljaju pred nastavu matematike, potrebno je, svakako, mnogo strpljivog rada i zalaganja, neprekidno preispitivanje metoda primijenjenih u izvođenju nastave, traženje puteva i načina za njeno poboljšavanje. S tim ciljem dajemo nekoliko napomena o tome kako smatramo da bi trebalo prilaziti rješavanju pojedinih pitanja nastave.

(**1**) U izlaganju valja isticati pojedine slegnute, zaokružene cjeline, ukazivati na njih, tako da učenik stekne potpun pregled gradiva koje je naučio u toku školske godine, te da zna kratko, sa nekoliko rečenica da opiše cjeline koje je savladao. Tako, na primjer, učenik treba da zna ove cjeline: vrste brojeva i njihove zakonitosti, geometrijske transformacije i sl. Ne bi smjelo da se dogodi da učenik čak i do automatizma savlada, recimo, operacije sa razlomcima, a da na pitanje o tome šta su racionalni brojevi, ne zna ništa da odgovori. Slikovito, to možemo ovako opisati. Izučavanje matematike ne smije biti mukotrpno probijanje kroz nepreglednu šumu zadataka, teorema, formula, jer postoji velika opasnost da učenik „od drveća ne vidi šumu". Stoga treba na određenim mjestima stavljati „putokaze", i praviti osvrte koji će davati širi pogled, izdaleka, na tu „matematičku šumu". Evo šta to znači. Na kraju svakog časa na kojem je obrađeno novo gradivo, korisno je da nastavnik u nekoliko kratkih, jasnih rečenica iskaže u sažetom obliku glavne poruke koje sadrži obrađeno gradivo, te da učenici to zapišu i zapamte. Ove rečenice podesno je sročiti kroz razgovor i aktivno učešće cijelog odjeljenja. Naravno, učenje matematike ne smije da se svede na zapamćivanje samo tih rečenica, one treba da posluže jedino kao podsjetnik najvažnijih činjenica, sadržanih u pređenom gradivu. Slično, na kraju obrade pojedinih većih cjelina treba praviti kratke osvrte na gradivo sadržano u njima. Takvi osvrti treba da sadrže sažeto ponavljanje najznačajnijih činjenica, da ukažu na njihovu međusobnu povezanost, kao i povezanost sa ostalim pređenim dijelovima gradiva.

(**2**) Savlađivanje raznih matematičkih operacija, logičkih, skupovnih, brojevnih i sl., kao i raznih postupaka uopšte, do određenog stepena automatizma, treba da se sastoji iz nekoliko koraka. U prvom učenik treba dobro da razumije o čemu je riječ, tj. da ne uči formule napamet bez udubljivanja u njihov smisao. Ovo se postiže kroz razna jednostavna pitanja i primjere. U drugom koraku, učenik treba da uoči logičku povezanost sa drugim srodnim činjenicama, da usvoji ideju dokaza osnovnih osobina posmatrane operacije. Tek tada, kad je učenik dobro savladao prve dvije etape učenja, određenim uvježbavanjem, izradom većeg broja podesno izabranih raznovrsnih zadataka, postiže se odgovarajuća brzina i spretnost u primjeni tih operacija, odnosno postupaka.

(**3**) S ciljem boljeg i lakšeg savlađivanja pojedinih pojmova i činjenica, učenici treba da se aktivno koriste različitim sredstvima izražavanja, da upoznaju raznovrsne prikaze jednog istog pojma ili pojave. Tako se, na primjer, izrazi mogu prikazati kao riječi, a i kao drveta; funkcije mogu, recimo, da se prikažu na najraznovrsnije načine — dijagramom, grafom, tablicom, formulom, itd. S tom svrhom mogu se koristiti i razne pojave i primjeri iz svakodnevnog života, kao i njihovi različiti prikazi u obliku tabela, grafikona, dijagrama i sl. Naravno, i tu ne treba pretjerivati; navedenim sredstvima izražavanja treba koristiti se samo do izvjesne mjere, da se njihova pretjerana upotreba ne bi pretvorila u nedovoljno plodonosnu igru.

(**4**) Kao što smo već više puta isticali, u matematičkoj nauci postoje razni pristupi u izboru polaznih pojmova, a, pored toga, postoje i različite, ekvivalentne definicije istog pojma. Ova elastičnost i sloboda mora se, u izvjesnoj meri, odražavati i u nastavi. Učenik ne smije da stekne pogrešan utisak da su u matematici pojmovi okamenjeni, utvrđeni jednom za svagda; treba da shvati da su definicije, manje-više, stvar dogovora, koji se, prema potrebi, mogu, u određenim okvirima, mijenjati, prilagođavati posmatranom problemu. Ovo je neobično važno za razvijanje stvaralačkih sposobnosti učenika i njihovo osposobljavanje za različita samostalna istraživanja, traženje novih puteva u matematici i njenim primjenama.

(**5**) Organizacija časa, takođe, zaslužuje punu pažnju. Izlaganje novog gradiva ne smije biti dugo i zamorno, ne treba da sadrži zamršena objašnjavanja, duga izvođenja, već treba da bude jasno, pregledno, da bude protkano jednostavnim, zanimljivim primjerima, jer će samo tako uspjeti da zadrži učenikovu pažnju. Pored toga, u izlaganju treba se koristiti raznovrsnim izražajnim sredstvima, raznim modelima, slikama, itd. Poslije kraćeg izlaganja, koje u podesnim prilikama treba da bude prožeto razgovorom sa učenicima, uputno je preći na rješavanje primjera, koje treba vrlo pažljivo odabrati. Oni treba da su jednostavni, raznovrsni i zanimljivi, pritom svaki zadatak treba da sadrži neku poruku, neko novo obavještenje vezano za novo gradivo. Treba izbjegavati glomazne zadatke, koji, sem što su komplikovani i zametni, za računanje, ne doprinose gotovo nimalo produbljivanju i proširivanju stečenog znanja.

(**6**) Pri rješavanju zadataka, valja izbjegavati upotrebu bilo kakvih šablona, gotovih recepata koji se primjenjuju u određenim prilikama bez ikakvog razumijevanja samo „zato što je nastavnik rekao da se tako radi". Uočimo, na primjer, konstrukciju tangente iz tačke A na kružnicu $k(O, r)$. Učenik može lako da zapamti šablon: naći središte S duži AO, opisati kružnicu sa središtem S, poluprečnika SA, odrediti njene presječne tačke P i Q sa kružnicom k, tada su AP i AQ tražene tangente. Može se, međutim, dogoditi da na pitanje zašto se to tako radi, uopšte ne zna da odgovori. Nastava matematike vrvi raznim sličnim opasnostima koje treba brižljivo izbjegavati.

Učenike treba podsticati na određenu samostalnu misaonu aktivnost kojom će date podatke preraditi na podesan oblik, pa tako i sam, možda, doći do puta za rješavanje zadatka. Posebno je značajno njegovati i razvijati kod učenika kritički odnos prema radu, stvoriti naviku provjeravanja dobijenih informacija i njihovo povezivanje. Smatramo da je vrlo štetno ako nastavnik svojim autoritetom ili autoritetom knjige suzbija radoznalost i samostalnost učenikovog duha, kanališući prisilno njegove misli samo u jednom određenom pravcu. Ne samo da treba dozvoliti da đak riješi zadatak svojom idejom već ga, naprotiv, u tome treba podsticati i ohrabrivati. To, naravno, ne znači da od učenika ne treba zahtijevati dobro poznavanje određenih činjenica, postupaka vezanih za izvjestan zadatak; takvo poznavanje može samo da mu pomogne da dođu do izražaja njegove sposobnosti.

U vezi sa zadacima, istaknimo i sljedeće. Oni su najčešće oblika: izračunati . . ., konstruisati . . ., naći . . ., riješiti . . ., dokazati to i to, i sl. Nije teško zapaziti da se u školskoj praksi ovi posljednji, tj. zadaci deduktivnog tipa, obično izbjegavaju. Uzrok tome, vjerovatno, leži u raznim ustaljenim navikama, nedovoljno poznatoj metodici rješavanja zadataka takve vrste. U našoj knjizi, zbirci, pa i ovom priručniku, pokušali smo dati razna metodska rješenja i uputstva u tom smislu. Kako je deduktivnost jedna od bitnih odlika matematike, smatramo da je neobično važno da se, pored ostalih, njeguju zadaci upravo tipa: dokazati to i to, odnosno zadaci oblika: iz pretpostavki tih i tih, izvesti to i to. Pri tome zadaci treba da su, naročito u početku, što jednostavniji, kao, na primjer, ovi:

Dokazati da simetrična i tranzitivna relacija ρ zadovoljava uslov

$$\rho(x, z) \wedge \rho(y, z) \Rightarrow \rho(x, y)$$

Dokazati da je kateta pravouglog trougla manja od hipotenuze; — kao i razni njima slični.

(7) U radu sa učenicima treba naročito voditi računa o raznim etapama njihovog razvoja. Poneki učenik sazrijeva brže, neki sporije, često dolazi do kraćih zastoja, pa, zatim, naglih skokova u njihovom razvoju. U vezi stim, nastavnik mora, na određen način, da reaguje, ne smije stvoriti predrasude o pojedinim učenicima i ocjenjivati ih na osnovu takvih predrasuda. Često se dešava da je učenik u početku školske godine nepažljiv i rasijan, pa, kao posljedica takvog stanja, uslijedi slaba ocjena. Međutim, taj učenik u toku školske godine, u izvjesnom smislu, sazri, probudi se u njemu interes za rad i učenje. U takvim slučajevima, nastavnik mora elastično reagovati, treba da je spreman da promijeni mišljenje i da na odgovarajući način ocijeni učenika, podstičući ga time na još uspješniji rad. Naravno, ima i obratnih situacija, stoga nastavnik ne smije dozvoliti učeniku koji se u početku istakao, da „spava na lovorikama" do kraja školske godine.

(8) Jedna od važnih komponenti nastave, svakako, je i ocjenjivanje učenika. Tome nastavnik mora da posveti naročitu pažnju. U prethodnoj napomeni, taj problem smo, u stvari, već dotakli, ovdje ćemo navesti još neke misli. Smatramo da minimum znanja za pozitivnu ocjenu mora biti jasno definisan. S tim u vezi, mi smo u zbirci, na kraju svake tačke, dali predlog zadataka koje bi obavezno trebalo savladati. Ako učenik duže vremena ne pokazuje interes za rad, pa zbog toga ima negativnu ocjenu, za popravljanje te ocjene nije, naravno, dovoljno da nauči posljednje dvije-tri lekcije. Nastavnik mora učeniku otvoreno da saopšti: za prelaznu ocjenu moraš, iz čitavog pređenog gradiva, da naučiš to i to. Podesno je učeniku dati veći broj određenih zadataka iz pređenog gradiva koje mora izraditi u pismenom obliku za određeno vrijeme, recimo mjesec dana, i donijeti nastavniku. Kratkom i brzom provjerom, štih-probom, nastavnik se može lako uvjeriti da li je učenik samostalno riješio zadatke i u kojoj mjeri je savladao gradivo. Takođe, vrlo korisno je učenicima koji se više zanimaju

za matematiku i pokazuju odlične rezultate, zadavati povremeno teže zadatke da o njima razmišljaju, pokušaju da ih riješe i donesu u pismenom obliku. To mogu biti zadaci iz zbirke dati u tački Razni zadaci, zatim zadaci iz matematičkih časopisa, sa takmičenja i sl.

U provjeri znanja „pred tablom", nastavnik mora često biti vrlo strpljiv i omogućiti učeniku da razvije svoju misao, jer ponekom đaku je potrebno, možda, malo više vremena da uobliči odgovor, pa mu treba za to pružiti priliku, ne prekidati ga nestrpljivo u razmišljanju, tražeći odgovor od „bržeg" učenika. Rješavanje matematičkih zadataka ne treba shvatiti kao trku na kojoj pobjeđuje onaj ko prvi stigne. To je mnogo složeniji proces, u kojem treba sagledavati razne komponente: jasno, logički sređeno izlaganje, bogatstvo ideja, vještinu u obavljanju pojedinih postupaka, itd. Ovdje je riječ o ocjeni usmenog odgovora, inače kompletna ocjena treba da sadrži i sve ostale pojedinačne ocjene: pismenih vježbi, domaćih zadataka, kao i opštu aktivnost koja se očituje u pažljivom i zainteresovanom ponašanju na času.

SADRŽAJ