SLAVIŠA B. PREŠIĆ

ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

TREĆE IZDANJE

ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA
BEOGRAD

MATEMATIČKA BIBLIOTEKA

Edicija Katedre za matematiku Elektrotehničkog fakulteta
Univerziteta u Beogradu

SADRŽAJ

PREDGOVOR

U današnje vreme matematička logika ima tako snažan zamah da gotovo i nema oblasti intelektualne aktivnosti u kojoj ona ne nalazi primene.

Tako se ona u matematici sa jednakim uspehom primenjuje u rešavanju problema njenog zasnivanja kao i u njenim čisto „praktičnim" problemima (mogućnost primenljivosti logike proističe iz određene sličnosti između logičkih izvođenja i računskih procesa).

Od posebnog značaja je njena uloga u kibernetici.

Cilj ove knjige je da čitaoca upozna sa osnovnim delom matematičke logike. Ona je namenjena prvenstveno studentima matematike i tehnike.

U knjizi se izlažu: iskazna algebra, iskazni račun, predikatski račun prvog reda (uključujući i Gödelov stav potpunosti), formalne teorije uopšte kao i osnovno iz teorije definicija. Takođe se prikazuju formalna teorija brojeva i izvesne aksiomatske teorije skupova sa (skiciranim) dokazima osnovnih stavova.

Moguće je uglavnom čitati navedene delove nezavisno jedne od drugih.

Na kraju je dat kratak istorijski pregled, ali ne logike uopšte, odnosno svih njenih problema već samo onih koji su u bližoj i određenijoj vezi sa evolucijom matematičke misli.

Uspešno čitanje pretpostavlja poznavanje najosnovnijeg iz teorije skupova i matematičke indukcije kojom se izvode mnogi dokazi.

Profesor D. S. Mitrinović mi je, kao i svima koji sa njim uspostave saradnju, pružio podstrek u radu i pomogao svojim bogatim iskustvom.

Zahvaljujem se Jovanu Kečkiću, studentu matematike i Branki Alimpić, Miroslavu Klunu, Svetozaru Miliću magistrima matematike na svesrdnoj stručnoj i tehničkoj pomoći.

Na kraju se navodi spisak literature koji može čitaoca da upozna sa pitanjima koja ovde nisu razmatrana (pravci u matematici, istinitost u matematici, matematički objekti, paradoksi, algoritmi, polivalentne logike i drugo).

BETH E. W.

Les fondements logiques des mathématiques, Paris 1950.

БУРБАКИ Н.

Теория множеств, Москва 1965.

CHURCH A.

Introduction to Mathematical Logic, I, Princeton 1956.

DEVIDÉ V.

Matematička logika I, Beograd 1964.

GOODSTEIN R. L.

Mathematical Logic, Leicester 1957.

HILBERT D. — ACKERMANN W.

Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1938.

HILBERT D. — BERNAYS P.

Grudlagen der Mathematik I, II Berlin 1934, 1939.

KLEENE S. C.

Introduction to Metamathematics, New York 1952.

MENDELSON E.

Introduction to Mathematical Logic, New York 1964.

НОВИКОВ П. С.

Елементи математической логики, Москва 1959.

PRIJATELJ N.

Uvod v matematično logiko, Ljubljana 1960.

ROSSER J. B.

Logic for Mathematicians, New York 1963.

WANG H. i R. MC NAUGHTON

Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles, Paris 1953.

S. B. Prešić

PRVI DEO

I. ISKAZNA ALGEBRA

1. ISKAZI. OSNOVNE OPERACIJE SA ISKAZIMA

U matematici se najčešće javlja jedna vrsta rečenica, takozvani ISKAZI.

Iskaz je ona rečenica koja može da ima jedno i samo jedno od sledeća dva svojstva: TAČNA JE, NETAČNA JE. Ili, kako drukčije kažemo, iskaz može da ima jednu, i samo jednu ISTINITOSNU vrednost: tačan, netačan (odnosno istinit, neistinit). Tačan iskaz zovemo TVRĐENJE (STAV). Misaoni sadržaj (korelat) iskaza zovemo SUD.

Navodimo nekoliko primera iskaza:

(1) Broj 5 je jednak zbiru brojeva 2 i 3.

(2) Broj 3 je manji od broja 2.

(3) Za svaki realan broj x je $x=1$.

(4) Postoji realan broj x takav da je $x^2=9$.

(5) $2\cdot 3=3\cdot 2$ je stav matematike.

(6) Kroz tačku A van prave p prolazi tačno jedna prava koja ne seče tu pravu.

(7) Kroz tačku A van prave p prolaze bar dve prave koje ne seku tu pravu.

(8) Kroz tačku A van prave p ne prolazi nijedna prava koja ne seče tu pravu.

(U primerima (3) i (4) znake $=$, 1, 9, x^2 tumačimo na uobičajeni način.)

Među ovim iskazima tačni su (1), (4) i (5), a netačni su (2) i (3).

U okviru euklidske geometrije, iskaz (6) je aksioma, *odnosno to je dogovorno tačan iskaz te geometrije*. Slično u geometriji Lobačevskog, odnosno Riemannovoj geometriji, aksioma je iskaz (7), odnosno (8), pa je svaki od njih tačan u okviru odgovarajuće geometrije.

Sa iskazima se, pomoću tzv. LOGIČKIH OPERACIJA, prave novi iskazi. Te osnovne operacije su disjunkcija, konjunkcija, implikacija, ekvivalencija i negacija. Za slučaj svake od njih značajna je zavisnost istinitosnih vrednosti novog iskaza i iskaza pomcću kojih je obrazovan nov iskaz. Inače, pravila tih operacija omogućuju, između ostalog, da se polazeći od nekih tačnih iskaza obrazuju sve novi i novi iskazi, koji su takođe tačni. Za matematiku to ima naročit značaj.

Definicija 1. DISJUNKCIJA *redom iskaza* p[1] *i* q *je iskaz*

„p *ili* q".

Ona je tačna u slučajevima: (1) p *tačan*, q *tačan* (2) p *netačan*, q *tačan*, (3) p *tačan*, q *netačan; a netačna je ako je* p *netačan*, q *netačan iskaz.*

Često se kraće kaže: Disjunkcija iskaza p i q je tačna ako je bar jedan od tih iskaza tačan.

Na primer, ako su p i q redom iskazi „2 = 2" i „3 = 2", onda je „2 = 2 ili 3 = 2" disjunkcija redom iskaza p i q, i ona je tačan iskaz. Tačan je i iskaz: „2 = 2 ili 3 = 3", jer su u njemu odgovarajući iskazi p i q tačni. Ovo treba i podvući, jer se u običnom govoru svezi „ili" ne pripisuje uvek to „uključno" svojstvo (odnosno da je „p ili q" tačan iskaz ako su i p i q tačni iskazi), već se „ili" mnogo ne razlikuje od „ili ... ili".

Definicija 2. KONJUNKCIJA *redom iskaza* p *i* q *je iskaz:*

„p *i* q".

Ona je tačna ako su p *i* q *tačni, a netačna je kada* p *i* q *imaju druge istinitosne vrednosti.*

Definicija 3. IMPLIKACIJA *redom iskaza* p *i* q *je iskaz:*

„*Ako* p *onda* q".

Ona je netačan iskaz jedino u slučaju ako je p *tačan iskaz, a* q *netačan, dok je tačan iskaz kad god* p *i* q *imaju druge istinitosne vrednosti.*

---

[1] Simbol p ne treba shvatiti kao iskaz već kao *oznaku* za neki iskaz. Tako je i sa q. Slično se izražavamo i u daljim tekstovima.

Implikaciju redom iskaza p i q označavamo $p \rightarrow q$.

U skladu sa usvojenim definicijama, smatramo da su tačni sledeći iskazi:

(1) Ako je $2=3$, onda je $2=2$.

(2) Ako je $x=y$, onda je $y=x$, gde su x i y brojevi.

Definisana implikacija često se zove i MATERIJALNA IMPLIKACIJA.

Napominjemo da za rečenicu „Ako p onda q" ima više rečenica koje isto znače. Navodimo neke koje su najčešće u upotrebi:

(1) Ako p, onda q.

(2) Iz p sleduje q.

(3) p povlači q.

(4) p je pretpostavka, a q je posledica.

(5) Da bude q, *dosta* je da bude p.

(6) p je DOVOLJAN USLOV za q.

(7) Da bude p, *mora* da bude q.

(8) q je NUŽAN USLOV za p.

Na primer, isto se tvrdi svakom od rečenica:

1° Ako je prirodan broj deljiv sa 4, onda je deljiv i sa 2.

2° Dovoljan uslov da je prirodan broj deljiv sa 2 jeste da je on deljiv sa 4.

3° Nužan uslov da je prirodan broj deljiv sa 4 jeste da je deljiv sa 2.

U tom primeru intervenisali su i razni stilski zakoni. U protivnom, dobili bismo rogobatne rečenice.

Definicija 4. EKVIVALENCIJA *redom iskaza* p *i* q *je iskaz*

„p *je ako i samo ako* q".

Ona je tačan iskaz ako p *i* q *imaju jednake istinitosne vrednosti (oba tačna, oba netačna), a netačan iskaz ako* p *i* q *imaju različite istinitosne vrednosti.*

Ekvivalencija redom iskaza p i q označava se $p \longleftrightarrow q$. Isto znače rečenice:

(1) p je ako i samo ako q.

(2) Ako p onda q i ako q onda p.

(3) p je ekvivalentno sa q.

(4) p je nužan i dovoljan uslov za q.

Definicija 5. NEGACIJA *iskaza* p *je iskaz*

„*ne* p".

Negacija tačnog iskaza je netačan iskaz, a negacija netačnog je tačan iskaz.

U idućoj tački uvodimo jednu algebarsku strukturu, tzv. iskaznu algebru $(\top, \bot)$. Jedna od mogućih INTERPRETACIJA[1] njenih simbola: p, q, ..., $\top$, $\bot$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ je sledeća: p, q, ... se interpretiraju kao iskazi, $\top$ kao tačan, $\bot$ kao netačan, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ redom kao već uvedena disjunkcija, konjunkcija, implikacija, ekvivalencija i negacija.

U toj algebri imaćemo i tzv. ISTINITOSNE TABLICE, koje će, između ostalog, i preglednije opisati zavisnost istinitosti složenog iskaza od istinitosti prostijih iskaza od kojih je on obrazovan.

U algebri $(\top, \bot)$ osnovnu ulogu imaju tzv. TAUTOLOGIJE, kojima pri navedenoj interpretaciji odgovaraju iskazi koji su tačni, bez obzira na to kakvu istinitosnu vrednost imaju prostiji iskazi koji obrazuju taj iskaz. Navodimo jednu interpretiranu tautologiju:

p ili ne p.

Odgovarajuća tautologija zove se ZAKON ISKLJUČENJA TREĆEG.

2. ISKAZNA ALGEBRA $(\top, \bot)$. TAUTOLOGIJE

Elementi ISKAZNE ALGEBRE $(\top, \bot)$ ili, kratko, elementi ISKAZNE ALGEBRE jesu simboli $\top$ i $\bot$. U skupu $\{\top, \bot\}$ sledećim tablicama definišemo osnovne operacije te algebre, u oznaci $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$:

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

	$\neg$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

prema kojima je, na primer, $\top \vee \top = \top$, $\top \wedge \bot = \bot$, $\bot \Rightarrow \top = \top$, $\top \Leftrightarrow \bot = \bot$, $\neg \top = \bot$, $\neg \bot = \top$.

U toj algebri značajnu ulogu imaju tzv. ISKAZNE FORMULE, koje su obrazovane od nekih polaznih, dogovorno izabranih ISKAZNIH SLOVA i od simbola $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, (,).

[1] Umesto interpretacija može se reći preslikavanje, jer je svaka interpretacija izvesno preslikavanje.

Odlučujemo se za jedan od mogućih izbora polaznih simbola.

Definicija 1. ISKAZNA SLOVA *su simboli*

$$\mathrm{p},\ \mathrm{q},\ \mathrm{r},\ \mathrm{p}_1,\ \mathrm{q}_1,\ \mathrm{r}_1,\ \ldots,\ \mathrm{p}_n,\ \mathrm{q}_n,\ \mathrm{r}_n,\ \ldots$$

Definicija 2. 1° *Iskazna slova su* ISKAZNE FORMULE.

2° *Ako su* A *i* B[1] ISKAZNE FORMULE, *onda su i*

$$(A \vee B),\ (A \wedge B),\ (A \Rightarrow B),\ (A \Leftrightarrow B),\ \neg A$$

ISKAZNE FORMULE.

3° ISKAZNE FORMULE *mogu se obrazovati jedino pomoću konačnog broja primena* 1° *i* 2° *ove definicije*[2].

Prema datoj definiciji, p, q, $(\mathrm{p} \vee \mathrm{q})$, $(\mathrm{p} \Rightarrow \neg \mathrm{q})$, $\neg\neg \mathrm{p}$ jesu formule, dok $(\neg\,(\mathrm{p},\ \mathrm{p} \wedge \wedge \mathrm{q}$ to nisu. Primećujemo da prisustvo zagrada (i) u pravilu 2° omogućuje građenje i složenijih formula kao, na primer, $\neg\,(\mathrm{p} \vee (\mathrm{q} \wedge \mathrm{r}))$, $((\mathrm{p} \Rightarrow (\mathrm{q} \Rightarrow \neg\,\mathrm{r})) \vee \mathrm{p})$, ...

Radi prostijeg označavanja, često se usvajaju razne konvencije o brisanju zagrada. Tako:

Ako su A i B formule, onda formule $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ označavamo redom $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$.

Tako umesto $(\mathrm{p} \vee \mathrm{q})$ pišemo $\mathrm{p} \vee \mathrm{q}$. Navedena konvencija je tzv. konvencija o brisanju spoljnih zagrada.

Formulu oblika $((A) \Leftrightarrow (B))$, koja sadrži samo jedan znak $\Leftrightarrow$, označavaćemo i ovako $A \Leftrightarrow B$. Slično usvajamo i za $((A) \Rightarrow (B))$. Tako, $\mathrm{p} \vee \mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{p} \wedge \mathrm{q}$, $\mathrm{p} \vee \mathrm{q} \Leftrightarrow \mathrm{p} \wedge \mathrm{q}$ stoje redom umesto $((\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \Rightarrow (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}))$ i $((\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \Leftrightarrow (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}))$. Navedene konvencije ćemo upotrebljavati, osim ako postoji mogućnost višesmislenosti.

Ako su $F_1, F_2, \ldots, F_n$ neke formule, onda $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$, odnosno $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} F_i$, znači F_1 ako je $n=1$ i $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_{n-1}) \wedge F_n$ ako je $n > 1$. Tako, $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$, $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4$ jesu oznake redom

---

[1] A, B su oznake za formule. Slično važi i u daljem tekstu.

[2] Ovo je tzv. REKURZIVNA definicija. Iskazne formule su određene REČI (videti definiciju 8, prve tačke, iduće glave) čija su slova iskazna slova i simboli ( ) $\Rightarrow$ $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\Leftrightarrow$. Navedena definicija nije KRUŽNA jer se formule većih dužina definišu pomoću formula manjih dužina.

za formule $((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3)$, $(((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \wedge F_4)$. Slično se uvode $F_1 \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$, $(F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow F_n)\cdots))$.

Neka su $u_1, u_2, \ldots, u_n$ redom n različitih iskaznih slova[1]. Ako „zamenimo" svako od slova $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jednim od simbola $\top$, $\bot$, onda dobijamo tzv. VREDNOST redom slova $u_1, u_2, \ldots, u_n$. To je, po definiciji, uređena n-torka simbola $\top$, $\bot$.

Tako, na primer:

(1) vrednosti slova p su 1° $\top$ 2° $\bot$,

(2) vrednosti redom slova p, q, r su

1° $(\top, \top, \top)$ 2° $(\top, \top, \bot)$ 3° $(\top, \bot, \top)$ 4° $(\top, \bot, \bot)$

5° $(\bot, \top, \top)$ 6° $(\bot, \top, \bot)$ 7° $(\bot, \bot, \top)$ 8° $(\bot, \bot, \bot)$.

U slučaju n slova broj odgovarajućih vrednosti je 2^n.

Neka je sada F formula obrazovana pomcću slova $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Svakoj vrednosti tih slova odgovara VREDNOST FORMULE, koja je $\top$ ili $\bot$.

Definicija 3. 1° VREDNOST FORMULE u_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *jednaka je vrednosti tog slova* u_i.

2° *Ako su* a *i* b VREDNOSTI *redom* FORMULA A *i* B, *onda su* $a \vee b$, $a \wedge b$, $a \Rightarrow b$, $a \Leftrightarrow b$, $\neg a$ VREDNOSTI *redom formula* $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $\neg A$.

Na primer, ako slova p, q uzimaju redom vrednosti $\top$, $\bot$, onda formula $\neg\, p \vee (p \wedge q)$ dobija vrednost

$$\neg \top \vee (\top \wedge \bot) = \bot \vee \bot = \bot.$$

Definicija 4. *Formula* A *je* TAUTOLOGIJA *ako za sve vrednosti svojih iskaznih slova dobija vrednost* $\top$.

Neka $\models A$ označava da je A tautologija.

Primer. Formule $p \vee \neg p$, $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ jesu tautologije.

---

[1] To znači da su $u_1, u_2, \ldots, u_n$ oznake n različitih slova.

Dokaz za poslednju formulu može da se „čita" iz tablice.

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee q$	$p\vee r$	$p\vee(q\wedge r)$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$	$p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Simboli $\top$, $\bot$ algebre $(\top, \bot)$ i njene formule mogu da se *interpretiraju* na razne načine. Navodimo dva načina.

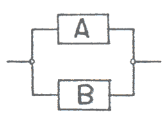
I način. Simbole $\top$, $\bot$ interpretiramo kao: tačan, netačan. Slova p, q, r, ... kao rečenice koje su ili tačne ili netačne. Znake $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ interpretiramo redom kao operacije sa iskazima: disjunkcija, konjunkcija, implikacija, ekvivalencija, negacija. Tada formulama odgovaraju rečenice, dok tautologijama odgovaraju rečenice koje su uvek tačne.

II način. Iskazna slova p, q, r, ... interpretiramo kao tzv. *relejne prekidače*. Simbole $\top$, $\bot$ interpretiramo redom kao uključen, isključen. Negacije slova, tj. formule $\neg$ p, $\neg$ q, $\neg$ r, ... interpretiramo isto kao *relejne prekidače* (sl. 1). Ako su A i B iskazne formule koje su već interpretirane kao relejne prekidačke mreže —$\boxed{A}$— i —$\boxed{B}$—, tada se formule $A\vee B$, $A\wedge B$ interpretiraju kao mreže redom na slici

p: —p—

$\neg$ p: —$\neg$p—

A $\vee$ B:

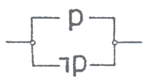


A $\wedge$ B:

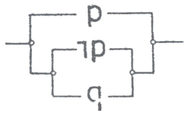
Ako se na istoj shemi pojavi više prekidača koji odgovaraju istom iskaznom slovu, onda se podrazumeva da su oni istovremeno ili svi uključeni ili svi isključeni. Slično važi i za prekidače koji odgovaraju negaciji istog iskaznog slova. Osim toga, ako se pojavi prekidač koji odgovara nekom iskaznom slovu i prekidač koji odgovara negaciji tog istog slova, tada se podrazumeva da je jedan od njih uključen ako i samo ako je drugi isključen.

Vidi se da se ovako uspostavlja 1—1 korespondencija između skupa svih iskaznih formula u kojima se *ne* pojavljuju simboli $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i u kojima se simbol negacije pojavljuje samo neposredno ispred iskaznih slova i skupa svih dvopolno serijsko-paralelnih prekidačkih mreža, sastavljenih isključivo od tzv. normalno isključenih i normalno uključenih relejnih prekidača.

Očigledno je da formuli navedenog tipa, koja je uz to i tautologija, odgovara dvopolna serijsko-paralelna mreža, između čijih krajeva uvek može da teče struja. Na primer, tautologiji $p \vee \neg p$ odgovara mreža na slici

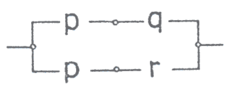


a tautologiji $p \vee (\neg p \vee q)$ mreža na slici



Ako su A i B formule navedenog tipa (tj. formule u kojima se ne pojavljuju simboli $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ i u kojima se simbol negacije pojavljuje samo neposredno ispred iskazanih slova), i ako je formula $A \Leftrightarrow B$ tautologija, tada *dvopolne serijsko-paralelne prekidačke mreže koje odgovaraju formulama A i B jesu ekvivalentne*, tj. pri istom položaju učestvujućih osnovnih prekidača (onih koji odgovaraju iskazanim slovima) obe mreže istovremeno ili propuštaju struju ili je ne propuštaju.

Na primer, mreže



jesu ekvivalentne, jer je formula $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ tautologija.

Inače, *ako su A i B proizvoljne iskazne formule i ako je formula $A \Leftrightarrow B$ tautologija, onda za A i B kažemo da su* (SEMANTIČKI) EKVIVALENTNE.

Navodimo spisak nekih važnijih tautologija sa njihovim imenima:

$p \Rightarrow p$	(*Zakon refleksivnosti za implikaciju*)
$p \lor \neg p$	(*Zakon isključenja trećeg*)
$\neg (p \land \neg p)$	(*Zakon neprotivrečnosti*)
$\neg\neg p \Rightarrow p$	(*Zakon dvojne negacije*)
$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$	(Peirceo*v zakon*)
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(*Zakon tranzitivnosti za implikaciju*)
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	(*Zakon kontrapozicije*)
$((p \Leftrightarrow q) \land (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$	(*Zakon tranzitivnosti ekvivalencije*)
$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	(*Zakon negacije premise*)
$p \lor p \Leftrightarrow p$, $p \land p \Leftrightarrow p$	(*Zakoni idempotencije za* $\lor$ *i* $\land$)
$p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$, $p \land q \Leftrightarrow q \land p$	(*Zakoni komutativnosti za* $\lor$ *i* $\land$)
$p \lor (q \lor r) \Leftrightarrow (p \lor q) \lor r$, $p \land (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \land r$	(*Zakoni asocijativnosti za* $\lor$ *i* $\land$)
$p \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$, $p \land (p \lor q) \Leftrightarrow p$	(*Zakon apsorpcije* $\lor$ *prema* $\land$, *odnosno* $\land$ *prema* $\lor$)
$p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$, $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$	(*Zakon distributivnosti* $\lor$ *prema* $\land$, *odnosno* $\land$ *prema* $\lor$)
$\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$, $\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$	(De Morgano*vi zakoni*)

Na primeru formule $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ pokazaćemo jedan postupak za utvrđivanje da li je neka formula tautologija ili nije. U tom postupku se za datu formulu traže vrednosti njenih slova pri kojima formula ima vrednost $\perp$. Ako se dokaže da takve vrednosti *ne* postoje, onda je dokazano da je ta formula tautologija.

Formula $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ ima vrednost $\perp$ ako $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ima vrednost $\top$, a $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ima vrednost $\perp$. Ako $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ima vrednost $\perp$, onda $p \Rightarrow q$ ima vrednost $\top$, a $p \Rightarrow r$ ima vrednost $\perp$. Dakle, polazna formula ima vrednost $\perp$ ako:

1° $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ima vrednost $\top$,

2° $p \Rightarrow q$ ima vrednost $\top$,

3° $p \Rightarrow r$ ima vrednost $\perp$.

Iz 2° i 3° dobijamo da p ima vrednost $\top$, q ima vrednost $\top$, r ima vrednost $\perp$. Međutim, onda $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ne može imati vrednost $\top$, već $\perp$. Stoga ne postoje vrednosti za koje data formula ima vrednosti $\perp$. Odatle se zaključuje da je ona tautologija.

Iznećemo, ukratko, još jedan postupak za utvrđivanje da li je neka formula tautologija ili nije. On se sastoji iz više postupaka takvih da se u okviru svakog od njih za jednu formulu nalazi njoj ekvivalentna formula, dobijena zamenom jedne njene podformule A novom formulom B. Uz to je $A \Leftrightarrow B$ tautologija iz navedenog spiska. Cilj je da se dobije formula ekvivalentna sa polaznom koja je oblika $L \wedge M \wedge \ldots \wedge N$, gde su formule L, M, ..., N oblika $a \vee b \vee \ldots \vee c$. Ovde su a, b, ..., c iskazna slova ili njihove negacije.

Tada je polazna formula tautologija ako i samo ako su L, M, ..., N tautologije, a one su tautologije ako i samo ako bar sa jednim slovom sadrže i njegovu negaciju (na primer $p \vee q \vee \neg r \vee \neg p$ jeste tautologija, dok $p \vee \neg q \vee \neg r \vee p$ nije).

Postupak se izvodi ovim redom. Najpre, koristeći se tautologijom $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, od polazne formule prelazimo na ekvivalentnu koja ne sadrži $\Leftrightarrow$. Pomoću tautologije $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ prelazimo na novu, ekvivalentnu sa polaznom koja ne sadrži $\Rightarrow$. Primenom tautologije $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ i De Morganovih zakona možemo doći do nove formule, ekvivalentne polaznoj, u kojoj znak $\neg$ stoji samo uz slova. Višestrukom primenom distributivnog zakona $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ i asocijativnog zakona za $\wedge$, na kraju se dolazi do formule oblika $L \wedge M \wedge \ldots \wedge N$ koja je ekvivalentna polaznoj. Uz to su L, M, ..., N oblika $a \vee b \vee \ldots \vee c$, gde su a, b, ..., c neka od slova p, q, r, ... ili njihove negacije.

Ako je polazna formula $A \Leftrightarrow B$, gde su A i B formule bez $\Leftrightarrow$, onda je podesnije ne izbacivati znak $\Leftrightarrow$, već za svaku formulu A, B ponaosob naći ekvivalentnu formulu opisanog oblika $L \wedge M \wedge \ldots \wedge N$.

Za ilustraciju navodimo sledeće primere.

Primer 1. F je formula $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$. Korišćenjem tautologije $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$, gde su A i B neke formule, imamo

$$\models F \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\neg q \vee p))$$

$$\models F \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p),$$

pa je F tautologija, jer je $\neg p \vee \neg q \vee p$ tautologija.

Primer 2. F je formula $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$. Tada

$$\models F \Leftrightarrow (\neg \neg p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg q \vee p)$$

$$\models F \Leftrightarrow \neg (p \vee \neg q) \vee \neg q \vee p$$

$$\models F \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee \neg q \vee p$$

$$\models F \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee \neg q \vee p),$$

pa je F tautologija.

Primer 3. F je formula $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$. Označimo sa L i D redom levu i desnu stranu formule F (F je $L \Leftrightarrow D$). Kako je

$$\models D \Leftrightarrow ((p \vee p) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge (r \vee q)) \vee (q \wedge r)$$

$$\models D \Leftrightarrow (p \wedge (q \vee r)) \vee (q \wedge r)$$

$$\models D \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r \vee q) \wedge (q \vee r \vee r)$$

$$\models D \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r),$$

to je $\models D \Leftrightarrow L$, odnosno $\models L \Leftrightarrow D$, tj. formula F tautologija. Koristili smo i zakon apsorpcije $\models A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$, kao i zakone $\models A \wedge A \Leftrightarrow A$, $\models A \vee A \Leftrightarrow A$, gde su A i B neke formule.

Primer 4. Neka je F formula $(p \wedge q) \vee \neg (p \Rightarrow q)$. Tada je

$$\models F \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \neg (\neg p \vee q)$$

$$\models F \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$\models F \Leftrightarrow (p \vee p) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee \neg q)$$

$$\models F \Leftrightarrow p \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee \neg q),$$

pa formula F nije tautologija, jer sve formule p, $p \vee \neg q$, $p \vee q$, $q \vee \neg q$ nisu tautologije.

Formulu F nazivamo ISPRAVNA ako i samo ako:

1° formula F je oblika

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A), \quad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)),$$

ili

$$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A),$$

gde su A, B, C, neke formule; ili:

2° postoje formule A i A $\Rightarrow$ F koje su ispravne.

Tada važi sledeća značajna karakterizacija tautologija.

Formula F *je ispravna ako i samo ako je tautologija.*

U drugom delu, glava II, dokazujemo tzv. stav potpunosti koji je, u stvari, ekvivalentan sa navedenim tvrđenjem.

3. HIPOTEZE. POSLEDICE

Neka je $\mathcal{F}$ neki skup formula algebre ($\top$, $\perp$) i neka je F izvesna formula. Označimo sa *v* jednu vrednost svih iskaznih slova koja učestvuju u tim formulama (ta vrednost može biti i NIZ ako učestvujućih iskaznih slova nema konačno mnogo).

Definicija. *Formula* F *je* (SEMANTIČKA) POSLEDICA *formula skupa* $\mathcal{F}$ *ako je za svaku vrednost v svih učestvujućih slova u tim formulama ispunjen uslov:*

Ako za vrednost v svaka od formula iz skupa $\mathcal{F}$ *dobija vrednost* $\top$, *onda i formula* F *dobija vrednost* $\top$.

Pri tom formule skupa $\mathcal{F}$ zovemo HIPOTEZE. Neka $\mathcal{F} \models F$ bude oznaka za: formula F je (semantička) posledica formula skupa $\mathcal{F}$. U slučaju kada je $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ umesto $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models F$ pišemo i $F_1, F_2, \dots, F_n \models F$.

Primedba. Iz prethodne definicije proizlazi $\mathcal{F} \models F$ i u slučaju kada ne postoji nijedna vrednost *v* učestvujućih slova za koju su sve formule skupa $\mathcal{F}$ tačne.

Primeri 1° $p, p \Rightarrow q \models q$. Slova p i q su sva slova koja učestvuju u formulama p, $p \Rightarrow q$. Vrednosti tih slova su ($\top$, $\top$), ($\top$, $\perp$), ($\perp$, $\top$), ($\perp$, $\perp$). Formula p dobija vrednost $\top$ za vrednosti ($\top$, $\top$) i ($\top$, $\perp$), dok formula $p \Rightarrow q$ dobija vrednost $\top$ za sledeće vrednosti: ($\top$, $\top$), ($\perp$, $\top$), ($\perp$, $\perp$). Obe formule dobijaju vrednost $\top$ jedino za vrednost ($\top$, $\top$). Onda i formula q dobija vrednost $\top$, pa zaista $p, p \Rightarrow q \models q$.

2° $p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \models r$. 3° $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \models q \Rightarrow r$.

4° $p, p \wedge q \models q$. 5° $p \models p \vee q$. 6° $p, p \Leftrightarrow q \models q$.

Važe sledeći stavovi:

Stav 1. $F_1, F_2, \dots, F_n \models F \longleftrightarrow \; \models (F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$.

Dokaz. Neka je $F_1, F_2, \ldots, F_n \models F$. Tada za vrednosti učestvujućih slova za koje svaka od formula $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dobija vrednost $\top$, formula F dobija vrednost $\top$, pa prema tome i formula $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$ dobija vrednost $\top$. Međutim, za one vrednosti slova za koje ne dobijaju sve formule $F_1, F_2, \ldots, F_n$ vrednost $\top$, formula $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$ dobija vrednost $\perp$, pa prema tome formula $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$ opet dobija vrednost $\top$. Dakle, $\models (F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$.

Obratno, neka je $\models (F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$. Tada za sve one vrednosti slova za koje svaka od formula $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dobija vrednost $\top$, formula $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$ dobija vrednost $\top$, pa prema tome i formula F dobija vrednost $\top$, što znači da je $F_1, F_2, \ldots, F_n \models F$. ∎

Stav 2. *Formula*

$$1 \qquad ((p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (p_n \Rightarrow p) \ldots)))$$

jeste tautologija.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom. Za $n = 1$, formula glasi:

$$(p_1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p)$$

i ona je tautologija. Pretpostavimo da je formula

$$(2) \qquad ((p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{n-1}) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow p) \ldots)))$$

tautologija. Neka je v bilo koja vrednost slova $p_1, p_2, \ldots, p_n, p$. Postoje dve mogućnosti:

1° Slovo p_n ima vrednost $\perp$. Tada formula (1) ima vrednost $\top$.

2° Slovo p_n ima vrednost $\top$. Tada formula (1) ima istu vrednost kao formula (2), odnosno $\top$ (očigledno). Dakle, pretpostavka da je (2) tautologija povlači da je (1) tautologija. ∎

Posledica prethodnih stavova je sledeći stav.

Stav 3.

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow \models (F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (F_n \Rightarrow F) \ldots))).$$

Iz poslednjeg stava neposredno proizlazi sledeći stav.

Stav 4.

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow F_1, F_2, \ldots, F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F.$$

Primer 1. Polazeći od

$$p,\ p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \models r,$$

na osnovu dokazanih stavova imamo sledeće zaključke:

1° $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \models p \Rightarrow r,$

odakle dobijamo da su sledeće formule tautologije:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$
$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$
$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

2° $p,\ q \Rightarrow r \models (p \Rightarrow q) \Rightarrow r,$

odakle dobijamo sledeće tautologije:

$(p \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r),\ p \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)).$

Primer 2. Navodimo nekoliko primera bez dokaza:

$p \Rightarrow q,\ \neg q \models \neg p;\ \models (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p);\ p \Rightarrow q,\ p \Rightarrow \neg q \models \neg p$

$p \Rightarrow q,\ p \wedge r \models q \wedge r;\ \models (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge r) \Rightarrow q \wedge r$

$\models (p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q);\ p \Rightarrow q,\ p \Rightarrow r \models p \Rightarrow q \wedge r;$

$p \Rightarrow r,\ q \Rightarrow r,\ p \vee q \models r;\ \models ((p \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow r)$

$\models (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r);\ \neg p \Rightarrow q,\ \neg q \models p.$[1]

4. OPERACIJE SKUPA $\{\top, \bot\}$

Razumevanje onoga što izlažemo u ovoj tački pretpostavlja poznavanje materijala iz glave II, tačka 1.

U algebri $(\top, \bot)$ posmatrali smo operacije $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$. To su neke od binarnih i unarnih operacija skupa $A = \{\top, \bot\}$. Taj skup ima četiri operacije dužine 1. To su:

$$\begin{pmatrix}\top & \bot\\ \top & \top\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\top & \bot\\ \top & \bot\end{pmatrix},\ \neg = \begin{pmatrix}\top & \bot\\ \bot & \top\end{pmatrix}^{2},\ \begin{pmatrix}\top & \bot\\ \bot & \bot\end{pmatrix}.$$

---

[1] Dokazi pomoću *reductio od absurdum* se, u stvari, zasnivaju na tome.

[2] U prvom delu simbol = upotrebljavamo isključivo u sledećem smislu: A = B znači da su A i B oznake za isti objekat. U drugom delu isti simbol upotrebljavamo i kao oznaku za jedno relacijsko slovo.

Isti skup ima šesnaest operacija dužine 2. Za te operacije navodimo odgovarajuće tablice i za neke od njih uobičajene oznake:

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\downarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\uparrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$

Od navedenih operacija, $\downarrow$ i $\uparrow$ redom se zovu Łukasiewiczeva i Shefferova. Između tih operacija i operacija $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ postoje sledeće veze, koje se neposredno dokazuju:

(I) $$x \uparrow y = \neg(x \wedge y), \quad x \downarrow y = \neg(x \vee y)$$

(II) $$\neg x = x \uparrow x, \quad x \vee y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y), \quad x \wedge y = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$$

(III) $$\neg x = x \downarrow x, \quad x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y), \quad x \wedge y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y),$$

gde su x, y elementi skupa $\{\top, \bot\}$.

Neka je F formula algebre $(\top, \bot)$ u kojoj nema simbola $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i čija su iskazna slova označena sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Takve su, na primer, formule

$$x_1 \vee x_2, \quad x_1 \wedge (\neg x_2 \vee x_3), \ \ldots$$

Interpretirajući $\vee$, $\wedge$, $\neg$ kao odgovarajuće operacije algebre $(\top, \bot)$, a slova $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ kao elemente skupa $\{\top, \bot\}$, svakoj formuli može da se pridruži jedna operacija skupa $\{\top, \bot\}$, pri čemu je dužina operacije jednaka broju različitih slova x_i koja ulaze u formulu. Ako formuli F odgovara operacija f, onda F zovemo FORMULA OPERACIJE f, a za f kažemo da je OPERACIJA FORMULE F.

Na primer, formuli $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge \neg x_3$ odgovara operacija opisana tablicom

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Ista operacija može imati više formula.

Na primer, formuli $((x_1 \vee x_2) \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_1)$ odgovara takođe navedena operacija.

Postavlja se obrnut problem — da li za svaku operaciju f skupa $\{\top, \perp\}$ postoji njena formula F, izgrađena sa x_i, $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Odgovor je potvrdan, kao što ćemo videti iz onoga što sledi.

Neka je najpre, f operacija dužine 1, odnosno

$$f = \begin{pmatrix} \top & \perp \\ f(\top) & f(\perp) \end{pmatrix}.$$

Očigledno, važi jednakost

$$f(x) = (f(\top) \wedge x) \vee (f(\perp) \wedge \neg x)$$

za $x = \top$ i $x = \perp$, ma kakva bila operacija f skupa A.

Ta jednakost pruža mogućnost da se za operacije dužine 1 formira odgovarajuća formula. Na primer, za $f = \begin{pmatrix} \top & \perp \\ \top & \top \end{pmatrix}$ formula je $x_1 \vee \neg x_1$.

Neka je f operacija dužine 2. Tada, ako $x, y \in \{\top, \perp\}$, imamo slično kao u prethodnom slučaju:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (f(x, \top) \wedge y) \vee (f(x, \perp) \wedge \neg y) \\ &= (((f(\top, \top) \wedge x) \vee (f(\perp, \top) \wedge \neg x)) \wedge y) \\ &\quad \vee (((f(\top, \perp) \wedge x) \vee (f(\perp, \perp) \wedge \neg x)) \wedge \neg y) \end{aligned}$$

$$=(f(\top,\top)\wedge x\wedge y)\vee(f(\top,\perp)\wedge x\wedge\neg y)$$
$$\vee(f(\perp,\top)\wedge\neg x\wedge y)\vee(f(\perp,\perp)\wedge\neg x\wedge\neg y)$$

Dobijena jednakost omogućava da se za svaku operaciju dužine 2 obrazuje odgovarajuća formula sa simbolima x_1, x_2, $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Na primer, za operaciju f

f	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

formula je $(x_1\wedge x_2)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2)$.

Radi lakšeg opisivanja opšteg slučaja neka dogovorno budu $x_i^\top$, $x_i^\perp$ redom oznake za formule x_i, i $\neg x_i$ i sa tim u vezi

$$\top^\top=\top,\ \top^\perp=\perp,\ \perp^\top=\perp,\ \perp^\perp=\top.$$

Ako je f *proizvoljna operacija dužine n skupa A, onda za sve* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *iz toga skupa važi jednakost*

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n)=\bigvee(f(e_1, e_2, \dots, e_n)\wedge y_1^{e_1}\wedge y_2^{e_2}\wedge\dots\wedge y_n^{e_n})$$
$$(e_1, e_2, \dots, e_n\in A),$$

gde se na desnoj strani nalazi disjunkcija od 2^n elemenata.

Dokaz se neposredno izvodi koristeći jednakosti

$$\perp^\top=\perp,\ \top^\perp=\perp,\ \perp^\top=\perp,\ \perp^\perp=\top,$$
$$\top\wedge\top=\top,\ \perp\wedge\perp=\perp,\ \dots.$$

Dobijena jednakost omogućava obrazovanje jedne specijalne formule operacije f. Formula je disjunkcija podformula oblika

$$x_1^{e_1}\wedge x_2^{e_2}\wedge\dots\wedge x_n^{e_n}$$

i uz to u disjunkciju ulazi samo ona podformula za koju je ispunjen uslov $f(e_1, e_2, \dots, e_n)=\top$.

Ako, označimo sa E skup svih $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ za koje je $f(e_1, e_2, \dots, e_n)=\top$, onda operaciji f odgovara sledeća formula:

(1) $$\bigvee(x_1^{e_1}\wedge x_2^{e_2}\wedge\dots\wedge x_n^{e_n})$$
$$(e_1, e_2, \dots, e_n)\in E$$

Primer. Operaciji f za koju

x	y	z	f(x, y, z)
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

odgovara prema opisanom postupku formula

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3).$$

Formula (1) zove se KANONSKA DISJUNKTIVNA NORMALNA FORMA operacije f. Postoji i slična, tzv. KANONSKA KONJUNKTIVNA NORMALNA FORMA.

Kanonsku disjunktivnu normalnu formu ima svaka operacija, osim one kod koje je $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \bot$ za sve $e_i \in A$.

Za ovu operaciju kao formulu možemo uzeti, na primer

$$(x_1 \wedge \neg x_1) \vee (x_2 \wedge \neg x_2) \vee \ldots \vee (x_n \wedge \neg x_n).$$

Na taj način, *svaka operacija skupa A ima bar jednu svoju formulu sa simbolima* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \vee, \wedge, \neg$. Drukčije se kaže da se sve operacije skupa A mogu GENERISATI pomoću operacija $\vee, \wedge, \neg$.

I između ove tri operacije postoje razne veze. Na primer,

(IV) $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$, (V) $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$ $(x, y \in A)$,

pa se sve operacije skupa A mogu opisati formulama koje sadrže jedino $\wedge$ i $\neg$, odnosno sadrže jedino $\vee$ i $\neg$.

Pošto takođe važe i jednakosti

(VI) $$x \vee y = \neg x \Rightarrow y$$
$$x \wedge y = \neg(x \Rightarrow \neg y) \qquad (x, y \in A),$$

sve operacije skupa A mogu se opisati i formulama koje sadrže $\Rightarrow, \neg$, ali ne i neke od ostalih znakova operacija.

Najzad jednakosti, (II) i (III) *pokazuju da se sve operacije skupa A mogu opisati formulama u kojima od simbola operacija učestvuju jedino* $\uparrow$ (*ili* $\downarrow$).

Detaljnije o operacijama skupa A videti u knjizi V. Devidé *Matematička logika*.

II. KVANTIFIKATORSKI RAČUN PRVOG REDA

(formule i glavna interpretacija)

U ovom računu značajnu ulogu imaju tzv. KVANTIFIKATORI. U običnom jeziku se, inače, kao kvantifikatori uzimaju zamenice: „*svaki*“, „*bilo koji*“, „*ma koji*“, „*neki*“, ... Često se simboli $\forall$, odnosno $\exists$ upotrebljavaju kao zamenice „*svaki*“ („*bilo koji*“, „*ma koji*“) odnosno „*neki*“. Usvajamo da je $\forall$ UNIVERZALNI KVANTIFIKATOR, dok je $\exists$ EGZISTENCIJALNI KVANTIFIKATOR. Inače se $\exists$ čita i „*postoji*“. Kvantifikatori $\forall$, $\exists$ učestvuju u nekim formulama računa koji ćemo posmatrati, i to uvek u obliku $(\forall u)$, $(\exists u)$, gde je slovo u oznaka za tzv. PROMENLJIVU.

Navodimo primere formula u kojima se javljaju kvantifikatori. Promenljive x, y, . . . interpretiramo na skupu realnih brojeva, a ostale simbole interpretiramo na uobičajen način.

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (x+y=2),$$

$$(\exists x)\ (x^2+x-6=0), \quad (\exists x)\ (\exists y)\ (x=y^2),$$

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (x=y \Rightarrow x^2=y^2).$$

Tim formulama odgovaraju iskazi o realnim brojevima. U ovom slučaju svi ti iskazi su tačni.

Navodimo i primere tzv. ISKAZNIH FUNKCIJA (RELACIJA). Ako se u formuli

$$x^2=1 \Rightarrow x=1$$

znaci interpretiraju na uobičajen način u odnosu na skup realnih brojeva, onda toj formuli odgovara iskazna funkcija, u oznaci J, za koju su, na primer, $J(1)$, $J(2)$, $J(\sqrt{2})$, $J(3)$ tačni iskazi, dok je jedino $J(-1)$ netačan iskaz. Slično, u odnosu na skup prirodnih brojeva i uz uobičajeno interpretiranje formuli

$$x<y \Rightarrow (\exists z)\ (y=zx)$$

odgovara iskazna funkcija DUŽINE 2, u oznaci dogovorno opet J, za koji su, na primer, $J(1, 2)$, $J(6, 5)$, $J(4, 8)$, $J(1, 1)$ tačni iskazi, dok su $J(2, 3)$, $J(2, 5)$ netačni iskazi.

U ovoj glavi biće izložen samo jedan deo kvantifikatorskog računa prvog reda. U stvari, dajemo definicije: formula, glavne interpretacije, valjanih formula, kao i neke osnovne stavove o valjanim formulama, a ostalo ćemo izložiti u drugom delu knjige.

U ovoj glavi iznećemo i osnovno o operacijama i relacijama. Relaciju ne definišemo kao skup uređenih n-torki, već kao određeno preslikavanje u skup $\{\top, \bot\}$, odnosno kao iskaznu funkciju. To činimo u cilju pojednostavljenja onoga što sledi u vezi sa formulama. Reč PREDIKAT upotrebljavamo kao sinonim za relaciju. Slično, kvantifikatorski račun zovemo i PREDIKATSKI RAČUN.

1. PRESLIKAVANJA. OPERACIJE

Opisno rečeno, preslikavanje skupa A u skup B je svaki postupak, dogovor, pravilo kojim se svakom elementu x skupa A dodeljuje tačno po jedan element y skupa B.

Na primer, ako je $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{8, 9, 10\}$ onda pravilo dato tablicom

x	1	2	3	4
y	10	8	8	9

određuje jedno preslikavanje skupa A u skup B. Očigledno da sledeći skup uređenih parova:

$$\{(1, 10), (2, 8), (3, 8), (4, 9)\}$$

(obrazovan kao skup uređenih parova (x, y)) može da posluži za opisivanje navedenog preslikavanja.

Uopšte svako preslikavanje možemo jednoznačno odrediti pomoću skupa uređenih parova (x, y), gde je $x \in A$ i gde je y odgovarajući element iz B.

U stvari, preslikavanje uvodimo pomoću pojmova skup i uređen par.

Definicija 1. DIREKTAN PROIZVOD *redom skupova* A *i* B, *u oznaci* $A \times B$, *jeste skup svih uređenih parova* (a, b), *gde je* $a \in A$, $b \in B$. *Ako je* $A = B$ *onda umesto* $A \times B$ *pišemo i* A^2.

Definicija 2. PRESLIKAVANJE SKUPA A U SKUP B, *u oznaci* $f: A \to B$, *jeste podskup* f *skupa* $A \times B$, *koji ima sledeća svojstva:*

1° *Skup svih prvih komponenti elemenata skupa* f, *tzv.* DOMEN *za* f, *u oznaci* $\mathcal{D}(f)$, *jeste skup* A.

2° *Ako* $(x, y) \in f$, $(x, z) \in f$ *onda je* $y = z$.

Primeri 1) Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{8, 9, 10\}$. Tada $\{(1, 8), (2, 9)\}$ nije preslikavanje A u B, jer nije ispunjen uslov 1°. $\{(1, 8), (2, 9), (3, 8)\ (4, 10)\ (3, 10)\}$ nije preslikavanje A u B, jer nije zadovoljen uslov 2°. Međutim, $\{(1, 10), (2, 8), (3, 8), (4, 9)\}$ jeste preslikavanje skupa A u skup B.

2) Neka je $A = B = R$ skup svih realnih brojeva. Onda su

$$\{(x, x^2) \mid x \in R\}, \ \{(x, \sin x) \mid x \in R\}$$

primeri preslikavanja R u R.

Ako je $f: A \to B$ i ako je $(x, y) \in f$, onda x nazivamo ORIGINAL, dok y zovemo SLIKA tog originala, u oznaci $y = f(x)$.

Ako je $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$ neko preslikavanje, uobičajeno je da se piše i

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_n \\ b_1 & b_2 \cdots b_n \end{pmatrix}$$

Definicija 3. *Preslikavanje* $f: A \to B$ *je* 1—1 PRESLIKAVANJE *ako je ispunjen uslov*

$$f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2.$$

za sve elemente x_1, x_2 *skupa* A.

Definicija 4. *Preslikavanje* $f: A \to B$ *je* PRESLIKAVANJE SKUPA A NA SKUP B *ako je svaki element skupa* B *slika bar jednog elementa skupa* A.

Definicija 5. DIREKTAN PROIZVOD *redom skupova* $A_1, A_2, \dots, A_n$, *u oznaci* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *jeste skup svih uređenih n-torki*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ gde } a_1 \in A_1, \ a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n;$$

odnosno:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\ a_1 \in A_1,$$
$$a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Ako je $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, *onda* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *označavamo i* A^n.

Definicija 6. OPERACIJA DUŽINE n SKUPA A *je preslikavanje skupa* A^n *u skup* A.

Primeri 1. $\{(x, x^2) \mid x \in R\}$ i $\{(x, e^x) \mid x \in R\}$ jesu operacije dužine 1 skupa R realnih brojeva. To su „KVADRIRANJE" i „EKSPONENCIRANJE". Ove operacije mogli smo opisati i pomoću jednakosti $y = x^2$, $y = e^x$, kao što se, inače, često i čini.

2. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i neka je $*$ sledeći skup:

$$* = \{((1, 1), 2), ((1, 2), 3), ((1, 3), 3), ((2, 1), 1), ((2, 2), 2),$$
$$((2, 3), 1), ((3, 1), 3), ((3, 2), 2), ((3, 3), 1)\}.$$

Ovaj skup je preslikavanje skupa A^2 u skup A, odnosno $*$ je operacija dužine 2 (BINARNA operacija) skupa A. U slučaju binarne operacije bilo kog skupa A uobičajeno je da se umesto $f(x_1, x_2) = y$ (original (x_1, x_2), slika y; x_1, x_2, y jesu elementi iz A) piše $x_1 f x_2 = y$. U ovom primeru imamo, prema tome:

$$1 * 1 = 2, \quad 1 * 2 = 3, \quad 1 * 3 = 3,$$
$$2 * 1 = 1, \quad 2 * 2 = 2, \quad 2 * 3 = 1,$$
$$3 * 1 = 3, \quad 3 * 2 = 2, \quad 3 * 3 = 1,$$

što se još preglednije prikazuje pomoću tzv. CAYLEYEVE TABLICE te operacije:

*	1	2	3
1	2	3	3
2	1	2	1
3	3	2	1

Slično se ma kojoj binarnoj operaciji na nekom konačnom skupu, dodeljuje izvesna Cayleyeva tablica, čiji jedan karakterističan detalj navodimo

f		y	
x		xfy	

3. Skup

$$\{((x_1, x_2, x_3), x_1^2 - x_2 + x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

je operacija dužine 3 skupa R realnih brojeva. Možemo reći da nju određuje obrazac

$$y = x_1^2 - x_2 + x_3.$$

Na kraju, ističemo da smo pojmove preslikavanje i operacija definisali polazeći od pojmova skup i uređen par. Interesantno je da se uređen par može definisati pomoću pojma skup. Navodimo takvu definiciju koju su dali N. Wiener i C. Kuratowski:

Definicija 7. UREĐEN PAR REDOM ELEMENATA x i y, *u oznaci* (x, y), *jeste* $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. *U uređenom paru* (x, y) *element* x *zovemo* PRVA KOMPONENTA *a* y — DRUGA KOMPONENTA.

Mogućnost ovakvog definisanja uređenog para otkriva sledeće svojstvo koje ima $\{\{x\}, \{x, y\}\}$:

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{\{z\}, \{z, u\}\} \longleftrightarrow (x=z \text{ i } y=u),$$

što se inače neposredno dokazuje.

Uređenu trojku redom elemenata x, y, z definišemo kao ((x, y), z), odnosno uopšte, uređena n-torka redom elemenata

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \text{ je } \quad ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n) \qquad (n \geqslant 3).$$

Uvodimo još $(x_1)=x_1$.

Definicija 8. REČ *čija su slova redom* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *u oznaci* $a_1a_2 \ldots a_n$, (*gde su* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *elementi izvesnog skupa*) *jeste preslikavanje* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$. *Broj* n *zovemo* DUŽINA *reči* $a_1a_2 \ldots a_n$. *Umesto reč kažemo i* KONAČAN NIZ *ili* NISKA.

Definicija 9. *Za skup kažemo da je* PREBROJIV *ukoliko postoji bar jedno* 1—1 *preslikavanje skupa prirodnih brojeva* $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *na taj skup.*

Primer. Ako je A konačan ili prebrojiv skup, onda je skup svih reči čija su slova elementi skupa A a dužine su im 1, 2, 3, ... prebrojiv. Tako, skup svih iskaznih formula je prebrojiv.

2. TERMI. OPERACIJA TERMA

Za terme najpre se uzimaju određeni unapred odabrani simboli (prebrojivo mnogo), tzv. PROMENLJIVE. Za promenljive uzećemo dogovorno

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \ldots$$

Osim toga, termima se smatraju i tzv. KONSTANTE, tačno određeni simboli, kojih ima takođe prebrojivo mnogo. Dogovaramo se da su

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

konstante.

Radi definisanja opšteg pojma terma, potrebno je i prebrojivo mnogo tzv. OPERACIJSKIH slova, od kojih je svakom dodeljen tačno jedan prirodan broj, tzv. DUŽINA slova. Od mogućih izbora opredeljujemo se za sledeći:

OPERACIJSKA SLOVA su simboli f_i^j $(i, j$ su $1, 2, 3, \ldots)$ kod kojih gornji indeks označava DUŽINU slova. Umesto operacijsko slovo kažemo i FUNKCIJSKO slovo.

Uvodimo definiciju terma.

Definicija 1° *Promenljive i konstante su* TERMI.

2° *Ako su* $t_1, t_2, \ldots, t_n$. TERMI *i ako je* f *operacijsko slovo dužine* n, *onda je reč* $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ TERM.

3° TERMI *se mogu obrazovati samo posle končano mnogo primena* 1° *i* 2° *ove definicije.*

Primer. Termi su, na primer:

$$x_1, a_1, f_1^1(x), f_1^2(x, y), f_1^2(f_1^2(x, a_5), f_1^1(a_1)).$$

Ako se dogovorimo da umesto $f_1^1(t_1)$ i $f_1^2(t_1, t_2)$ pišemo redom $\sin t_1$, $t_1 + t_2$, pomenuti termi se pišu ovako:

$$x_1, a_1, \sin x, x + y, (x + a_5) + \sin a_1.$$

Prema navedenoj rekurzivnoj definiciji, termi su određene REČI čija su slova: konstante, promenljive, operacijska slova, zagrade (i), kao i zarez , . Međutim, svaka reč sa tim slovima ne mora da bude term. Na primer, nisu termi sledeće reči:

$$(f_1^1; \quad f_1^1(x, y); \quad f_1^2 \cdot \quad f_1^2(x, y, z); \quad f_1^2(x, f_1^1(y, z).$$

Prelazimo na definiciju OPERACIJE TERMA u odnosu na domen interpretacije D.

DOMEN INTERPRETACIJE može biti proizvoljan neprazan skup D. Tada, INTERPRETACIJA KONSTANTE a je određen element a iz D.[1] Slično, INTERPRETACIJA PROMENLJIVE u je određen element u iz skupa D. Reći ćemo i da su a, u takođe VREDNOSTI redom za a, u.

---

[1] Treba imati u vidu da su simboli i njihove interpretacije različito označeni.

INTERPRETACIJA OPERACIJSKOG SLOVA f dužine n je bilo koja operacija f dužine n skupa D.

Neka je t neki term i neka su u odnosu na skup D određene interpretacije njegovih konstanti i operacijskih slova. Neka su $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sve različite promenljive koje učestvuju u tom termu. Tada svakoj vrednosti $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n$ tih promenljivih (u_i je vrednost, odnosno interpretacija za u_i) odgovara određeni element skupa D, tzv. VREDNOST terma u oznaci $t(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n)$.

Vrednost terma može se rekurzivno definisati na sledeći način:

1° Vrednosti terma x_i, odnosno a_j, jesu njihove interpretacije $\mathrm{x}_i, \mathrm{a}_j$ $(i, j \geqslant 1)$.

2° Ako su $\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots, \mathrm{t}_n$ vrednosti redom terma $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i ako je f interpretacija operacijskog slova f dužine n, onda je $\mathrm{f}(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots, \mathrm{t}_n)$ $(\in \mathrm{D})$ vrednost terma $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Na taj način, svakoj vrednosti $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n$ promenljivih odgovara jedna vrednost $t(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n)$ terma. Tako je određeno jedno preslikavanje D^n u D, za koje je original $(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n)$. a slika $t(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n)$. To preslikavanje zovemo OPERACIJA TERMA U ODNOSU NA DOMEN INTERPRETACIJE D.

Primetimo da je n dužina tog preslikavanja, odnosno broj različitih promenljivih koje učestvuju u termu t.

Primeri 1. Neka je t term $f_1^2\left(f_1^1(x), a_1\right)$.

Uzmimo, najpre, za domen interpretacije skup realnih brojeva, a_1 interpretirajmo kao 3, f_1^1 kao operaciju f_1^1, za koju $\mathrm{f}_1^1(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$, f_1^2 interpretirajmo kao sabiranje. Tada termu t odgovara operacija, u oznaci f, za koju je

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + 3.$$

U slučaju istog terma neka domen bude neki skup D koji ima sledeća svojstva:

(1) $\varnothing$ je element skupa D.

(2) Ako x, y $\in$ D, onda $\mathrm{x} \cup \mathrm{y}$, $\{\mathrm{x}\} \in \mathrm{D}$.

Ako a_1 interpretiramo kao $\{\varnothing\}$, f_1^1 kao operaciju za koju je $\mathrm{f}_1^1(\mathrm{x}) = \{\mathrm{x}\}$, f_1^2 kao skupovnu operaciju $\cup$, onda termu t odgovara operacija, u oznaci f. za koju

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \{\mathrm{x}\} \cup \{\varnothing\}, \text{ tj. } \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \{\mathrm{x}, \varnothing\} \quad (\mathrm{x} \in \mathrm{D}).$$

2. Neka je t term $f_1^2\left(f_1^2(x, y), y\right)$ i neka je domen interpretacije skup realnih brojeva. Ako se f_1^2 interpretira kao operacija f za koju je $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x} + \mathrm{xy}$, onda termu odgovara operacija g dužine 2 istog skupa, za koju je $\mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x} + 2\mathrm{xy} + \mathrm{xy}^2$ (x, y su realni brojevi).

3. RELACIJE I OPERACIJE SA NJIMA

Opisno rečeno, u skupu A definisana je relacija α dužine 1 ako za svaki element x postoji tačno jedna od dve mogućnosti:

1° x *jeste u relaciji* α,

2° x *nije u relaciji* α.

Ako, na primer, u slučaju skupa N prirodnih brojeva kažemo: Svaki od brojeva 0, 2, 4, 6, 8, . . . , 2n, . . . , jeste u relaciji α, dok nijedan od brojeva 1, 3, 5, . . . , 2n+1, . . . nije u relaciji α — onda smo u tom skupu definisali jednu relaciju dužine 1 (koju smo na taj način nazvali relacija α). Mogli bismo da je zovemo „*biti paran broj*". U istom skupu dogovorom: Svaki od brojeva 0, 1, 4, 9, 16, . . . , n^2, . . . jeste u relaciji α, a ostali nisu definisana je takođe jedna relacija dužine 1. Podesno je da se zove „*biti potpun kvadrat*".

Slično u skupu A definisana je relacija α dužine 2 ako za svaki uređen par (x, y) postoji tačno jedna od mogućnosti:

1° x, y *tim redom jesu u relaciji* α,

2° x, y *tim redom nisu u relaciji* α.

Ako je, na primer, A skup svih realnih brojeva, onda svaki od dogovora:

1° x, y *tim redom jesu u relaciji* α *ako i samo ako* $x=y$,

2° x, y *tim redom jesu u relaciji* α *ako i samo ako* $x<y$,

3° x, y *tim redom jesu u relaciji* α *ako i samo ako* $x^2+y<8$,

definiše po jednu relaciju dužine 2 u tom skupu. Oznake za prve dve bile bi redom: $=$, $<$.

Nov primer relacije dužine 2, odnosno BINARNE relacije, je $\subseteq$ (*skupovna inkluzija*) u skupu nekih skupova, čija je, inače, definicija:

$$x \subseteq y \text{ ako i samo ako je } x \text{ podskup od } y.$$

U primerima relacije dužine 1 karakteristično je da se svakom elementu dodeljuje „*jeste u relaciji*" ili „*nije u relaciji*". Slično, u slučajevima relacija dužine 2 svakom uređenom paru (x, y) dodeljuje se „*jesu u relaciji*" ili „*nisu u relaciji*". To je, u stvari, najznačajniji deo sadržaja intuitivnog pojma relacije, pa se stoga usvaja sledeća definicija.

Definicija 1. RELACIJA DUŽINE n SKUPA D *je preslikavanje skupa* D^n *u skup* $\{\top, \bot\}$, *u oznaci* α: $D^n \to \{\top, \bot\}$, *gde smo sa* α *označili relaciju.*

Ako je $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \top$, *onda kažemo:*

„$x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tim redom, jesu u relaciji* α“,

a ako je $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bot$, *onda kažemo:*

„$x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tim redom, nisu u relaciji* α“.

U slučaju $n=1$, *umesto „tim redom jesu“, „tim redom nisu“ kažemo redom „jeste“, „nije“, a u slučaju* $n=2$ *kažemo i:* x_1 *u relaciji* α *sa* x_2.

Kao relacije uzimamo i simbole $\top$, $\bot$. *To su relacije* DUŽINE 0 *(proizvoljnog skupa* D*).*

Za slučaj binarne relacije umesto $\alpha(x, y) = \top$ pišemo $x \alpha y$. Među binarnim relacijama značajnu ulogu ima tzv. RELACIJA EKVIVALENCIJE.

Definicija 2. *Binarna relacija skupa* D, *u oznaci* $\sim$, *jeste* RELACIJA EKVIVALENCIJE *ako ispunjava sledeće uslove:*

$$1^\circ\ x \sim x, \quad 2^\circ\ x \sim y \to y \sim x, \quad 3^\circ\ (x \sim y \ \textit{i}\ y \sim z) \to x \sim z,$$

za sve x, y, z *iz* D.

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa D i neka je x jedan element tog skupa. Označimo sa $\bar{x}$ skup svih elemenata y skupa D takvih da je $x \sim y$. Skup $\bar{x}$ zovemo KLASA EKVIVALENCIJE elementa x.

Važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 1. *Ako su* x *i* y *bilo koji elementi* D, *onda*

$$x \sim y \longleftrightarrow \bar{x} = \bar{y}.$$

Dokaz. Neka je $x \sim y$. Ako je $z \in \bar{x}$, onda je $x \sim z$, pa iz $x \sim y$, $x \sim z$ prema 2°, 3° dobijamo $z \in \bar{y}$. Slično iz $z \in \bar{y}$ dobijamo $z \in \bar{x}$. I tako $\bar{x} = \bar{y}$.

Neka je $\bar{x} = \bar{y}$. Prema 1° imamo $y \in \bar{y}$, odakle $y \in \bar{x}$, odnosno $x \sim y$.

Dokazanim tvrđenjem uspostavlja se veza između proizvoljne relacije ekvivalencije i jednakosti. Sledeće tvrđenje još više pokazuje sličnost proizvoljne relacije ekvivalencije i jednakosti.

Tvrđenje 2. *Za dve klase ekvivalencije* $\bar{x}$ *i* $\bar{y}$ *postoji tačno jedna od dve mogućnosti:*

(I) $\bar{x} = \bar{y}$, (II) $\bar{x}$ i $\bar{y}$ *su bez zajedničkih elemenata.*

Dokaz. Klase ekvivalencije $\bar{x}$ i $\bar{y}$ su ili bez zajedničkih elemenata, i onda važi (II), ili imaju bar jedan zajednički elemenat z. U drugom slučaju je $z \in \bar{x}$, $z \in \bar{y}$, pa, na osnovu definicije klase ekvivalencije, dobijamo $x \sim z$, $y \sim z$. Odatle neposredno primenom 2° i 3°, dobijamo $x \sim y$. Prema tvrđenju 1, dobijamo $\bar{x} = \bar{y}$.

Skup svih klasa ekvivalencije, u oznaci $D/\sim$, zovemo KOLIČNIČKI SKUP (skupa D i njegove relacije ekvivalencije $\sim$). Na osnovu dokazanih tvrđenja zaključuje se da su elementi skupa $D/\sim$ podskupovi $\bar{x}$ koji imaju sledeća svojstva:

1° *Nijedan podskup* $\bar{x}$ *nije prazan.*

2° *Dva različita podskupa su bez zajedničkih elemenata.*

3° *Unija svih podskupova* $\bar{x}$ *je skup* D.

Iz tih razloga kažemo da je $D/\sim$ RAZBIJANJE skupa D.

Primer. Neka je Z skup svih celih brojeva i neka je $\sim$ sledeća relacija tog skupa: $x\sim y \longleftrightarrow$ *broj* $x-y$ *je deljiv sa* 5. Neposredno se dokazuje da je ta relacija relacija ekvivalencije skupa Z. Klase ekvivalencije su sledeći skupovi:

$\bar{0}=\{5k\,|\,k\in Z\}$, $\bar{1}=\{5k+1\,|\,k\in Z\}$, $\bar{2}=\{5k+2\,|\,k\in Z\}$, $\bar{3}=\{5k+3\,|\,k\in Z\}$ $\bar{4}=\{5k+4\,|\,k\in Z\}$.

Prema tome $Z/\sim=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Navedena relacija se zove KONGRUENCIJA PO MODULU m. Umesto $x\sim y$ piše se $x\equiv y \pmod 5$.

U prvom čitanju može se izostaviti tekst koji sledi u ovoj tački.

Pri uvođenju pojma RELACIJA NEKE FORMULE (pri interpretaciji I) pojaviće se potreba da definišemo relacije pomoću jednakosti, kao što je, na primer:

$$\beta(x, y)=(\alpha(x, y) \Leftrightarrow \neg\,\alpha(y, y)) \vee (\forall z)\,(\alpha(x, z) \Rightarrow \alpha(x, x)) \quad (x, y \in D),$$

gde je α data relacija skupa D, a β je relacija definisana tom jednakošću.

Radi lakšeg izlaganja tih definicija, uvodimo pojmove OZNAČENE RELACIJE nekog skupa, operacije sa njima, kao i ALGEBRU OZNAČENIH RELACIJA TOG SKUPA

U onom što sledi neka D bude neprazan skup i neka je $\mathcal{R}=\{\top, \bot, \alpha, \beta, \ldots\}$ skup svih relacija tog skupa.

Neka, prema definiciji iz prošle tačke,

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \ldots$$

bude niz promenljivih. Ovaj niz zovemo i OSNOVNI NIZ promenljivih. Interpretacija svake promenljive je određeni element skupa D. Neka

$$\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n, \mathrm{z}_n, \ldots$$

budu oznake za neku interpretaciju redom slova osnovnog niza. Slično, kada je u_i oznaka neke promenljive, onda je u_i oznaka neke interpretacije — odnosno, kaže se često, i neke njene *vrednosti.*

Neka je $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ neka uređena n-torka promenljivih (ne nužno različitih). Označimo sa $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ drugu uređenu m-torku, čiji su elementi svi različiti elementi prve n-torke i pri tom je redosled $v_1, v_2, \ldots, v_m$ isti kao redosled tih slova u osnovnom nizu. Tada $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ zovemo SKRAĆENJE n-TORKE $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Skraćenje označavamo $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, tj. $[u_1, u_2, \ldots, u_n] \overset{\text{def}}{=} (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ $(m\leqslant n)$.

Na primer,

$$[x, x, y]=(x, y), \quad [x_5, y, y_2, x]=(x, y, y_2, x_5), \quad [x, x]=x.$$

Interpretaciji svih slova u_i odgovara određena interpretacija n-torke $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ Dogovorno, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ neka znače interpretacije za $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$. Na primer, ako je D skup prirodnih brojeva i ako su 1, 2, 3 redom interpretacije za x, y, z, onda interpretacija za (x, y, y, z) $[y, z, z, x]$ jesu redom (1, 2, 2, 3), (1, 2, 3).

Neka je α relacija dužine n skupa D i neka je $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ izvesna uređena n-torka promenljivih. Ako je m broj različitih promenljivih u toj n-torci, onda je pomoću jednakosti

$$\beta[u_1, u_2, \ldots, u_n] \overset{\text{def}}{=} \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (u_1, u_2, \ldots, u_n \in D)$$

određena relacija β dužine m skupa D.

Definicija 3. RELACIJA α SKUPA D OD PROMENLJIVIH REDOM $u_1, u_2, \ldots, u_n$, *u oznaci* $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, *jeste uređen par* $(\beta, [u_1, u_2, \ldots, u_n])$ *čija je prva komponenta, relacija* β, *definisana jednakošću*

$$\beta[u_1, u_2, \ldots, u_n] \overset{\text{def}}{=} \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (u_1, u_2, \ldots, u_n \in D).$$

Za β *kažemo da je* RELACIJSKI DEO *od* $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, *dok* $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ *zovemo* OZNAKA *za* $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n]$. *Inače,* $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ *zovemo i* OZNAČENA RELACIJA (skupa D). *Kao označene relacije uzimamo i relacije* $\top$, $\bot$.

Primer. Neka je $D=\{1, 2, 3\}$ i neka je α sledeća relacija dužine 3:

$$\alpha(x, y, z)=\top \longleftrightarrow x+2y+4z \textit{ je prost broj.}$$

Tada imamo

$$\alpha[x, y, y]=(\alpha_1, (x, y)), \ \alpha[x, y, x]=(\alpha_2, (x, y)),$$
$$\alpha[x, x, y]=(\alpha_3, (x, y)), \ \alpha[x, x, x]=(\alpha_4, x),$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ relacije istog skupa definisane jednakostima

$$\alpha_1(x, y)=\alpha(x, y, y), \ \alpha_2(x, y)=\alpha(x, y, x),$$
$$\alpha_3(x, y)=\alpha(x, x, y), \ \alpha_4(x)=\alpha(x, x, x) \qquad (x, y \in D),$$

odnosno

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (3,1) & (3,2) & (3,3) \\ \top & \top & \top & \bot & \bot & \bot & \bot & \bot & \bot \end{pmatrix},$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (3,1) & (3,2) & (3,3) \\ \top & \bot & \top & \bot & \bot & \bot & \top & \top & \bot \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3=\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (3,1) & (3,2) & (3,3) \\ \top & \top & \bot & \bot & \bot & \bot & \top & \top & \bot \end{pmatrix},$$

$$\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \top & \bot & \bot \end{pmatrix}.$$

Sa $\mathcal{R}$ smo označili skup svih relacija skupa D. Neka $\mathcal{R}[x, y, z, \ldots, x_n, y_n, z_n, \ldots]$ označava skup svih njegovih označenih relacija.

U tom skupu uvodimo izvesne operacije dužine 2, u oznaci $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, kao i operacije dužine 1, u oznaci $\neg$, $\forall$, $\exists$, sledećim definicijama.

Definicija 4. *Neka su* $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m]$, $\beta[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ *dve označene relacije dužina* m i n *redom, sa* $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$. *Tada:*

$$\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m] \vee \beta[v_1, v_2, \ldots, v_n] \overset{\text{def}}{=} \gamma_1[u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n],$$

$$\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m] \wedge \beta[v_1, v_2, \ldots, v_n] \overset{\text{def}}{=} \gamma_2[u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n],$$

$$(1) \quad \alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m] \Rightarrow \beta[v_1, v_2, \ldots, v_n] \overset{\text{def}}{=} \gamma_3[u_1, u_2. \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n],$$

$$\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m] \Leftrightarrow \beta[v_1, v_2, \ldots, v_n] \overset{\text{def}}{=} \gamma_4[u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n],$$

$$\neg\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m] \overset{\text{def}}{=} \gamma_5[u_1, u_2, \ldots, u_m],$$

gde su $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ *relacije skupa* D *definisane jednakostima:*

$$\gamma_1[\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n] \overset{\text{def}}{=} \alpha(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m) \vee \beta(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n),$$

$$\gamma_2[\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n] \overset{\text{def}}{=} \alpha(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m) \wedge \beta(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n),$$

$$(2) \quad \gamma_3[\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n] \overset{\text{def}}{=} \alpha(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m) \Rightarrow \beta(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n),$$

$$\gamma_4[\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n] \overset{\text{def}}{=} \alpha(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m) \Leftrightarrow \beta(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n),$$

$$\gamma_5[\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m] \overset{\text{def}}{=} \neg\alpha(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_m)$$

(u_i, v_j *jesu elementi skupa* D — *interpretacije za* u_i, v_j).

Primedba. U (1) $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ jesu znaci novouvedenih operacija među označenim relacijama, dok su simboli navedeni u (2) znaci operacija algebre $(\top, \bot)$.

Primer. Neka je α ranije posmatrana relacija dužine 3 skupa $\mathrm{D} = \{1, 2, 3\}$. Tada imamo:

$$\alpha[x, x, y] \vee \alpha[x, y, x] = \gamma_1[x, y]$$

$$\alpha[x, y. y] \Rightarrow \alpha[x, x, y] = \gamma_2[x, y]$$

$$(\alpha[x, y, y] \Leftrightarrow \alpha[y, y, y]) \Rightarrow (\alpha[x, x, y] \wedge \neg\alpha[x, x, x]) = \gamma_3[x, y],$$

gde su γ_1, γ_2, γ_3 relacije dužine 2 istog skupa, definisane jednakostima:

$$\gamma_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{x}),$$

$$\gamma_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}) \Rightarrow \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{y}),$$

$$\gamma_3(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}) \Leftrightarrow \alpha(\mathrm{y}, \mathrm{y}, \mathrm{y})) \Rightarrow (\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge \neg\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x})) \quad (\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{D}),$$

prema kojima je, na primer,

$$\gamma_1(1, 1) = \alpha(1, 1, 1) \vee \alpha(1, 1, 1) = \top \vee \top = \top$$

$$\gamma_1(1, 3) = \alpha(1, 1, 3) \vee \alpha(1, 3, 1) = \perp \vee \top = \top$$

$$\gamma_2(2, 2) = \alpha(2, 2, 2) \Rightarrow \alpha(2, 2, 2) = \perp \Rightarrow \perp = \top$$

$$\gamma_2(1, 3) = \alpha(1, 3, 3) \Rightarrow \alpha(1, 1, 3) = \top \Rightarrow \perp = \perp$$

$$\gamma_3(1, 2) = (\alpha(1, 2, 2) \Leftrightarrow \alpha(2, 2, 2)) \Rightarrow (\alpha(1, 1, 2) \wedge \neg \alpha(1, 1, 1))$$

$$= (\top \Leftrightarrow \perp) \Rightarrow (\top \wedge \neg \top) = \perp \Rightarrow (\top \wedge \perp) = \perp \Rightarrow \perp = \top$$

Primetimo da je, prema definiciji 4, dužina relacije $\alpha[u_1, u_2, \ldots u_m] \vee \beta[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ jednaka broju različitih promenljivih među promenljivim $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2 \ldots, v_n$. Slično važi i za ostale operacije.

Prelazimo na definiciju operacija $\forall$ i $\exists$ sa označenim relacijama čije su dužine $n \geqslant 1$.

Radi prostijeg izražavanja, u skupu $\{\top, \perp\}$ uvodimo dogovorno *uređenje*, smatrajući da je $\perp$ *ispred* $\top$. Uz to, neka

$$\mathit{min}\{\perp\},\ \mathit{min}\{\top\},\ \mathit{min}\{\perp, \top\},\ \mathit{max}\{\perp\},\ \mathit{max}\{\top\},\ \mathit{max}\{\perp, \top\}$$

dogovorno budu oznake redom za $\perp, \top, \perp, \perp, \top, \top$. Navodimo prethodno primer sa operacijama $\forall, \exists$.

Neka je α binarna relacija skupa D. Za svaki određeni element y_0 toga skupa postoji skup $\{\alpha(x, y_0) \mid x \in D\}$. Taj skup može biti $\{\top\}, \{\perp\}, \{\top, \perp\}$. Prema tome, $\mathit{min}\{\alpha(x, y_0) \mid x \in D\}$, odnosno $\mathit{max}\{\alpha(x, y_0) \mid x \in D\}$ jesu određeni elementi skupa $\{\top, \perp\}$. Kako to važi za sve elemente y skupa D, možemo reći da jednakosti

$$\beta(y) = \mathit{min}\{\alpha(x, y) \mid x \in D\},\quad \gamma(y) = \mathit{max}\{\alpha(x, y) \mid x \in D\}$$

definišu relacije β, γ skupa D dužine 1. Reći ćemo i sledeće: β i γ su relacije određene obrascima

$$\beta(y) = (\forall x)\, \alpha(x, y),\quad \gamma(y) = (\exists x)\, \alpha(x, y).$$

To je potpuno u skladu sa intuitivnim shvatanjem kvantifikatora $\forall$, $\exists$, što treba shvatiti ovako:

y je u relaciji $\beta \longleftrightarrow$ *y je u relaciji* α *sa svakim elementom* x *skupa* D;

odnosno

y je u relaciji $\gamma \longleftrightarrow$ *y je u relaciji* α *bar sa jednim elementom* x *skupa* D.

Uz to uzimamo i

$$(\forall x)\, \alpha[x, y] \overset{\text{def}}{=} \beta[y],\quad (\exists x)\, \alpha[x, y] \overset{\text{def}}{=} \gamma[y].$$

U slučaju kada je α relacija dužine 1 skupa D, onda $\mathit{min}\{\alpha(x) \mid x \in D\}$, $\mathit{max}\{\alpha(x) \mid x \in D\}$ jesu jedan od elemenata $\top, \perp$. Ako je, na primer, $\top = \mathit{max}\{\alpha(x) \mid x \in D\}$, onda usvajamo $(\exists x)\, \alpha[x] \overset{\text{def}}{=} \top$.

Prelazimo na opšti slučaj. Neka je α relacija dužine n skupa D i neka je $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ označena relacija. Označimo sa u jednu od promenljivih $u_1, u_2, \ldots, u_n$, a sa $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ uređenu n-torku, čiji su elementi svi različiti elementi iz n-torke $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, izuzev elementa u, i čiji je redosled isti kao u osnovnom nizu. Obrasci

$$\beta(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_m) = \mathit{min}\,\{\alpha(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n) \mid \mathrm{u} \in \mathrm{D}\},$$

$$\gamma(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_m) = \mathit{max}\,\{\alpha(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n) \mid \mathrm{u} \in \mathrm{D}\},$$

(u_i, v_j jesu elementi skupa D, odnosno interpretacije za u_i, v_j)

određuju dve relacije dužine m skupa D. Ako je relacijski deo za $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ relacija dužine 1, onda su β i γ relacije dužine 0, odnosno $\top$ ili $\perp$. Kao i u navedenim primerima, usvajamo sledeću definiciju.

Definicija 5.

$$(\exists u)\,\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n] \overset{\text{def}}{=} \beta[v_1, v_2, \ldots, v_m],$$

$$(\forall u)\,\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n] \overset{\text{def}}{=} \gamma[u_1, u_2, \ldots, u_n]$$

ako je m>0, *a ako je* m=0 *onda*

$$(\exists u)\,\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n],$$

odnosno

$$(\forall u)\,\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n]$$

je $\top$ *ili* $\perp$ *prema tome da li je relacija* β *odnosno* γ *jednaka* $\top$ *ili* $\perp$.

Prema datoj definiciji je, na primer,

$$(\exists x)\,\alpha[x, x, y, x, y] = \beta[y],$$

$$(\forall y)\,\alpha[x, y, z, y, z] = \gamma[x, z],$$

$$(\exists x)\,\alpha[x, x, x, x, x] = \delta,$$

gde su β, γ, δ relacije skupa D određene obrascima

$$\beta(\mathrm{y}) = \mathit{max}\,\{\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \mid \mathrm{x} \in \mathrm{D}\},$$

$$\gamma(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \mathit{min}\,\{\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \mid \mathrm{x} \in \mathrm{D}\},$$

$$\delta = \mathit{max}\,\{\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in \mathrm{D}\} \qquad (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{D}).$$

Kada u nije jedna od promenljivih $u_1, u_2, \ldots, u_n$, dogovorno uzimamo

$$(\exists u)\,\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n] = \alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n],$$

$$(\forall u)\,\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n] = \alpha[u_1, u_2, \ldots, u_n].$$

Najzad, kada je jedna od označenih relacija relacija $\top$ ili $\perp$, a druga proizvoljna, u oznaci $[\alpha]$, operacije $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ uvodimo na sledeći način:

$$\top \vee [\alpha] = \top; \quad [\alpha] \vee \top = \top; \quad \perp \vee [\alpha] = [\alpha]; \quad [\alpha] \vee \perp = [\alpha];$$

$$\top \wedge [\alpha] = [\alpha]; \quad [\alpha] \wedge \top = [\alpha]; \quad \perp \wedge [\alpha] = \perp; \quad [\alpha] \wedge \perp = \perp;$$

$$[\alpha] \Rightarrow [\beta] = \neg[\alpha] \vee [\beta]; \quad [\alpha] \Leftrightarrow [\beta] = (\neg[\alpha] \vee [\beta]) \wedge ([\alpha] \vee \neg[\beta])$$

$$(\forall u)\top = \top, \quad (\exists u)\top = \top, \quad (\forall u)\perp = \perp, \quad (\exists u)\perp = \perp$$

(u je promenljiva).

Skup svih označenih relacija skupa D *u odnosu na uvedene operacije* $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ *čini jednu algebarsku strukturu, koju ćemo zvati* ALGEBRA OZNAČENIH RELACIJA SKUPA D. *Ta algebra sadrži algebru* ($\top$, $\bot$) *kao svoju podalgebru.*

Primer. Neka je α binarna relacija skupa prirodnih brojeva za koju

$$\alpha(x, y) = \top \longleftrightarrow 2x - 3y = 5.$$

Tada za relacije β, γ definisane jednakostima

$$\beta(y) = (\exists x)\,\alpha(x, y), \quad \gamma(x, y) = (\exists x)\,\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(x, x)$$

imamo

$$\beta(1) = (\exists x)\,\alpha(x, 1) = \top; \quad \beta(2) = \bot; \quad \beta(8) = \bot; \quad \gamma(1, 2) = (\exists x)\,\alpha(x, 2) \Rightarrow \alpha(1, 1)$$
$$= \bot \Rightarrow \bot = \top; \quad \gamma(2, 3) = (\exists x)\,\alpha(x, 3) \Rightarrow \alpha(2, 2) = \top \Rightarrow \bot = \bot.$$

4. FORMULE KVANTIFIKATORSKOG RAČUNA PRVOG REDA. GLAVNA INTERPRETACIJA. MODEL. VALJANE FORMULE

Prethodno na nekoliko primera predstavljamo najvažnije pojmove koje zatim definišemo.

FORMULE kvantifikatorskog računa prvog reda, na primer, jesu

$$R_1^1(x), \; R_1^2(x, y), \; R_2^6(x, y, z, y, x, y_3), \; R_1^2(x, y) \Rightarrow \neg R_1^1(x),$$
$$(\exists x)\, R_1^1(f_1^1(x)), \; (\exists y)(\forall x) \neg R_1^2(x, y),$$
$$(\forall x)(\exists y)\, R_1^2(x, y) \Rightarrow (\exists x)\, R_1^2(x, x)$$
$$(\forall x)\, R_1^2(x, y) \Rightarrow R_1^1(y), \; R_1^1(f_1^2(x, a_3)) \Rightarrow R_2^3(a_1, y, f_2^1(a_1)),$$

u kojima su

x, y, z, y_3	promenljive,
a_1, a_3	konstante,
f_1^1, f_1^2, f_2^1	operacijska slova,
$R_1^1, R_1^2, R_2^3, R_2^6$	relacijska slova,
$\Rightarrow, \wedge, \forall, \exists, \neg$	simboli određenih operacija.

Prve tri formule su ELEMENTARNE (u njima nema simbola $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, a učestvuje bar jedno relacijsko slovo).

Simboli iz kojih se sastoji formula nisu interpretirani, a mogu biti interpretirani, na primer, na sledeći način.

Uočimo neprazan skup D i konstante, promenljive interpretiramo kao određene elemente skupa D, operacijska slova interpretiramo kao određene operacije skupa D, a relacijska slova kao određene relacije istog skupa. Ako pri tom znake $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ interpretiramo kao poznate operacije sa elementima $\top$, $\perp$, svaka formula dobija određenu VREDNOST $\top$ ili $\perp$, pod uslovom da još i znake $\forall$, $\exists$ interpretiramo tako da im odgovaraju „*svaki*", odnosno „*postoji*".

Ako je D, na primer, skup svih celih brojeva i ako je α relacija: „*biti paran broj*", a β relacija: „x *i* y *tim redom jesu u relaciji ako i samo ako je njihova razlika deljiva sa* 4", onda u slučaju formule

$$(R_1^1(x) \wedge R_1^1(y)) \Rightarrow R_1^2(x, y)$$

interpretirajući R_1^1 i R_1^2 redom kao α i β imamo

$$(\alpha(1) \wedge \alpha(3)) \Rightarrow \beta(1,3) = \top, \quad (\alpha(2) \wedge \alpha(4)) \Rightarrow \beta(2,4) = \perp,$$
$$(\alpha(4) \wedge \alpha(16)) \Rightarrow \beta(4,16) = \top,$$

dok, na primer, u slučaju formule

$$(\exists x)(R_1^1(x) \wedge R_1^2(x, y)),$$

pri istom interpretiranju, imamo

$$(\exists \mathrm{x})(\alpha(\mathrm{x}) \wedge \beta(x, 2)) = \top, \quad (\exists \mathrm{x})(\alpha(\mathrm{x}) \wedge \beta(\mathrm{x}, 1)) = \perp,$$
$$(\exists \mathrm{x})\ (\alpha(\mathrm{x}) \wedge \beta(\mathrm{x}, 4)) = \top.$$

Formula $(\forall x)\neg R_1^1(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x) R_1^1(x)$ pri bilo kakvom interpretiranju navedenog tipa ima *uvek* vrednost $\top$.

Kažemo da je to VALJANA formula.

Valjane su i sledeće formule:

$$R_1^1(x) \Rightarrow (\exists x) R_1^1(x), \quad (\forall x)\ ((R_1^1(x) \wedge R_2^1(x))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x) R_1^1(x) \wedge (\forall x) R_2^1(x).$$

Reč

$$(\forall x)\ (\exists R_1^1) R_1^1(x)$$

nije formula kvantifikatorskog računa prvog reda, već tzv. *računa drugog reda* (u računima višeg reda između ostalog, kvantifikatori mogu da se odnose i na neka druga slova, a ne samo na promenljive, kao što je to u slučaju kvantifikatorskog računa prvog reda). Na podesan način se veliki broj računa višeg reda „*prevodi*" na račun prvog reda. Osim toga, kvantifikatorski račun prvog reda dovoljan je za aksiomatsko zasnivanje poznatih matematičkih teorija.

Sada prelazimo na podrobnije objašnjenje i definisanje već pomenutih pojmova.

Odlučujemo se, prethodno, za određene simbole koje ćemo zvati RELACIJSKA SLOVA.

Definicija 1. RELACIJSKA SLOVA *su simboli* R_i^j, *gde su* i, j *jednaki* 1, 2, 3, ... *i pri tome gornji indeks zovemo* DUŽINA *relacijskog slova.*

Definicija 2. ELEMENTARNA KVANTIFIKATORSKA FORMULA PRVOG REDA *je*

$$R_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

gde je R_i^n *relacijsko slovo dužine* n *i gde su* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *termi.*

Primer. Elementarne kvantifikatorska formula prvog reda jesu

$$R_1^1(x),\ R_1^1\big(f_1^1(x)\big),\ R_1^1(a_1),\ R_1^2(x, y),\ R_2^2(x, x),$$

$$R_1^2\big(y,\ f_1^2(x, y)\big),\ R_1^4(x, y, z, x_1)$$

($R_1^1(x)$ može da se čita i: „x ima svojstvo R_1^1"; slično važi i u ostalim slučajevima).

U daljem tekstu često, umesto elementarna kvantifikatorska formula prvog reda, kažemo ELEMENTARNA FORMULA, a relacijsko slovo zovemo i PREDIKATSKO slovo.

FORMULE KVANTIFIKATORSKOG RAČUNA PRVOG REDA, koje inače često zovemo i FORMULE, uvodimo sledećom definicijom.

Definicija 3. 1° *Elementarna kvantifikatorska formula prvog reda je* FORMULA.

2° *Ako su* A i B FORMULE, *i ako je u promenljiva, onda su i*

$$(A \Rightarrow B),\ \neg A,\ (\forall u)\,A$$

FORMULE.

3° FORMULE *se mogu dobiti jedino posle konačno mnogo primena* 1° i 2° *ove definicije.*

Definicija 4. *Ako su* A i B *neke formule, onda*

$$(A \wedge B) \quad \textit{je zamena za} \quad \neg(A \Rightarrow \neg B)^{1}$$

---

[1] Mnoge definicije u daljem izlaganju su oblika: $\mathcal{A}$ *je zamena za* $\mathcal{B}$, gde su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ neke reči. $\mathcal{A}$ je u tom slučaju tzv. DEFINIENDUM, a $\mathcal{B}$ je tzv. DEFINIENS. U stvari, takvim definicijama uvodi se izvesno preslikavanje i „je zamena za" može se zameniti sa „je slika".

$(A \vee B)$ *je zamena za* $\neg A \Rightarrow B$

$(A \Leftrightarrow B)$ *je zamena za* $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$(\exists u) A$ *je zamena za* $\neg (\forall u) \neg A$

Usvajamo slične konvencije brisanja zagrada kao u slučaju formula algebre $(\top, \bot)$.

Navodimo primere formula:

$$(\forall x)(\forall y) R_1^2(x, y), \quad \neg (\forall x) \neg \neg (\exists y) R_2^2(x, f_1^1(y)), \quad R_1^1(a_2) \Rightarrow R_2^1(x),$$

$$\left(R_1^1(x) \Rightarrow \left(R_1^1(y) \Rightarrow \neg R_1^2(x, y)\right)\right) \vee (\exists z) \neg R_1^1(z)$$

Radi prostijeg izražavanja u kvantifikatorskom računu, uvodi se pojam vezane i slobodne promenljive.

Neka je F neka formula i neka je u jedna od promenljivih te formule. Inače, u može i više puta učestvovati u F, odnosno imati više *pojavljivanja*. Na primer, u formuli

$$(\forall x) R_1^2(x, y) \Rightarrow (\exists y) R_2^2(x, y)$$

promenljive x i y imaju po 3 pojavljivanja.

Pojavljivanje promenljive u u formuli F zovemo VEZANO pojavljivanje ako je:

1° to pojavljivanje oblika $(\forall u)$ ili $(\exists u)$; ili

2° postoji formula A u kojoj u ima pojavljivanje i pri tome je $(\forall u) A$ ili $(\exists u) A$ podformula formule F. Ono pojavljivanje promenljive u koje nije vezano zovemo slobodno pojavljivanje. U prethodnoj formuli prvo i drugo pojavljivanje za x su vezana pojavljivanja, a treće je slobodno pojavljivanje. Za y je prvo pojavljivanje slobodno, a ostala su vezana.

Ako u ima slobodno pojavljivanje, onda promenljivu u zovemo slobodna promenljiva. Neka $A(u)$ označava da u može (a ne mora) biti slobodna promenljiva u formuli A.

Oznaka $A(u)$ ne znači da A nema i nekih drugih slobodnih promenljivih.

Na primer, ako je A formula

$$(\forall x) R_1^1(x) \Rightarrow \left(R_1^1(y) \vee R_1^1(z)\right),$$

onda ona može biti označena: $A(y)$, $A(z)$, $A(x)$, ...

Postavlja se pitanje: zašto, pri takvim proizvoljnostima, uvodimo oznaku A (u). Razlog je sledeći. Neka je t neki term, tada uzimamo da A (t) označava formulu dobijenu iz A (u) kada se sva slobodna pojavljivanja u u formuli A zamene sa t.

Na primer, ako je prethodna formula označena sa A (y), onda su A (z), A $\left(f_1^2(x, y)\right)$ redom formule

$$(\forall x) R_1^1(x) \Rightarrow R_1^1(z) \vee R_1^1(z), \quad (\forall x) R_1^1(x) \Rightarrow R_1^1\left(f_1^2(x, y)\right) \vee R_1^1(z).$$

Ako istu formulu označimo A (x), onda formula A (t) je A, ma kakav bio term t.

Prelazimo na definisanje GLAVNE INTERPRETACIJE.[1]

U tački o termima sreli smo neke pojmove koji učestvuju u definiciji pojma interpretacija. Kao i u toj tački, usvajamo da je DOMEN INTERPRETACIJE izvestan neprazan skup D, a da su elementi skupa D interpretacije (ili vrednosti) za konstante, odnosno promenljive. Tako, a_i i x_j jesu oznake za interpretacije redom za a_i i x_j. Interpretacija operacijskog slova f_i^j je operacija dužine j skupa D, u oznaci f_i^j. INTERPRETACIJA RELACIJSKOG SLOVA R_i^j je relacija dužine j skupa D, u oznaci R_i^j.

Neka je, sada, F neka formula i neka su $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $R_1, R_2, \ldots, R_p$ sve njene konstante (c_i), operacijska slova (f_j) i relacijska slova (R_k). Interpretacija te formule određena je interpretacijama $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_m, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_p$ navedenih simbola, odnosno ako φ označava preslikavanje

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \ldots c_m & f_1 & f_2 \ldots f_n & R_1 & R_2 \ldots R_p \\ \mathrm{c}_1 & \mathrm{c}_2 \ldots \mathrm{c}_m & \mathrm{f}_1 & \mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_n & \mathrm{R}_1 & \mathrm{R}_2 \ldots \mathrm{R}_p \end{pmatrix},$$

onda uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 5 INTERPRETACIJA FORMULE F *je uređen par čije su komponente redom: domen interpretacije* D, *preslikavanje* φ. *Dakle, ako sa* I *označimo interpretaciju onda je* $\mathrm{I} \overset{\text{def}}{=} (\mathrm{D}, \varphi)$, *gde je* φ *napred definisano preslikavanje.*

Primer. Ako je domen interpretacije skup N prirodnih brojeva i ako su interpretacije za a_1, f_1^2, R_1^2 redom 1, operacija sabiranje, u oznaci +, relacija „manji ili jednak", u oznaci $\leqslant$, onda je interpretacija formule

$$R_1^2(x, f_1^2(a_1, x)) \Rightarrow (\forall x) R_1^2(x, a_1)$$

[1] U daljem izostavljamo reč glavna iz termina glavna interpretacija.

jednaka

$$\left(\mathrm{N}, \begin{pmatrix} a_1 & f_1^2 & R_1^2 \\ 1 & + & \leqslant \end{pmatrix}\right)$$

Neka je data interpretacija I formule F. Znake $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ interpretirajmo kao odgovarajuće operacije sa $\top$ i $\perp$, a konstante i promenljive kao elemente skupa D. Simbole $\forall$, $\exists$ interpretirajmo tako da odgovaraju pojmovima „*svaki*", „*postoji*". Onda, smatrajući da je interpretacija svih ostalih simbola određena interpretacijom I, formuli F odgovara njena VREDNOST, jedan od simbola $\top$, $\perp$. O interpretaciji simbola $\forall$, $\exists$, radi potpunosti, dodajemo i ovo: Ako je A neka formula koja ima slobodnu promenljivu u i kod koje su svi ostali simboli interpretirani, onda formula $(\forall u)\,\mathrm{A}(u)$ ima vrednost $\top$ ako i samo ako za sve interpretacije promenljive u u skupu D formula A ima vrednost $\top$; u drugom slučaju je vrednost formule $(\forall u)\,\mathrm{A}(u)$ jednaka $\perp$. Slično, $(\exists u)\,\mathrm{A}(u)$[1] ima vrednost $\top$ ako i samo ako A ima vrednost $\top$ bar za jednu interpretaciju promenljive u u skupu D; u drugom slučaju je vrednost formule $(\exists u)\,\mathrm{A}(u)$ jednaka $\perp$.

Iz toga proizlazi da *vrednost formule F zavisi samo od vrednosti koju imaju njene slobodne promenljive, odnosno ako je m broj svih različitih slobodnih promenljivih formule F, onda njoj odgovara jedna određena relacija dužine m skupa D*, tzv. RELACIJA FORMULE F. Pre preciziranja navedenih pojmova, navodimo neke primere.

Primeri 1. Neka je domen interpretacije skup svih prirodnih brojeva. Ako je 6 interpretacija slova a_1, a relacija α:

$$\mathrm{x}, \mathrm{y} \ \textit{tim redom su u relaciji}\ \alpha \longleftrightarrow \mathrm{x}\ \textit{i}\ \mathrm{y}\ \textit{su uzajamno prosti}$$

jeste interpretacija relacijskog slova R_1^2, onda formuli

$$R_1^2(x, a_1)$$

odgovara relacija dužine 1, u oznaci β, za koju:

$$\mathrm{x}\ \textit{je u relaciji}\ \beta \longleftrightarrow \textit{brojevi}\ \mathrm{x}\ \textit{i}\ 6\ \textit{su uzajamno prosti},$$

dok formuli

$$R_1^2(x, y) \Rightarrow R_1^2(y, z)$$

odgovara relacija dužine 3, u oznaci γ, za koju je

$$\gamma(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \Rightarrow \alpha(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \qquad (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{N}),$$

[1] U stvari, interpretacija za $(\exists u)\,\mathrm{A}(u)$ je interpretacija formule $\neg(\forall u)\neg\mathrm{A}(u)$

odnosno

x, y, z *tim redom su u relaciji* $\gamma \longleftrightarrow$ *iz pretpostavke da su* x, y *uzajamno prosti sleduje da su* y, z *uzajamno prosti.*

Za relacije β i γ imamo, na primer,

$$\beta(2)=\perp,\quad \beta(5)=\top,\quad \beta(8)=\perp,\quad \beta(25)=\top,\quad \gamma(1,2,3)=\top,$$

$$\gamma(2,4,3)=\perp,\quad \gamma(3,5,10)=\perp.$$

2. Neka je F formula

$$(\exists x)\, R_1^2(x, y) \Rightarrow R_1^2(x, x).$$

Ako je domen interpretacije skup prirodnih brojeva i ako R_1^2 interpretiramo kao relaciju α:

$$\alpha(x, y)=\top \longleftrightarrow 2x-3y=5,$$

onda formuli odgovara relaciji β:

$$\beta(x, y)=(\exists x)\,\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(x, x).$$

Za nju je, na primer.

$$\beta(1, 1)=(\exists x)\,\alpha(x, 1) \Rightarrow \alpha(1, 1)=\top \Rightarrow \perp=\perp,$$

$$\beta(4, 1)=(\exists x)\,\alpha(x, 1) \Rightarrow \alpha(4, 1)=\top \Rightarrow \top=\top.$$

Dajemo precizniju definiciju relacije formule pri interpretaciji, koristeći operacije sa relacijama izložene u tački 3 (u prvom čitanju se može izostaviti tekst koji sledi i koji je ispred definicije 8).

Neka je $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ neka elementarna formula za koju su $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sve njene različite promenljive. Ako je data interpretacija I te elementarne formule, pri kojoj se relacijsko slovo R interpretira kao relacija ρ domena D, onda svakoj vrednosti $u_1, u_2, \ldots, u_m$ navedenih promenljivih odgovara vrednost $\top$ ili $\perp$ formule $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, prema tome da li se elementi redom $t_1, t_2, \ldots, t_n$ nalaze u relaciji ρ ili ne. (Pri tome pretpostavljamo da je t_i vrednost terma t_i pri interpretaciji I.)

Na taj način, elementarnoj formuli $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ odgovara relacija dužine m skupa D. Označimo tu relaciju sa α, a sa $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m]$ označimo relaciju α od promenljivih redom $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Tada $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m]$ zovemo OZNAČENA RELACIJA FORMULE $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Dajemo definiciju označene relacije bilo koje formule F.

Definicija 6. 1° *Ako je* $\mathrm{R}(t_1, t_2, \ldots t_n)$ *elementarna formula, onda je* $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m]$ OZNAČENA RELACIJA TE FORMULE.

2° *Ako su* $\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m]$, $\beta[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ OZNAČENE RELACIJE FORMULA A *i* B *redom, onda su*

$$\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m] \Rightarrow \beta[v_1, v_2, \ldots, v_m],\ \neg\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m],\ (\forall u)\,\alpha[u_1, u_2, \ldots, u_m]$$

OZNAČENE RELACIJE *redom za formule* A $\Rightarrow$ B, $\neg$A, $(\forall u)$ A.

Primetimo da, prema definiciji formula koje sadrže znake $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$, kao i prema definiciji operacija $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$ sa označenim relacijama, ako su $[\alpha]$, $[\beta]$ označene relacije redom za formule A i B, onda su $[\alpha] \vee [\beta]$, $[\alpha] \wedge [\beta]$, $[\alpha] \Leftrightarrow [\beta]$ označene relacije redom za formule $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Leftrightarrow B$.

Definicija 7. *Ako je* $[\alpha]$ *označena relacija formule* F *(pri interpretaciji* I*), onda njen relacijski deo zovemo* RELACIJA FORMULE F *(pri interpretaciji I).*

Pomoću pojma relacija formule neposredno se definišu ostali značajni pojmovi koji se odnose na glavnu interpretaciju.

Definicija 8. Formula je TAČNA pri interpretaciji I ako su pri toj interpretaciji vrednosti njene relacije uvek jednake $\top$. Ako je formula tačna pri interpretaciji I, onda I zovemo MODEL te formule.

Formula F je NETAČNA (pri interpretaciji I) ako je njena negacija $\neg$ F tačna (pri interpretaciji I).

Definicija 9. *Formula je* VALJANA *ako je tačna pri svakoj interpretaciji.*

Primeri. 1 Formula $\big(R_1^2(x, y) \wedge R_1^2(y, z) \Rightarrow R_1^2(x, z)\big)$ je tačna pri interpretaciji koju čine skup prirodnih brojeva i relacija „*se sadrži*", odnosno relacija α, za koju je

$$\alpha(x, y) = \top \longleftrightarrow (\exists z)(y = zx) \qquad (x, y, z \in N),$$

dok formula $R_1^2(x, y)$ nije ni tačna ni netačna pri istoj interpretaciji, jer je, na primer,

$$\alpha(1, 3) = \top, \quad \alpha(2, 3) = \perp, \quad \alpha(4, 5) = \perp, \quad \alpha(5, 5) = \top.$$

2. Formule

$$R_1^1(x) \Rightarrow (\exists x) R_1^1(x), \quad (\forall x)(\forall y) R_1^2(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\forall x) R_1^2(x, y),$$

$$(\exists x)(\forall y) R_1^2(x, y) \Rightarrow (\exists x) R_1^2(x, x), \quad (\exists x)(\forall y) R_1^2(x, y) \Rightarrow$$

$$(\forall y)(\exists x) R_1^2(x, y), \quad \neg (\exists y)(\forall x)\big(R_1^2(x, y) \Leftrightarrow \neg R_1^2(x, x)\big)$$

jesu valjane formule.

Neka je sada $\mathcal{F}$ neki skup formula kvantifikatorskog računa prvog reda i D neprazan skup. Interpretacija I tog skupa formula definiše se na sličan način kao i za slučaj jedne formule. Domen interpretacije je neprazan skup D. Ista slova u različitim formulama skupa $\mathcal{F}$ interpretiramo na isti način u skupu D. Ako se φ označimo preslikavanje skupa svih konstanti, operacijskih i relacijskih slova toga skupa $\mathcal{F}$ u skup čiji su elementi interpretacije navedenih simbola, i pri tom je slika nekog simbola njegova interpretacija, onda INTERPRETACIJA SKUPA FORMULA $\mathcal{F}$ jeste uređen par (D, φ). Interpretacijom I (D, φ) određena je ujedno i interpretacija $I_F = (D, \varphi_F)$ bilo koje formule F iz skupa $\mathcal{F}$ (φ_F je preslikavanje, čiji su originali konstante, operacijska i relacijska slova formule F, a slike su njihove interpretacije pri interpretaciji I).

Definicija 10. *Interpretacija I skupa formula $\mathcal{F}$ zove se* MODEL SKUPA FORMULA $\mathcal{F}$ *ako je svaka formula* F *tog skupa tačna pri interpretaciji* I_F.

Primeri: 1. Neka term $f_1^2(t_1, t_2)$, gde su t_1, t_2 termi, bude označen sa $t_1 * t_2$. Jedan model skupa formula

$$R_1^2(x * (y * z),\ (x * y) * z);\quad R_1^2(x * a_1, x);\quad (\forall x)(\exists y) R_1^2(x * y, a_1)$$

jeste interpretacija za koju je domen skup realnih brojeva, kod koje je R_1^2 interpretirano kao jednakost, $*$ kao sabiranje i a_1 kao broj 0. Zaista onda, ma kakvi bili realni brojevi x, y, z, važe uslovi:

$$x + (y + z) = (x + y) + z,\quad x + 0 = x,\quad (\forall x)(\exists y)\quad (x + y = 0).$$

Za isti skup formula — interpretacija za koju je domen skup kompleksnih brojeva 1, —1, i, —i (gde je $i^2 = -1$), dok su R_1^2, $*$, a_1 redom interpretirani kao jednakost, množenje, broj 1 — takođe predstavlja model.

Napomenimo i to da se modeli navedenog skupa formula zovu modeli GRUPA, ukoliko se R_1^2 interpretira kao jednakost.

2. Interpretacija sa proizvoljnim domenom D i relacijom ekvivalencije kao interpretacijom relacijskog simbola R_1^2 jeste model formule

$$R_1^2(x, x) \wedge \big(R_1^2(x, y) \Rightarrow R_1^2(y, x)\big) \wedge \big(R_1^2(x, y) \wedge R_1^2(y, z) \Rightarrow R_1^2(x, z)\big).$$

3. Jedan model formule

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(R_1^2(z, y) \Rightarrow R_1^2\big(f_1^1(z), x\big)\big)$$

određuju:

1° skup prirodnih brojeva kao domen;

2° relacija $>$ kao interpretacija slova R_1^2;

3° niz prirodnih brojeva a_n koji ima svojstvo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, kao interpretacija slova f_1^1.

4. Neka $=$ bude oznaka za R_1^2, a $R_1^2(t_1, t_2)$ označimo $t_1 = t_2$. Modeli formule

$$f_1^3(x, y, z) = f_1^3(y, x, z)$$

koji imaju bilo koji domen D i kod kojih se simbol $=$ interpretira kao jednakost, mogu se opisati na sledeći način.

Označimo sa M jedno određeno preslikavanje čiji su originali skupovi $\{x, y, z\}$ (x, y, z su elementi domena D), a slike su elementi domena D, i koje zadovoljava uslov

$$M(\{x\})=x \quad \text{za sve } x \text{ iz } D.$$

Primedba. Takvo je na primer, sledeće preslikavanje:
$M(\{x, y, z\})=a$, ukoliko nisu svi x, y, z jednaki; $M(\{x\})=x$,

gde je a neki određeni element domena D.

Ako je $\Pi : D^3 \rightarrow D$ bilo koje preslikavanje, onda je obrascem

$$f(x, y, z)=M(\{\Pi(x, y, z), \Pi(y, z, x), \Pi(z, x, y)\}) \qquad (x, y, z, \text{ iz } D)$$

određena funkcija koja zadovoljava uslov

$$f(x, y, z)=f(y, z, x)$$

za sve x, y, z iz D.

Neposredno zaključujemo da se podesnim izborom preslikavanja Π može dobiti svaka funkcija f koja zadovoljava taj uslov.

Model polazne formule je, dakle, određen interpretiranjem slova f_1^3 funkcijom f.

5. Bilo koji model formule

$$R_1^2(x, y) \Leftrightarrow R_1^2(y, x)$$

je $\left(D, \begin{pmatrix} R_1^2 \\ R \end{pmatrix}\right)$, gde je D neprazan skup, R njegova binarna relacija definisana jednakošću

$$R(x, y)=\Pi(x, y) \Leftrightarrow \Pi(y, x) \qquad (x, y \text{ iz } D).$$

Pri tome je Π proizvoljna relacija skupa D.

U sledećim primerima, polazeći od određene interpretacije, obrazujemo formule predikatskog računa prvog reda kojima odgovara ta interpretacija. Na takav se način, reći ćemo i tako, tekstovi neke obične matematičke teorije *prevode na formulski jezik predikatskog računa prvog reda.* Za tzv. FORMALNO (odnosno potpuno aksiomatsko) zasnivanje običnih matematičkih teorija to ima poseban značaj. U stvari, prvi korak u takvom zasnivanju je prevođenje tekstova aksioma odgovarajuće teorije na pomenuti formulski jezik. U primerima koje navodimo predikatska slova označavamo velikim slovima latinice, bez indeksa. Inače, svako od tih slova ima dužinu koja se potpuno podrazumeva iz teksta.

(I) *Tekst.* Ako je x paran broj, onda je x ceo broj.

Prevod. $P(x) \Rightarrow C(x)$

Objašnjenje. $P(x)$ i $C(x)$ interpretiramo redom: x je paran broj i x je ceo broj.

(II) *Tekst.* 1° Svi racionalni brojevi su realni.

2° Nijedan racionalan broj nije realan.

3° Neki racionalni brojevi su realni.

4° Neki racionalni brojevi nisu realni.

Prevod. 1° $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow R(x))$; 2° $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow \neg R(x))$; 3° $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$; 4° $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$.

Objašnjenje. $Q(x)$ i $R(x)$ interpretiramo redom: x je racionalan broj i x je realan broj.

(III) Peanove aksiome za prirodne brojeve glase:

1° 0 je prirodan broj.

2° Ako je x prirodan broj onda postoji drugi prirodan broj x' (tzv. *naslednik* broja x).

3° Ako su naslednici dva prirodna broja jednaki, onda su i sami brojevi jednaki.

4° 0 nije naslednik nijednog prirodnog broja.

5° Ako 0 ima svojstvo P i ako pretpostavka da prirodan broj x ima svojstvo P povlači da to svojstvo ima i naslednik x' toga broja, onda svojstvo P ima svaki prirodan broj.

Prevod. 1° $N(0)$ 2° $N(x) \Rightarrow N(x')$.

3° $(N(x) \wedge N(y)) \Rightarrow (J(x', y') \Rightarrow J(x, y))$.

4° $N(x) \Rightarrow (\forall x) \neg J(x', 0)$.

5° $(P(0) \wedge (\forall x)\ (N(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow P(x')))) \Rightarrow (\forall x)(N(x) \Rightarrow P(x))$.

Objašnjenje. 0 je konstanta, x' je term dobijen od terma x i operacijskog simbola dužine 1 označenog sa $'$ (umesto $'\,(x)$ stoji x'); $N(x)$, $J(x, y)$, $P(x, x')$, interpretiramo redom: x je prirodan broj, x je jednak y, x ima svojstvo P, x' je naslednik broja x.

Navedeni skup formula ne sadrži sve iz Peanovih aksioma. Na primer, za $J(x, y)$ prirodno treba postaviti zahteve koji su u skladu sa interpretacijom J kao jednakosti.

Navedeni skup formula se na određeni način upotpunjuje, kao što ćemo videti u drugom delu pri izlaganju tzv. *formalne teorije brojeva.*

(IV) *Tekst.* Ako su x i y skupovi onda postoji skup z čiji su elementi x i y.

Prevod. $S(x) \wedge S(y) \Rightarrow (\exists z)(S(z) \wedge E(x, z) \wedge E(y, z))$.

Objašnjenje. $S(x)$, $E(x, y)$ interpretiramo redom: x je skup, x je elemenat od y.

(V) *Tekst.* Ne postoji skup svih skupova.

Prevod. $\neg (\exists y)(S(y) \wedge (\forall x)(S(x) \Rightarrow E(x, y)))$.

Objašnjenje isto kao u (IV).

(VI) Ovaj primer navodimo iz knjige N. Prijatelj, *Uvod v matematičko logiko* (str. 91—100).

Neka se $J(x, y)$, $P(x, y, z)$ interpretiraju redom: x je jednak y; x, y, z leže na jednoj pravoj, x leži između y i z. Inače, $x, y, z, \ldots$ interpretiramo kao tačke.

Tada tekstovi:

1° Dve bilo koje tačke leže na pravoj;

2° Ako tačke x, y, z leže na pravoj, onda na pravoj leže i tačke y, x, z kao i x, z, y;

3° Ako su x i y različite tačke i ako tačke x, y, z, kao i x, y, x_1 leže na jednoj pravoj, onda i tačke x, z, x_1 leže na jednoj pravoj;

4° Postoje tačke x, y, z koje ne leže na jednoj pravoj;

5° Ako tačka x leži između tačaka y i z, onda su tačke x, y, z na jednoj pravoj;

6° Ako tačka x leži između tačaka y i z, onda su x, y, z tri različite tačke;

7° Ako tačka x leži između tačaka y i z, onda tačka x leži između tačaka z i y, a tačka y ne leži između tačke x i tačke z;

8° Ako su x i y dve različite tačke, onda postoji tačka z tako da tačka x leži između tačaka y i z;

9° Neka su x, y, z, x_1, x_2 pet proizvoljnih tačaka i neka: tačke x, y, z ne leže na jednoj pravoj, tačka x_1 leži između tačaka x i y, tačke x_2, x, y, kao i z, x_1, x_2 ne leže na jednoj pravoj.

Tada postoji tačka x_3 tako da tačke x_1, x_2, x_3 leže na jednoj pravoj i da tačka x_3 leži između tačaka x i z ili između tačaka y i z (Paschova aksioma)

imaju redom sledeće prevode:

1° $P(x, x, y)$ (ili $(\forall x)\ (\forall y)\ P(x, x, y))$

2° $P(x, y, z) \Rightarrow P(y, x, z) \wedge P(x, z, y)$

3° $(\neg J(x, y) \wedge P(x, y, z) \wedge P(x, y, x_1)) \Rightarrow P(x, z, x_1)$

4° $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z) \neg P(x, y, z)$

5° $M(x, y, z) \Rightarrow P(x, y, z)$

6° $M(x, y, z) \Rightarrow (\neg J(x, y) \wedge \neg J(x, z) \wedge \neg J(y, z))$

7° $M(x, y, z) \Rightarrow (M(x, z, y) \wedge \neg M(y, x, z))$

8° $\neg J(x, y) \Rightarrow (\exists z)\ M(x, y, z)$

9° $(\neg P(x, y, z) \wedge M(x_1, x, y) \wedge \neg P(x_2, x, y) \wedge \neg P(z, x_1, x_2))$
$\Rightarrow (\exists x_3)\ (P(x_1, x_2, x_3) \wedge (M(x_3, x, z) \vee M(x_3, y, z)))$.

I ovaj skup formula mora se proširiti uvođenjem novih formula koje odgovaraju svojstvima jednakosti. To bi u ovom slučaju bile sledeće:

$$J(x, x),\ J(x, y) \Rightarrow J(y, x),\ J(x, y) \wedge J(y, z) \Rightarrow J(x, z),$$

$$(J(x, x_1) \wedge J(y, y_1) \wedge J(z, z_1)) \Rightarrow (P(x, y, z) \Rightarrow P(x_1, y_1, z_1))$$

$$(J(x, x_1) \wedge J(y, y_1) \wedge J(z, z_1)) \Rightarrow (M(x, y, z) \Rightarrow M(x_1, y_1, z_1)).$$

Na kraju napominjemo da jednom tekstu može, u naznačenom smislu, odgovarati više formula.

5. HIPOTEZE. POSLEDICE.

Definicija 1. *Neka je* $\mathcal{F}$ *skup formula i* F *neka formula. Kažemo da je F* (SEMANTIČKA) POSLEDICA *skupa formula u oznaci* $\mathcal{F} \models F$ *ako je za svaku interpretaciju* I *skupa svih tih formula ispunjen uslov:*

Kada su sve formule skupa $\mathcal{F}$ *tačne, onda je i formula* F *tačna.*

Formule skupa $\mathcal{F}$ zovemo HIPOTEZE.

U daljem tekstu prvog dela umesto semantička posledica reći ćemo kratko, POSLEDICA. Umesto $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$ pišemo i $F_1, F_2, \ldots, F_n \models F$.

Prema datoj definiciji je, na primer,

$$F_1 \models F_1;\quad F_1, F_2 \models F_1;\quad F_1 \wedge F_2 \models F_1;\quad F_1 \models F_1 \vee F_2;\quad F_1 \models (\forall u) F_1,$$

gde su F_1, F_2 proizvoljne formule, a u je promenljiva.

Postoji određena veza između pojma posledica definisanih u ovoj tački i odgovarajućeg pojma u iskaznoj algebri.

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$, A neke iskazne formule čija su sva različita iskazna slova $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Neka su $F_1, F_2, \ldots, F_n$, F formule koje se dobijaju redom iz $A_1, A_2, \ldots, A_n$, A kada se u njima iskazna slova $u_1, u_2, \ldots, u_m$ zamene izvesnim određenim formulama kvantifikatorskog računa prvog reda (podrazumevamo da se isto slovo zameni istom formulom). Važi, sledeće što se neposredno dokazuje:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models A \longrightarrow F_1, F_2, \ldots, F_n \models F.$$

Kada budemo primenjivali ovo tvrđenje, dodaćemo u tekstu „*prema iskaznoj algebri*“. Na primer, tačno je $p, p \Rightarrow q \models q$, pa je onda tačno i $F_1, F_1 \Rightarrow F_2 \models F_2$, gde su F_1, F_2 proizvoljne formule. Kažemo i: $F_1, F_1 \Rightarrow F_2 \models F_2$ prema iskaznoj algebri. Slično, prema iskaznoj algebri $F_1 \vee F_2, \neg F_1 \models F_2$; $F_1, \neg F_1 \models F_2$, gde su F_1 i F_2 proizvoljne formule.

Navedenim tvrđenjem ne opisuju se svi slučajevi kada nastupa $F_1, F_2, \ldots, F_n \models F$. Tako, na primer, pomoću njega se ne može dobiti $F \models (\forall x) F$, što je inače tačno, jer, prema definiciji tačnosti neke formule, *formule* F *i* $(\forall x) F$ *su obe tačne ako i samo ako je jedna od njih tačna.*

Primeri. 1. U ovom primeru simbolima S, P, M označavamo tri relacijska slova dužine 1. Dokazaćemo:

$$(1)\qquad (\forall x)\,(M(x) \Rightarrow P(x)),\ (\exists x)\,(M(x) \wedge S(x)) \models (\exists x)\,(S(x) \wedge P(x)).$$

Neka je D neki neprazan skup i neka su M, P, S oznake za tri relacije dužine 1 toga skupa koje su ujedno i interpretacije odgovarajućih relacijskih slova u (1). Ako su ispunjene hipoteze, onda za neki element $c \in D$ biće $M(c) \wedge S(c) = \top$, $M(c) \Rightarrow P(c) = \top$, odakle na osnovu istinitosnih tablica dobijamo $M(c) = \top$, $S(c) = \top$, $P(c) = \top$, pa je $S(c) \wedge P(c) = \top$, odnosno $(\exists x)\,(S(x) \wedge P(x)) = \top$. Tako je dokazano da je $(\exists x)\,(S(x) \wedge P(x))$ posledica.

(1) je u uskoj vezi sa jednim od tzv. ARISTOTELOVIH SILOGIZAMA, koje u daljem tekstu zovemo, kratko, SILOGIZMI.

Svaki od silogizama ima dve hipoteze (premise) i jednu posledicu (zaključak). U njima učestvuju tri termina: *mali*, *srednji* i *veliki*. Mali, u oznaci S, jeste subjekat zaključka (posledice), a veliki, u oznaci P, jeste predikat (u smislu bliskom gramatičkom) zaključka. Srednji termin, u oznaci M, jeste zajednički u obe hipoteze. To se opisuje rečima: ,,preko srednjeg termina izvodi se zaključak o vezi S i P".

Hipoteze i zaključak su rečenične sheme jednog od sledećih oblika:

(a) Svaki A je B,

(i) Neki A je B,

(e) Nijedan A nije B,

(o) Neki A nije B.

Ovde su A, B neki od S, P, M.

Simbolima A, B odgovaraju NEPRAZNI skupovi objekata koji imaju neko svojstvo. Pri tome: (a), (i), (e), (o) treba redom shvatiti na sledeći način:

,,Svaki onaj element koji ima svojstvo A ima i svojstvo B".

,,Postoji element koji ima svojstvo A i svojstvo B".

,,Svaki onaj element koji ima svojstvo A nema svojstvo B."

,,Postoji element koji ima svojstvo A, a nema svojstvo B".

Obično se rečenične sheme (a), (e), (i), (o) označavaju redom kraće: aAB, iAB, eAB, oAB. Slova a, i uzeta su iz reči AFFIRMO (tvrdim), kao njena prva dva samoglasnika. Slično, slova e, o su uzeta iz reči NEGO (odričem).

Navodimo sve silogizme, grupisane u određene FIGURE, koristeći navedene kraće oznake. Za svaki silogizam dajemo i odgovarajuće ime. Figure su sledeće:

I figura	II figura	III figura	IV figura
MP	PM	MP	PM
SM	SM	MS	MS
SP	SP	SP	SP

Silogizmi prve figure su:

(1) *Barbara*	(2) *Celarent*	(3) *Darii*	(4) *Ferio*	(5) *Barbari*	(6) *Celaront*
aMP	eMP	aMP	eMP	aMP	eMP
aSM	aSM	iSM	iSM	aSM	aSM
aSP	eSP	iSP	oSP	iSP	oSP

Silogizmi druge figure su:

(1) *Cesare*	(2) *Camestres*	(3) *Festino*	(4) *Baroco*	(5) *Cesaro*	(6) *Camestrop*
ePM	aPM	ePM	aPM	ePM	aPM
aSM	eSM	iSM	oSM	aSM	eSM
eSP	eSP	oSP	oSP	oSP	oSP

Silogizmi treće figure su:

(1) *Darapti*	(2) *Datisi*	(3) *Felapton*	(4) *Disamis*	(5) *Bocardo*	(6) *Ferison*
aMP	aPM	eMP	iMP	oMP	eMP
aMS	iMS	aMS	aMS	aMS	iMS
iSP	iSP	oSP	iSP	oSP	oSP

Silogizmi četvrte figure su:

(1) *Bamalip*	(2) *Calemes*	(3) *Dimatis*	(4) *Fesapo*	(5) *Fresison*	(5) *Calemop*
aPM	aPM	iPM	ePM	ePM	aPM
aMS	eMS	aMS	aMS	iMS	eMS
iSP	eSP	iSP	oSP	oSP	oSP

Prema (a), (e), (i), (o), a *s obzirom na uslov nepraznosti skupova objekata* koje imaju svojstvo S, P ili M, rečeničnim shemama (a), (e), (i), (o) možemo na sledeći način dodeliti odgovarajuće formule predikatskog računa:

Svaki A je B: $(\forall x)(\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{B}(x)) \wedge (\exists x)\mathrm{A}(x)$;
Neki A je B: $(\exists x)(\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{B}(x))$;
Nijedan A nije B: $(\forall x)(\mathrm{A}(x) \Rightarrow \neg \mathrm{B}(x)) \wedge (\exists x)\mathrm{A}(x) \wedge (\exists x)\mathrm{B}(x)$;
Neki A nije B: $(\exists x)(\mathrm{A}(x) \wedge \neg \mathrm{B}(x)) \wedge (\exists x)\mathrm{B}(x)$,

gde su A, B relacijska slova dužine 1,

Tada svakom silogizmu odgovara tačan zaključak oblika: $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \models \mathrm{F}$, *gde su* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}$ *formule koje na izložen način odgovaraju redom prvoj hipotezi, drugoj hipotezi i zaključku.* Na takav način, na primer, silogizmu Barbara odgovara:

$$(\forall x)(\mathrm{M}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)) \wedge (\exists x)\mathrm{M}(x),\ (\forall x)(\mathrm{S}(x) \Rightarrow \mathrm{M}(x)) \wedge (\exists x)\mathrm{S}(x)$$
$$\models (\forall x)(\mathrm{S}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)) \wedge (\exists x)\mathrm{S}(x)$$

U slučaju ovog silogizma važi i sledeće:

$$(\forall x)(\mathrm{M}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)),\ (\forall x)(\mathrm{S}(x) \Rightarrow \mathrm{M}(x)) \models (\forall x)(\mathrm{S}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)),$$

što se dobija iz prethodnog „otklanjanjem" formula

$$(\exists x)\mathrm{M}(x),\ (\exists x)\mathrm{S}(x).$$

Slično važi, kao što se neposredno proverava, i za sve ostale silogizme, osim za sledeće: *Barbari*, *Celaront*. *Cesaro*, *Camestrop*, *Darapti*, *Felapton*, *Bamalip*, *Calemop*, *Fesapo*.

Tako, na primer, u slučaju silogizma *Datisi* mogu se otkloniti formule kojima se garantuje nepraznost skupova i, prema rečenom, dobija se:

$$(\forall x)(\mathrm{M}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)),\ (\exists x)(\mathrm{M}(x) \wedge \mathrm{S}(x)) \models (\exists x)(\mathrm{S}(x) \wedge \mathrm{P}(x)),$$

a to je zapravo primer od koga smo pošli.

2. U primeru koji izlažemo neka slovo R_1^2 bude zamenjeno slovom R i neka $f_1^2(t_1, t_2)$, $f_1^1(t_1)$, gde su t_1, t_2 termi, budu označeni redom $t_1\, t_2$, t_1'. Uz to podrazumevamo, na primer, da su

$$(t_1 t_2) t_3,\ t_1'' \text{ oznake za } f_1^2(f_1^2(t_1, t_2), t_3),\ f_1^1(f_1^1(t_1)).$$

Neka skup formula

$$R(x, x);\ R(x, y) \Rightarrow R(y, x);\ R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z);\ R(x, y) \Rightarrow R(xz, yz);$$
$$R(x, y) \Rightarrow R(zx, zy);\ R((xy)z, x(yz));\ R(xa_1, x);\ R(xx', a_1)$$

bude skup hipoteza. Taj skup ćemo zvati i skup G. Navedimo neke posledice skupa G:

1° $(R(x, y) \wedge R(x_1, y_1)) \Rightarrow R(xx_1, yy_1)$
2° $R(x' x, a_1)$
3° $R(a_1 x, x)$
4° $R(x'', x)$
5° $R((xy)', y' x')$
6° $R(xz, x) \Rightarrow R(z, a_1)$
7° $(\exists z) R(xz, y)$
8° $(\exists z) R(zx, y)$

Dokazaćemo, na primer, da su 2° i 3° posledice skupa G. Uzastopnom primenom hipoteza skupa G dobijaju se sledeće posledice:

$$R(a_1, xx'),\ R(x' a_1,\ x'(xx')),\ R(x' a_1, (x' x) x'),\ R(x', (x' x) x')$$

$$R(x' x'', ((x' x) x') x''),\ R(a_1, (x' x)(x' x'')),\ R(a_1, (x' x) a_1),\ R(x' x, a_1)$$

čime je dokazano 2°.

Takođe se iz G dobijaju i ove posledice:

$$R(a_1 x, (xx') x),\ R(a_1 x, x(x' x)),\ R(a_1 x, xa_1),\ R(a_1 x, x),$$

čime je dokazano 3°.

Skup hipoteza G na očigledan način odgovara skupu aksioma kojim se definiše GRUPA. Izvedene posledice odgovaraju dobro poznatim svojstvima grupe.

U iskaznoj algebri imali smo

(1) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A \longleftrightarrow\ \models (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \Rightarrow A.$

Ovde analogon ne važi jer, na primer, jeste $F \models (\forall x) F$, dok nije $\models F \Rightarrow (\forall x) F$, što se vidi iz sledećeg primera.

Neka je formula $R_1^1(x)$, neka je domen $D = \{1, 2\}$ i neka se R_1^1 interpretira kao relacija α: „biti jednak 1“, odnosno $\alpha(1) = \top$, $\alpha(2) = \bot$. Tada $F \Rightarrow (\forall x) F$ glasi: $R_1^1(x) \Rightarrow (\forall x) R_1^1(x)$. Formula $(\forall x) R_1^1(x)$ je netačna. Ako za x uzmemo 1 onda, zbog $\alpha(1) = \top$, vrednost formule je $\top \Rightarrow \bot$, odnosno $\bot$. Dakle,

$$R_1^1(x) \Rightarrow (\forall x) R_1^1(x)$$

nije valjana formula.

Ako su u pitanju zatvorene formule, analogon važi. Odgovarajući stav navodimo bez dokaza, jer je skoro isti kao i dokaz sličnog stava iskazne algebre.

Lema 1. *Ako su* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *zatvorene formule onda*

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow \models (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \Rightarrow F.$$

Neka je F formula čije su slobodne promenljive $v_1, v_2, \ldots, v_m$ i neka je pri tom navedeni redosled isti kao redosled pojavljivanja tih simbola u osnovnom nizu promenljivih

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \ldots .$$

Tada formulu

$$(\forall v_1)(\forall v_2) \ldots (\forall v_m) F$$

zovemo ZATVORENJE formule F. Zatvorenje označavamo i $\overline{F}$. Veoma je značajno da $F \models \overline{F}$ i $\overline{F} \models F$. Iz toga svojstva proizlazi

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow \overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n \models F.$$

Analogon stavu iz iskazne algebre je sledeći stav. Dokaz izostavljamo, jer je sličan dokazu odgovarajućeg stava iskazne algebre.

Lema 2. *Ako je* F_n *zatvorena formula, onda*

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow F_1, F_2, \ldots, F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F.$$

Tvrđenja koja smo u ovoj tački navodili iskazujemo sažeto u jednom stavu. Tu je jedino nov slučaj 4b, koji se neposredno dokazuje na osnovu 4a i odgovarajuće tautologije.

Stav 1° *Ako su* $A_1, \ldots, A_n$, A *izkazne formule i ako su* F_1, $F_2, \ldots, F_n$, F *formule kvantifikatorskog računa prvog reda, dobijene iz njih kada se iskazna slova tih formula zamene nekim formulama kvantifikatorskog računa prvog reda (ista iskazna slova zamene se, pri tom, istim formulama), onda:*

1° $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A \longrightarrow F_1, F_2, \ldots, F_n \models F$

2° $F \models \overline{F}, \quad \overline{F} \models F$

3° $F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow \overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n \models F$

4° *Ako su* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *zatvorene formule, onda*

(a) $F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow \models F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \Rightarrow F$

(b) $F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow \models F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow (\ldots (F_n \Rightarrow F) \ldots))$

5° *Ako je* F_n *zatvorena formula, onda*

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \models F \longleftrightarrow F_1, F_2, \ldots, F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F$$

Navodimo primere primene ovog stava.

1. Važi $(\forall x)\big(R_1^1(x) \Rightarrow R_2^1(x)\big), (\forall x)\big(R_2^1(x) \Rightarrow R_3^1(x)\big)$

$$\models (\forall x)\big(R_1^1(x) \Rightarrow R_3^1(x)\big).$$

Zaista,
$(\forall x)\ (R_1^1(x) \Rightarrow R_2^1(x)) \models R_1^1(x) \Rightarrow R_2^1(x)$, $(\forall x)\ (R_2^1(x) \Rightarrow R_3^1(x)) \models R_2^1(x) \Rightarrow R_3^1(x)$, a prema iskaznoj algebri: $R_1^1(x) \Rightarrow R_2^1(x)$, $R_2^1(x) \Rightarrow R_3^1(x) \models R_1^1(x) \Rightarrow R_3^1(x)$. Stoga je $(\forall x)\ (R_1^1(x) \Rightarrow R_2^1(x))$, $(\forall x)\ (R_2^1(x) \Rightarrow R_3^1(x)) \models R_1^1(x) \Rightarrow R_3^1(x)$. Dokaz je završen ako primenimo $R_1^1(x) \Rightarrow R_3^1(x) \models (\forall x)\ (R_1^1(x) \Rightarrow R_3^1(x))$.

6. PRIMERI I NEKA SVOJSTVA VALJANIH FORMULA

U ovoj tački navodimo razne primere valjanih formula, kao i neke stavove o njima.

Jedna klasa valjanih formula može se dobiti iz tautologija, na sledeći način.

Neka je A iskazna formula čija su sva različita iskazna slova $u_1, u_2, \ldots, u_n$ i neka je F formula koja se dobija kada se slova $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zamene nekim formulama kvantifikatorskog računa (ista slova zamene se istim formulama) i pri tome se $\Rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$ zamene odgovarajućim znacima kvantifikatorskog računa. Tada očigledno važi:

Stav 1 *Ako je* A *tautologija, onda je* F *valjana formula.*

Formulu F, dobijenu iz A na opisan način, zovemo IZVOD formule A.

Primer. Izvodi tautologija

$$p \vee \neg p,\ p \vee q \Leftrightarrow q \vee p,\ (p \wedge \neg p) \Rightarrow q$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q),\ (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

jesu formule

$$F_1 \vee \neg F_1,\ F_1 \vee F_2 \Leftrightarrow F_2 \vee F_1,\ (F_1 \wedge \neg F_1) \Rightarrow F_2$$

$$(F_1 \Rightarrow F_2) \Leftrightarrow (\neg F_1 \vee F_2),\ (F_1 \Leftrightarrow F_2) \Leftrightarrow (F_1 \Rightarrow F_2) \wedge (F_2 \Rightarrow F_1),$$

gde su F_1, F_2 bilo koje formule kvantifikatorskog računa prvog reda, i ti izvodi su valjane formule.

Stav 2. *Ako su* A i B *proizvoljne formule, onda su valjane sledeće formule:*

(1) $$(\forall v)\,(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall v)\,A \wedge (\forall v)\,B$$

(2) $$(\forall v)\,(A \vee B) \Leftrightarrow (\forall v)\,A \vee B$$

(*v nije slobodna promenljiva u* B)

(3) $$(\exists v)\,(A \wedge B) \Leftrightarrow (\exists v)\,A \wedge B$$

(*v nije slobodna promenljiva u* B)

(4) $$(\exists v)\,(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists v)\,A \vee (\exists v)\,B$$

(5) $$\neg\,(\forall v)\,A \Leftrightarrow (\exists v)\,\neg\,A$$

Dokazi tih tvrđenja se neposredno izvode koristeći istinitosne tablice.

Primedba. Kao pravilo za pamćenje (1) — (5) može da služi činjenica da u slučaju konačnog domena $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ formule oblika $(\forall v)\,F$, $(\exists v)\,F$ imaju vrednost redom:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n, \quad F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$$

(gde F_i znači vrednost formule F kada v uzme vrednost d_i, pretpostavljajući još da su i sve ostale promenljive koje eventualno učestvuju u F uzele vrednosti). U tom slučaju (1), (4) u vezi su sa zakonima asocijativnosti za operacije $\wedge$, $\vee$, dok su (2) i (3) u vezi sa distributivnim zakonima $\vee$ prema $\wedge$ i $\wedge$ prema $\vee$.

Najzad, (5) je u vezi sa De Morganovim zakonima.

Za formulu A kažemo da je (SEMANTIČKI) EKVIVALENTNA sa formulom B, u oznaci $A \mathrel{|{=}|} B$, ako je formula $A \Leftrightarrow B$ valjana formula. Neposredno se dokazuje

$$1^\circ\ A \mathrel{|{=}|} A, \quad 2^\circ\ A \mathrel{|{=}|} B \longrightarrow B \mathrel{|{=}|} A,$$

$$3^\circ\ A \mathrel{|{=}|} B,\ B \mathrel{|{=}|} C \longrightarrow A \mathrel{|{=}|} C,$$

gde su A, B, C proizvoljne formule. Takođe se lako dokazuje i sledeće: Ako je A valjana formula i $A \mathrel{|{=}|} B$, onda je i B valjana formula.

Uočimo, dalje formulu

(1) $$(\forall x)\,R_1^1(x) \Rightarrow R_1^1(y).$$

Neka je D domen interpretacije i α njegova relacija dužine 1 — interpretacija slova R_1^1. Jedna slobodna promenljiva date formule je y, pa stoga formuli odgovara relacija dužine 1 skupa D. Neka je c proizvoljan element iz D — interpretacija y. Ako je $\alpha(c) = \top$, onda je vrednost formule (1) jednaka $\top$, a ako je $\alpha(c) = \bot$, opet je vrednost formule (1) jednaka $\top$, jer iz $\alpha(c) = \bot$ proizlazi da $(\forall x)\alpha(x) = \bot$. Kako to važi za svaki neprazan skup D i svaku njegovu relaciju α, to je (1) valjana formula.

Uočimo sada formulu

$$(2) \qquad (\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(t) \qquad (t \text{ je term}),$$

u kojoj je $A(x)$ formula koja ima (eventualno) slobodnu promenljivu x i u kojoj $A(t)$ označava formulu dobijenu iz formule $A(x)$ kada se sva slobodna pojavljivanja promenljive x u A zamene sa t. Formula (1) je jedan primer formula oblika (2). Neka je $A(x)$ formula $(\exists y)\, R_1^2(x, y)$ i neka je term t jednak y. Tada (2) glasi:

$$(3) \qquad (\forall x)(\exists y)\, R_1^2(x, y) \Rightarrow (\exists y)\, R_1^2(y, y).$$

Ova formula nije valjana, kao što se zaključuje iz sledeće interpretacije. Neka je $D = \{1, 2\}$ i neka je β njegova relacija dužine 2, za koju je $\beta(1, 1) = \bot$, $\beta(1, 2) = \top$, $\beta(2, 1) = \top$, $\beta(2, 2) = \bot$. Uzimanjem skupa D za domen interpretacije i interpretirajući R_1^2 kao β, formula (3) ima vrednost $\bot$, jer $(\forall x)(\exists y)\, R_1^2(x, y)$ ima vrednost $\top$, dok $(\exists y)\, R_1^2(y, y)$ ima vrednost $\bot$.

Formule (1) i (3) jesu primeri formula oblika (2), i to jedna je valjana, druga nije. Za ono što sledi, od interesa je jedna klasa valjanih formula oblika (2).

Radi lakšeg opisivanja te klase, uvodimo jedan pomoćni pojam: *term t je slobodan za promeljivu v u formuli A.*

Neka je t neki term čije su sve promenljive $u_1, u_1, \ldots, u_k$, i neka je v proizvoljna promenljiva.

Ako, pri tom, ne postoji nijedna podformula formule A jednog od oblika

$$(\forall u_1)\, B,\ (\forall u_2)\, B, \ldots, (\forall u_k)\, B,\ (\exists u_1)\, B,\ (\exists u_2)\, B, \ldots, (\exists u_k) B,$$

tako da v ima slobodno pojavljivanje u formuli B, onda kažemo: TERM t JE SLOBODAN ZA PROMENLJIVU v U FORMULI A.

Primeri. 1. Term y je slobodan za promenljivu x u formuli $R_1^1(x)$, ali isti term za istu promenljivu nije slobodan u formuli $(\exists y) R_1^2(x, y)$, kao i u formuli $(\forall y) R_1^1(x)$.

2. Term $f_1^2(x, z)$ slobodan je za promenlivu x u formuli

$$(\exists y) R_1^2(x, y) \Rightarrow R_1^1(x),$$

ali nije slobodan za x u formuli

$$(\exists z)(\forall y) R_1^2(x, y) \Rightarrow R_1^1(x).$$

3. Term t je slobodan za bilo koju promenljivu u formuli A ako sve promenljive terma imaju jedino slobodna pojavljivanja u formuli A.

4. Term u je slobodan za promenljivu u u bilo kojoj formuli A.

Važi sledeći stav.

Stav 3. *Formula*

$$(\forall u) \mathrm{A}(u) \Rightarrow \mathrm{A}(t) \tag{4}$$

je valjana ako je A *proizvoljna formula,* u *— promenljiva,* t *— term, ukoliko je term* t *slobodan za promenljivu* u *u formuli* A (u).

Dokaz. Pretpostavimo da formula (4) nije valjana. Tada pri nekoj interpretaciji I formula (4) ima vrednost $\perp$. U tom slučaju formula $(\forall u)\mathrm{A}(u)$ ima vrednost $\top$, dok formula $\mathrm{A}(t)$ ima vrednost $\perp$. Kako je term t slobodan za promenljivu u u formuli $\mathrm{A}(u)$, odnosno kako u formuli $\mathrm{A}(u)$ nijedno slobodno pojavljivanje promenljive u nije u oblasti dejstva bilo kog od kvantifikatora $(\forall v_i)$, $(\exists v_i)$, gde je v_i ma koja promenljiva terma t, zaključujemo da ako term t i promenljiva u dobiju pri interpretaciji I istu vrednost, onda će i vrednosti formula $\mathrm{A}(u)$ i $\mathrm{A}(t)$ biti iste. Znači, za ovu određenu intrpretaciju promenljive u formula $\mathrm{A}(u)$ ima vrednost $\perp$, dok prema pretpostavci formula $\mathrm{A}(u)$ ima vrednost $\top$ za svako u. Iz kontradikcije sledi da je formula (4) valjana. ∎

U sledećem stavu iznosimo neka karakteristična svojstva valjanih formula.

Stav 4. 1° *Ako su* A, B, C *proizvoljne formule, onda su formule:*

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \tag{a}$$

$$(\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})) \Rightarrow ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C})) \tag{b}$$

(c) $$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

(d) $$(\forall u)\, A(u) \Rightarrow A(t)$$

(*term* t *je slobodan za promenljivu* u *u formuli* A)

(e) $$(\forall u)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall u)\, B)$$

(u *nije slobodna promenljiva formule* A)

valjane.

2° *Ako je* A *valjana formula, onda je i formula* $(\forall u)\, A$ *valjana.*

3° *Ako su* A i $A \Rightarrow B$ *valjane formule, onda je i formula* B *valjana.*

Dokaz. Formule (a), (b), (c) jesu izvodi tautologija, pa su prema tome valjane formule. Formula (d) je valjana, prema prethodnom stavu. Formula $(\forall u)(A \Rightarrow B)$ je semantički ekvivalentna sa svakom od formula

$$(\forall u)(\neg A \vee B),\ \ \neg A \vee (\forall u)\, B,\ \ A \Rightarrow (\forall u)\, B.$$

Koristili smo tautologiju $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$, kao i stav 2, pa je (e) valjana formula.

Tvrđenja 2° i 3° neposredno proizlaze iz definicije valjane formule i iz istinitosne tablice za operaciju $\Rightarrow$ algebre $(\top, \perp)$. ∎

Pretpostavimo da se u iskazu ovog stava reč VALJANA zameni rečju KARAKTERISTIČNA, tako da se onda novodobijeni iskaz shvata kao definicija skupa karakterističnih formula kvantifikatorskog računa, smatrajući pri tom da je taj skup $\mathcal{K}$ minimalan skup formula koje ispunjavaju uslove definicije. Za kvantifikatorski račun prvog reda najvažnije je to što je skup $\mathcal{K}$ isti kao i skup svih valjanih formula.

Ovo je, u stvari, iskaz poznatog Gödelovog stava potpunosti predikatskog računa (razlika je jedino u tome što se, umesto karakteristična formula, kaže teorema).

Taj stav pruža mogućnost da se skup valjanih formula uvede bez upotrebe pojmova tačan, netačan, bez velikog dela teorije skupova odnosno, sa tim u vezi, i SA MANJOM INTUICIJOM. U drugom delu tako i činimo, samo umesto valjana formula kažemo teorema. Za takozvano potpuno aksiomatsko odnosno FORMALNO zasnivanje običnih matematičkih teorija to ima prvenstveni značaj, jer su aksiome i teoreme tih teorija u određenim vezama sa valjanim formulama.

III. DEFINICIJE

U ovoj glavi izlažemo najosnovnije o vrstama definicija na koje se često nailazi u matematici.

Definicijom se uvodi jedan nov termin (simbol) koji je doveden u vezu sa već uvedenim ili polazno uzetim simbolima. Misaoni sadržaj (korelat) termina uvedenog definicijom zovemo *pojam*. Otuda kažemo i da se definicijom uvodi nov pojam.

Definicija ima stoga dva glavna dela: DEFINIENDUM (deo koji se definiše) i DEFINIENS (deo kojim se definiše). Na primer, u definiciji:

„PARAN BROJ je ceo broj koji je deljiv sa dva",

definiendum je „paran broj", a definiens je „ceo broj koji je deljiv sa dva".

Kada se obrazuje definicija, pri izboru novog simbola (novog imena) imamo veliku slobodu; naime, novo ime može biti ma koji simbol prethodno neupotrebljen.

Tako, u aritmetici može se usvojiti svaka od definicija:

Broj a je dobar ako je $a(a+1)$ deljiv sa 3.

Broj a je istaknut ako je $a(a+1)$ deljiv sa 3.

Broj a je pravilan ako je $a(a+1)$ deljiv sa 3.

ukoliko definiendumi nisu ranije definisani.

U ovim definicijama stoji „ako" (između definienduma i definiensa) umesto „ako i samo ako". Ovakva zamena je, iz stilskih razloga, često prisutna u definicijama. Međutim, treba istaći da je u navedenim i sličnim definicijama jedino ispravno upotrebiti „ako i samo ako".

I pored relativne slobode u izboru definienduma, definicija mora da ispuni neke uslove da bi bila KOREKTNA.

Navodimo prethodno primer nekorektne definicije.

U skupu realnih brojeva definišimo operaciju, u oznaci $*$, na sledeći način:

$$x * y = z \longleftrightarrow z > 2.$$

Prema toj definiciji je, na primer, $1 * 2=5$, $1 * 2=8$, odakle dobijamo $5=8$, što je netačno.

Poljski logičar S. Leśniewski (1886—1939) prvi je formulisao sledeća dva uslova koja mora da ispuni korektna definicija neke teorije.

1° *Novouvedeni simbol mora da bude* OTKLONJIV *iz svakog iskaza (formule) teorije u kome se pojavljuje.*

2° *Definicija ne sme da bude takva da se pomoću nje u teoriji dobije tvrđenje (teorema) koje se bez nje ne bi moglo dobiti, odnosno ne sme da bude* KREATIVNA.

Dakle, OTKLONJIVOST i NEKREATIVNOST su uslovi koje mora da ispuni korektna definisija. Štaviše, uzimamo da ti uslovi definišu pojam KOREKTNA DEFINICIJA.

Primer. Oduzimanje u skupu celih brojeva može se definisati pomoću sabiranja na sledeći način:

$$x-y=z \longleftrightarrow x=y+z.$$

Novouvedena operacija ima, na primer, svojstvo $x-(x-y)=y$. To svojstvo celih brojeva može se izraziti i na sledeći način, otklanjanjem simbola —:

„*Ako je* $x=y+z$, *onda je* $x=z+y$."

Ovo se neposredno zaključuje uvođenjem jednakosti $x-y=z$ i korišćenjem da je njena posledica jednakost $x-z=y$.

Na tom primeru se vidi kako se može vršiti otklanjanje novouvedene operacije.

Jak razlog za uvođenje definicije, odnosno novih simbola, u nekoj teoriji je uprošćenje izlaganja.

U ovome što sledi pretpostavljamo da je poznata definicija teoreme specijalnih kvantifikatorskih računa prvog reda, u oznaci $\mathcal{S}$ (u daljem tekstu, kratko TEORIJA $\mathcal{S}$). O tim tzv. formalnim teorijama izlažemo detaljnije u drugom delu (glava III). Na ovom mestu zadovoljavamo se sledećom definicijom.

Teorija $\mathcal{S}$ ima neke konstante, operacijska i relacijska slova od onih koje ima i kvantifikatorski račun prvog reda. Formule teorije $\mathcal{S}$ jesu neke od formula kvantifikatorskog računa prvog reda (one u kojima učestvuju simboli teorije $\mathcal{S}$). Aksiome teorije $\mathcal{S}$ jesu:

1° *formule oblika* (a), (b), (c), (d), (e) *iskaza stava* 4 *(prethodna glava, tačka* 6);

2° izvesne određene formule — tzv. SPECIJALNE AKSIOME *teorije* $\mathcal{S}$.

Skup TEOREMA *teorije* $\mathcal{S}$ *je minimalan skup, koji ima sledeća svojstva:*

(1) *Aksiome teorije* $\mathcal{S}$ *jesu teoreme.*

(2) *Ako je* A *teorema, onda je i* $(\forall u)$ A *teorema.*

(3) *Ako su* A *i* A $\Rightarrow$ B *teoreme, onda je i* B *teorema.*

Takozvana TEORIJA $\mathcal{S}$ SA JEDNAKOŠĆU nužno ima bar jedno relacijsko slovo, u oznaci, na primer $=$, za koje su postavljene dodatne aksiome u skladu sa svojstvima obične jednakosti (v. tačku 2, glava III, drugi deo).

U takvim teorijama uvodi se kvantifikator $(\exists_1 u)$[1], *gde je u promenljiva na sledeći način:*

$$(\exists_1 u)\,\mathrm{A}(u) \text{ je zamena za } (\exists u)\,\mathrm{A}(u) \wedge (\mathrm{A}(u) \wedge \mathrm{A}(v) \Rightarrow u=v),$$

gde je A *proizvoljna formula čija je jedna slobodna promenljiva u i u kojoj je promenljiva v prva u osnovnom nizu promenljivih takva da je term v slobodan za promenljivu u.*

Interpretacijom simbola kvantifikatorskog računa od definicija koje navodimo neposredno dobijamo definicije u raznim neformalnim teorijama, kao što se vidi iz primera koje dajemo.

U teorijama $\mathcal{S}$ značajno mesto imaju definicije kojima se uvode novi relacijski simboli, operacijski simboli, kao i nove konstante. Definiendum i definiens odvajamo redom sa „je zamena za".

Neka je $\mathrm{A}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *formula čije su jedine slobodne promenljive* $v_1, v_2, \ldots, v_n$, *koje su različite. Ista formula može imati i razne vezane promenljive. Neka je R neki novi simbol.*

Definicijom

$$R(v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ je zamena za } \mathrm{A}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \tag{1}$$

uvodimo jedan nov složen simbol $R(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *— definiendum kao zamenu za formulu* $\mathrm{A}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *koja je definiens. Kažemo i da se definicijom* (1) *uvodi nov relacijski simbol R.*

Inače (1) je korektna definicija.

Interpretacijom simbola formule $\mathrm{A}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, na način koji je izložen u prethodnoj glavi, od definicije (1) prelazi se na INTERPRETIRANU DEFINICIJU, kojom se uvodi relacija dužine n domena interpretacije D.

---

[1] Čita se: postoji tačno jedan u".

U definiciji umesto „je zamena za“ pišemo i $\longleftrightarrow$.

Primeri. 1. Relacijski simbol A dužine 2 uvodimo sledećom definicijom:

$$A(x, y) \longleftrightarrow R_1^2(x, y) \vee R_2^2(x, y).$$

Ako R_1^2, R_2^2 interpretiramo redom kao relacije $=$, $<$ a promenljive x, y kao realne brojeve, onda se A interpretira kao relacija α za koju je

$$\alpha(x, y) \longleftrightarrow x=y \vee x<y,$$

odnosno „x je u relaciji α sa y $\longleftrightarrow$ $x=y \vee x<y$“, tj. kao relacija $\leqslant$.

2. Uvodimo relacijsko slovo S dužine 1 sledećom definicijom:

(2) $$S(x) \longleftrightarrow (\exists y) R_1^2(y, x),$$

koja je korektna, jer definiendum i definiens imaju iste slobodne promenljive.

Interpretirajmo R_1^2 kao relaciju „biti element“ ($R_1^2(y, x)$ znači: y je element iz x).

Tada prethodnom definicijom uvodimo jednu relaciju dužine 1:

x *je u relaciji* S $\longleftrightarrow$ *postoji* y *takav da je* y *element iz* x.

Dobijenu relaciju možemo zvati „biti neprazan skup“, odnosno „x je u relaciji S“ može biti zamenjeno sa „x je neprazan skup“.

Iz tog primera vidimo kako se „biti neprazan skup“ definiše pomoću relacije $\in$.

U slučaju definicije (2) interpretirajmo promenljive na skupu prirodnih brojeva, a R_1^2 kao relacija α: x je u relaciji α sa y $\longleftrightarrow$ $x^2=y$.

Tada se pomoću (2) uvodi jedna relacija u oznaci, na primer S, za koju imamo:

x *je u relaciji* S $\longleftrightarrow$ *postoji* y *takav da je* $y^2=x$.

Dobijenu relaciju možemo zvati „biti potpun kvadrat“.

3. Navodimo nekoliko primera iz obične aritmetike. Znaci su, dakle, već interpretirani na uobičajen način.

$$x \geqslant y \longleftrightarrow x>y \vee x=y$$

$$x \mid y \longleftrightarrow (\exists z)(y=zx)$$

x *je prost broj* $\longleftrightarrow$ $x>1 \wedge (\forall y)((y \neq 1 \wedge y \mid x) \Rightarrow y=x)$

y *je aritmetička sredina za* x i z $\longleftrightarrow$ $x+z=2y$

U sistemu celih brojeva nekorektna je sledeća definicija:

$$R(x) \longleftrightarrow x+y=0.$$

Može se, na primer, izvesti: Ako postoji y tako da je $x+y=0$, onda je, za svaki y, $x+y=0$; što nije tačno, između ostalog, za $x=1$.

Neka je $A(v_1, v_2, \ldots, v_n, w)$ *formula teorije* $\mathcal{S}$ *sa jednakošću čije su slobodne promenljive tačno* $v_1, v_2, \ldots v_n, w$ *i pri tom su to različite promenljive. Neka je formula* $(\exists_1 w) A(v_1, v_2, \ldots, v_n, w)$ *teorema teorije* $\mathcal{S}$. *Ako je* O *nov simbol, onda definicijom*

(3) $O(v_1, v_2, \ldots, v_n)=w$ *je zamena za* $A(v_1, v_2, \ldots, v_n, w)$

uvodimo složeni simbol $O(v_1, v_2, \ldots, v_n)=w$ *kao zamenu za formulu* $A(v_1, v_2, \ldots, v_n, w)$. *Kažemo i da se definicijom* (3) *uvodi nov operacijski simbol* O.

Slično, *ako je* $A(w)$ *formula koja ima* w *kao jedinu slobodnu promenljivu i ako je* c *novi simbol teorije* $\mathcal{S}$ *sa jednakošću, onda u slučaju kada je formula* $(\exists_1 w) A(w)$ *teorema, definicijom*

(4) $c=w$ *je zamena za* $A(w)$

uvodimo nov simbol $c=w$ *kao zamenu za formulu* $A(w)$. *Kažemo i da se definicijom* (4) *uvodi nova konstanta* c.

Interpretacijom simbola na način izložen u prethodnoj glavi, od (3) odnosno (4) prelazi se na interpretiranu definiciju, kojom se u domenu D definiše operacija dužine n, odnosno jedan određeni element.

Korektnost definicije (3), odnosno (4), kojom se uvodi novo operacijsko slovo odnosno konstanta, proizlazi iz važenja sledećeg tvrđenja, koje navodimo bez dokaza.

Neka je $\mathcal{S}'$ *teorija sa jednakošću, dobijena iz teorije* $\mathcal{S}$ *sa jednakošću dodavanjem novog simbola* O *odnosno* c *(a sa tim u vezi proširenjem skupa formula, aksioma i teorema) i uzimanjem sledeće formule za aksiomu:*

$$A(v_1, v_2, \ldots, v_n, O(v_1, v_2, \ldots, v_n)) \text{ odnosno } A(c).$$

Tada su teorije $\mathcal{S}$ *i* $\mathcal{S}'$ *u sledećem odnosu:*

1° *Svaka teorema teorije* $\mathcal{S}$ *je teorema teorije* $\mathcal{S}'$.

2° *Postoji* EFEKTIVAN POSTUPAK OTKLANJANJA NOVOG SIMBOLA *kojim se od svake teoreme teorije* $\mathcal{S}'$ *dobija teorema teorije* $\mathcal{S}$.

Primeri. 1. U teoriji grupa $\mathcal{G}$, čiji je jedinični element označen sa e, dokazuje se teorema $(\forall u)(\exists_1 x)(ux=e)$. Na osnovu toga je korektno uvesti novo operacijsko slovo dužine 1. To se i čini na sledeći način:

$$x=O(u) \longleftrightarrow ux=e.$$

Obično se $O(\mathrm{u})$ zamenjuje sa u^{-1}.

Tim novim simbolom se prostije iskazuju, na primer, sledeće teoreme:

$$(\mathrm{u}^{-1})^{-1}=\mathrm{u},\ (\mathrm{uv})^{-1}=\mathrm{v}^{-1}\mathrm{u}^{-1},$$

koje je, naravno, mogućno prevesti na teoreme polazne teorije $\mathcal{G}$, otklanjanjem novog simbola.

2. U aksiomatskoj teoriji skupova, na primer u Zermelo-Skolem-Fraenkelovom sistemu, dokazuje se teorema $(\exists_1 x)(\forall y)\, y \notin x)$, pa se sa tim u vezi definiše nova konstanta $\varnothing$ i uzima aksioma $(\forall y)\neg(y \in \varnothing)$ u široj teoriji.

Sledeći tip definicija su „*definicije u obliku jednakosti*". Definiendum i definiens se obično odvajaju sa $\overset{\text{def}}{=}$. Tim definicijama se uvodi novo operacijsko slovo.

Te su definicije oblika

$$O(v_1, v_2, \ldots, v_n) \overset{\text{def}}{=} t,$$

gde je O novo operacijsko slovo dužine n, *koje definišemo,* v_1, $v_2, \ldots, v_n$ *jesu različite promenljive i to su jedine promenljive koje učestvuju u termu t.*

Umesto $\overset{\text{def}}{=}$ može se pisati „*je zamena za*".

Primeri. 1 $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \overset{\text{def}}{=} \{\{\mathrm{x}\}, \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}\}$.

2. Ako je u sistemu celih brojeva definisan — x, onda x—y možemo definisati pomoću $\mathrm{x}-\mathrm{y} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{x}+(-\mathrm{y})$.

U teoriji $\mathcal{S}$ često se uvode definicije slične svima navedenim, ali sa tom razlikom što se umesto promenljivih pojavljuju termi pod raznim pretpostavkama, koje se odnose na njihovu strukturu.

Na primer, u formalnoj teoriji brojeva uvodi se $t_1 \mid t_2$ na sledeći način:

$$t_1 \mid t_2 \longleftrightarrow (\exists u)(t_2 = t_1 u),$$

gde su t_1, t_2 proizvoljni termi i u je prva promenljiva iz osnovnog niza $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \ldots$, promenljivih koja ne učestvuje u tim termima.

U iskaznom računu $\mathcal{L}$ koji izlažemo u drugom delu (glava II) uvodimo definicije sledećeg oblika:

$$O(s_1, s_2, \ldots, s_n) \textit{ je zamena za } A,$$

gde je A iskazna formula za koju su $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sva njena različita iskazna slova i gde je O novi simbol.

Kažemo da se takvom definicijom uvodi novi FORMULSKI SIMBOL O. Takva je, na primer, definicija

$$(p \wedge q) \text{ je zamena za } \neg(p \Rightarrow \neg q),$$

gde je nov simbol $\wedge$ i gde umesto $\wedge(p, q)$ stoji dogovorno $(p \wedge q)$.

U drugom delu je više istaknuta razlika između formalnog računa (teorije) i teorije pomoću koje je izgrađujemo, odnosno tzv. META-TEORIJE. U meta-teoriji upotrebljavamo često tzv. REKURZIVNE DEFINICIJE, koje se zasnivaju na matematičkoj indukciji. Na ovom mestu navodimo samo neke primere takvih definicija. Definicije iskaznih formula, terma i kvantifikatorskih formula su rekurzivne. Slično, definicija stepena a^n: $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n\, a$ je rekurzivna.

DRUGI DEO

I. FORMALNE TEORIJE

Formalna teorija, u oznaci $\mathcal{T}$, određena je kada su ispunjeni sledeći uslovi.

1° Dat je najviše prebrojiv skup simbola, tzv. OSNOVNIH SIMBOLA teorije $\mathcal{T}$.

2° U skupu svih reči sa osnovnim simbolima teorije određen je podskup, tzv. skup FORMULA teorije $\mathcal{T}$. Uz to dat je i efektivan postupak za odlučivanje da li je neka reč formula ili nije.

3° U skupu svih formula određen je jedan podskup, čije elemente zovemo AKSIOME. Ako je još dat i efektivan postupak za odlučivanje da li je neka formula aksioma ili nije, onda $\mathcal{T}$ zovemo AKSIOMATSKA TEORIJA.

4° Dat je konačan broj tzv. PRAVILA IZVOĐENJA. Svako pravilo izvođenja je izvesna relacija u skupu formula teorije $\mathcal{T}$. Ako je α jedno pravilo izvođenja dužine n, na primer, onda ma kakve bile formule $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ postoji efektivan postupak za odlučivanje da li su redom formule $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ u relaciji α ili nisu. Ako su redom formule $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ u relaciji α, onda kažemo i: A_n je DIREKTNA POSLEDICA redom formula $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ po pravilu izvođenja α i pišemo $\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}}{A_n}$.

Označimo redom sa $\mathcal{S}(\mathcal{T})$, $\mathcal{F}(\mathcal{T})$, $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ skupove osnovnih simbola, formula, aksioma i pravila izvođenja teorije $\mathcal{T}$.

Navedeni skupovi određuju formalnu teoriju, pa se teorija $\mathcal{T}$ *može striktno definisati kao* $(\mathcal{S}(\mathcal{T}), \mathcal{F}(\mathcal{T}), \mathcal{A}(\mathcal{T}), \mathcal{R}(\mathcal{T}))$.

Umesto formalna teorija kažemo i FORMALNI RAČUN.

Definicija 1. *Konačan niz formula*

$$B_1, B_2, \ldots, B_m$$

formalne teorije $\mathcal{T}$ *zovemo* IZVOĐENJE (DEDUKCIJA; DOKAZ) *u teoriji ako svaka formula* B_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *tog niza ispunjava uslov:*

1° B_i *je aksioma, ili*

2° B_i *je direktna posledica nekih prethodnih formula niza po izvesnom pravilu izvođenja teorije* $\mathcal{G}$.

Definicija 2. *Formulu* B_m *formalne teorije zovemo* TEOREMA *u teoriji* $\mathcal{G}$, *u oznaci* $\underset{\mathcal{G}}{\vdash} B_m$ *ili* $\vdash B_m$, *ako postoji bar jedan niz*

$$B_1, B_2, \ldots, B_m,$$

koji je izvođenje u teoriji $\mathcal{G}$. *U ovom slučaju kažemo i da je taj niz izvođenje teoreme* B_m.

Primer Neka su slova a i r osnovni simboli teorije $\mathcal{G}$. Dogovorno reči a, aa, aaa, aaaa, ... označavamo $a^1, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (dakle a^1 je a, a^{n+1} je $a^n a$; $n=1,2,\ldots$).

Neka su formule reči oblika $a^1ra^2, a^7ra^3, a^1ra^5, \ldots$, odnosno sve reči oblika a^mra^n, gde su m, n pozitivni prirodni brojevi. Za aksiome uzimamo sledeće formule: a^1ra^1, a^3ra^1, a za pravila izvođenja:

$$\alpha: \frac{a^mra^n}{a^nra^m}, \quad \beta: \frac{a^mra^n}{a^{m+1}ra^{n+1}}, \quad \gamma: \frac{a^mra^n, a^nra^p}{a^mra^p},$$

od kojih su α i β dužine 2, a γ je dužine 3.

Tada niz formula:

$$(1)\ a^3ra^1, \quad (2)\ a^4ra^2, \quad (3)\ a^5ra^3, \quad (4)\ a^5ra^1,$$

predstavlja izvođenje u teoriji $\mathcal{G}$ jer: (1) je aksioma, (2) dobijamo iz (1) pomoću pravila β, (3) dobijamo iz (2) pomoću pravila β, (4) dobijamo iz (3) i (1) pomoću pravila γ.

Prema tome, formula a^5ra^1 je teorema teorije $\mathcal{G}$.

Takođe su i formule a^2ra^2, a^2ra^4, a^8ra^2, a^3ra^5 teoreme. Uopšte, ako je m+n paran broj onda je formula a^mra^n teorema teorije $\mathcal{G}$. Dokazaćemo da važi i sledeće: Ako je a^mra^n teorema teorije $\mathcal{G}$, onda je zbir m+n paran broj.

Neka se, formula a^mra^n zove *parna* formula ako je zbir $m+n$ paran broj. Aksiome a^1ra^1, a^3ra^1 su parne formule. Ako je a^mra^n parna formula, onda su i formule a^nra^m, $a^{m+1}ra^{n+1}$ takođe parne. Slično, ako su a^mra^n i a^nra^p parne formule, onda je i formula a^mra^p parna. Kratko kažemo: Aksiome su parne formule i pravila izvođenja čuvaju parnost formula. Zbog ovoga svi članovi

$$B_1, B_2, \ldots, B_m$$

nekog izvođenja u teoriji $\mathcal{G}$ moraju biti parne formule.

Zaključak: Teorema računa $\mathcal{G}$ mora biti parna formula.

Dakle, u slučaju navedene teorije $\mathcal{G}$ tačan je iskaz:

Formula A teorije $\mathcal{G}$ je teorema ako i samo ako je A parna formula.

Za odlučivanje parnosti neke formule postoji efektivan postupak. Otuda postoji efektivan postupak za odlučivanje da li je neka formula teorije $\mathcal{G}$ teorema ili nije. Iz ovog razloga, za teoriju $\mathcal{G}$ kažemo da je ODLUČIVA.

Uopšte, neka *formalna teorija* $\mathcal{T}$ *je* ODLUČIVA *ako postoji efektivan postupak kojim se može za proizvoljnu formulu A te teorije odlučiti da li je teorema teorije* $\mathcal{T}$ *ili nije.*

Primedba. U izloženom tekstu pojam efektivan postupak uziman je u intuitivnom smislu. Postoje razne stroge definicije tog pojma (definicija Markovljevog algoritma, rekurzivnih funkcija), koje su na određen način ekvivalentne. Hipoteza je da one potpuno *pokrivaju* intuitivan pojam efektivan postupak.

Definicija 3. *Neka je* $\mathcal{F}$ *neki skup formula neke formalne teorije* $\mathcal{T}$ *i neka je* A *određena formula iste teorije. Kažemo: formula* A *je* POSLEDICA *skupa formula* $\mathcal{F}$ *ako postoji konačan niz formula*

$$B_1,\ B_2,\ \ldots\ ,\ B_m \qquad (B_m \text{ je jednaka } A),$$

čija svaka formula B_i *ispunjava uslov:*

1° B_i *je aksioma; ili*

2° B_i *je iz skupa* $\mathcal{F}$ *ili*

3° B_i *je direktna posledica nekih prethodnih formula niza po izvesnom pravilu izvođenja teorije* $\mathcal{T}$.

Ako je A posledica skupa formule $\mathcal{F}$, onda pišemo $F \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A$ ili $\mathcal{F} \vdash A$, a elemente skupa $\mathcal{F}$ zovemo HIPOTEZE (PREMISE, PRETPOSTAVKE). Pomenuti niz $B_1, B_2, \ldots, B_m$ zovemo IZVOĐENJE FORMULE A IZ SKUPA HIPOTEZA $\mathcal{F}$.

Ako je $\mathcal{F}$ konačan skup, onda umesto $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash A$ pišemo i: $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$.

Izvođenja iz hipoteza imaju sledeća značajna svojstva:

1° *Ako* $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_1 \vdash A$ *onda* $\mathcal{F}_2 \vdash A$.

2° $\mathcal{F} \vdash A$ *ako i samo ako postoji konačan podskup* $\mathcal{F}_1$ *skupa* $\mathcal{F}$ *takav da je* $\mathcal{F}_1 \vdash A$.

3° *Neka* $\mathcal{F}_1 \vdash B$, *gde je* B *proizvoljna formula iz skupa* $\mathcal{F}_2$. *Ako* $\mathcal{F}_2 \vdash A$, *onda* $\mathcal{F}_1 \vdash A$.

Formalne teorije obrazuju jednu klasu matematičkih teorija. Ostale matematičke teorije zovemo obične matematičke teorije. Za opisivanje i izgrađivanje neke formalne teorije koristi se izvesna obična matematička teorija, koju zovemo META-TEORIJA te formalne teorije. Formalnu teoriju u tom slučaju zovemo i OBJEKT-TEORIJA. Meta-teorija nužno sadrži onaj deo logike koji smo izlagali u prvoj tački, kao i odgovarajući deo logike sa kvantifikatorima.

Jedan od tvoraca formalnih teorija, D. Hilbert, u svome PROGRAMU izgrađivanja formalnih teorija postavio je zahtev korišćenja STRIKTNE FINITNOSTI u meta-teoriji, odnosno nekorišćenja, na primer, Zornove leme, aksiome izbora, aktualne beskonačnosti i slično. Ali pomoću takve meta-teorije nije mogućno dokazati, na primer, neprotivurečnost formalne teorije brojeva. To je rezultat K. Gödela (tzv. II-a Gödelova teorema). Međutim, ako se meta-teorija proširi teorijom ordinalnih brojeva, odnosno neelementarnom teorijom skupova, onda se neprotivurečnost formalne teorije brojeva dokazuje, kao što je to prvi učinio G. Gentzen 1936. g.

Za neki rezultat koji se odnosi na neku formalnu teoriju veoma je značajno pomoću koje meta-teorije je dobijen. Ako se o ovome ne vodi računa, mogu nastati razni nesporazumi.

Meta-teorija se izlaže korišćenjem jednog dela običnog jezika, proširenog odgovarajućom matematičkom terminologijom. Taj jezik zovemo META-JEZIK. I formalna teorija ima svoj jezik, tzv. OBJEKT-JEZIK. To je *skup čiji su elementi polazni simboli formalne teorije, reči sastavljene od tih polaznih simbola, kao i konačni nizovi tih reči.* Prema tome, formule, aksiome i izvođenja pripadaju objekt-jeziku.

U prethodno navedenoj formalnoj teoriji formule *ara*, *araa* jesu u objekt-jeziku, dok je iskaz:

„formula *ara* je teorema"

u meta-jeziku. U meta-teoriji koristili smo i izvesne elemente teorije prirodnih brojeva.

Tvrđenje koje se odnosi na neku formalnu teoriju zovemo meta-teorema. Tako: „formula a r a je teorema" jeste META-TEOREMA. Umesto meta-teorema u daljem tekstu kažemo i STAV.

Obične matematičke teorije izgrađuju se često na sledeći način. Polazi se od jednog skupa polaznih (osnovnih) termina i određenog skupa rečenica sa tim terminima, tzv. AKSIOMA. Za teoreme se onda uzimaju rečenice koje su tačne pri onim interpretacijama pri kojima su i aksiome tačne; isto tako, teoreme su i sve rečenice koje se dobijaju iz aksioma primenom izvesnih logičkih pravila (koja se obično ne ističu). Za prvi slučaj kažemo da se teoreme izvode SEMANTIČKI, a za drugi — SINTAKTIČKI. Kod običnih matematičkih teorija često se prepliću ta dva načina dobijanja teorema.

Osim toga, postoji i jak stepen intuicije o skupu odnosno, u novije vreme, o klasi.[1]

Kod formalnih teorija upotreba intuicije svodi se na neizbežan minimum, a takođe se preciziraju pojmovi aksioma, teorema, izvođenja i slično.

Formalne teorije često se obrazuju sa ciljem tzv. potpunog aksiomatskog (odnosno formalnog) zasnivanja neke obične matematičke teorije.

Radi toga se formalna teorija tako izabere da elementima njenog objekt-jezika odgovaraju objekti matematičke teorije, koju formalno izgrađujemo.

U daljem izlaganju upoznaćemo više primera te vrste. Preciziranjem ovoga što smo rekli dobija se pojam glavnih INTERPRETACIJA formalne teorije.

Inače, *interpretacija neke formalne teorije je svako preslikavanje objekt-jezika te teorije u klasu objekata neke druge matematičke teorije*

Navodimo dve interpretacije posmatrane formalne teorije.

Obrazovali smo je inspirišući se sledećim tvrđenjima iz teorije celih brojeva:

a) $-1=-1, \quad -1=(-1)^3$

b) Ako je $(-1)^i=(-1)^j$, onda je $(-1)^j=(-1)^i$, gde su i, j prirodni brojevi; itd.

Sa tim u vezi, pri njenoj glavnoj interpretaciji imamo:

Interpretacija slova a je broj -1, interpretacija slova r je relacija „jednakost", a interpretacija reči a^i je broj $(-1)^i$; itd.

Za isti primer, druga interpretacija, u oznaci g, jeste sledeće preslikavanje objekt-jezika u skup prirodnih brojeva:

$$1^\circ \quad g(\mathrm{a})=1, \quad g(\mathrm{r})=3, \quad g(\mathrm{aa})=11, \quad g(\mathrm{a\,r\,aa})=1311;$$

odnosno $g(s_1\, s_2 \ldots s_k)$ (gde su s_i slova a i r) jeste prirodan broj sije su cifre u dekadnom sistemu redom $g(s_1), g(s_2), \ldots, g(s_k)$.

[1] Skup je ona klasa koja može da bude uključena u drugu klasu kao element. Tako, klasa svih skupova nije skup.

2° Ako su $g(w_1)$, $g(w_2)$, $\ldots$, $g(w_n)$ prirodni brojevi dodeljeni redom rečima $w_1, w_2, \ldots, w_n$, onda nizu reči $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dodeljujemo prirodan broj, u oznaci $g(w_1)2g(w_2)2\ldots 2g(w_n)$, čije su cifre redom cifre brojeva $g(w_i)$, kao i 2.

Na primer, nizu $a\,r\,a^3$, $a^3\,r\,a$ dodeljujemo broj 13111211131. Korišćenjem slične interpretacije Gödel je dokazao neke svoje poznate stavove.

U daljem, u vezi sa formalnim zasnivanjem običnih matematičkih teorija osnovni značaj ima formulski jezik kvantifikatorskog računa $\mathcal{K}$. Pri tome, aksiome odgovarajuće formalne teorije su određene formule računa $\mathcal{K}$. Do njih se dolazi *prevođenjem* (teksta prirodnog jezika) na formulski jezik računa $\mathcal{K}$ (slično kao na str. 48—51).

Navodimo jedan primer. *Tekst.* 1° x je skup. 2° x je klasa. 3° x je elemenat iz y. 4° x je klasa svih skupova.
Jedan prevod. 1° $S(x)$. 2° $K(x)$. 3° $x \in y$. 4° $K(x) \vee (\forall y)(S(y) \Rightarrow y \in x)$.
Objašnjenje. S, K, $\in$ su oznake za tri predikatska slova. Umesto $\in(y, x)$ stoji $y \in x$.

Napominjemo da prevođenje nije uvek svodljivo na glavnu interpretaciju računa $\mathcal{K}$, jer ona „operiše" jedino sa skupovima.

Primedba. Postoji određena sličnost između pojmova formalnih teorija i običnih matematičkih teorija.

Formalna teorija ima polazne simbole, aksiome (određene formule) — obična matematička teorija ima polazne (osnovne) termine, a aksiome su određene rečenice.

Dokaz obične matematičke teorije je konačan niz čiji je svaki član: aksioma, ranije dokazana teorema ili član za koji postoje izvesni prethodni članovi niza iz kojih se on dobija pomoću nekog pravila izvođenja (ta se pravila obično ne ekspliciraju).

Na primer, u sistemu nenegativnih realnih brojeva niz

(1) $x+y=x+y$ (aksioma) (2) $0 \leqslant 2\sqrt{xy}$ (dokazana teorema)

(3) $x+y \leqslant x+2\sqrt{xy}+y$ („sabiranjem" (1) i (2)

(4) $(\sqrt{x+y})^2 \leqslant (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ (iz (3))

(5) $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$ (iz (4) „korenovanjem")

predstavlja dokaz tvrđenja: *Ako su* x, y *nenegativni realni brojevi onda je*

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

U stvari, nema velike razlike između strogog izlaganja obične matematičke teorije i izlaganja formalne teorije.

Pojmovi formalne teorije su precizira niji i „neodređenost" koja proističe iz upotrebe prirodnog jezika svedena je na minimum.

Osnovna je razlika što se u slučaju obične matematičke teorije ne odvajaju meta-teorija i teorija.

II. ISKAZNI RAČUN $\mathcal{L}$

U ovoj glavi izlažemo jednu formalnu teoriju koju zovemo ISKAZNI RAČUN $\mathcal{L}$ ili, kratko, RAČUN $\mathcal{L}$.

Slovo $\mathcal{L}$ u vezi je sa imenom J. Łukasiewicza, od koga potiče sistem aksioma ovog računa — uprošćenje sistema koji je ranije uveo G. Frege. Inače, ta formalna teorija je u uskoj vezi sa algebrom $(\top, \perp)$. Algebru $(\top, \perp)$ zovemo GLAVNI MODEL iskaznog računa $\mathcal{L}$.

1. AKSIOME I PRVE POSLEDICE

OSNOVNI SIMBOLI računa $\mathcal{L}$ jesu:

$$\neg \quad \Rightarrow \quad (\ ) \ p \ q \ r \ p_1 \ q_1 \ r_1 \ \ldots \ p_n \ q_n \ r_n \ \ldots$$

gde je n = 1, 2, 3, ...

Simbole

$$p \ q \ r \ p_1 \ q_1 \ r_1 \ \ldots \ p_n \ q_n \ r_n \ \ldots$$

zovemo ISKAZNA SLOVA.

ISKAZNE FORMULE uvodimo sledećom definicijom.

Definicija 1. 1° *Iskazno slovo je* ISKAZNA FORMULA.

2°. *Ako su* A *i* B ISKAZNE FORMULE, *onda su i* $\neg$ A, (A $\Rightarrow$ B) ISKAZNE FORMULE.

3° ISKAZNE FORMULE *mogu se dobiti jedino pomoću konačnog broja primena* 1° i 2° *ove definicije.*

Sledećom definicijom uvodimo $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$.

Definicija 2. *Neka su* A i B *formule. Tada:*

(A $\wedge$ B) *je zamena za* $\neg$ (A $\Rightarrow \neg$ B),

(A $\vee$ B) *je zamena za* ($\neg$A $\Rightarrow$ B),

(A $\Leftrightarrow$ B) *je zamena za* ((A $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\Rightarrow$ A)).

Usvajamo slične konvencije brisanja zagrada kao u algebri $(\top, \perp)$.

AKSIOME RAČUNA $\mathcal{L}$ jesu:

A 1 $\quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$,

A 2 $\quad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$,

A 3 $\quad (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$,

gde su A, B, C proizvoljne formule.

Ovo su tzv. *shema-aksiome*, pošto svaka od njih ne predstavlja samo po jednu formulu, jer A, B, C mogu biti bilo koje formule. Tako, na primer, aksioma je svaka od formula

$$p \Rightarrow (p \Rightarrow p), \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow p), \quad (\neg q \Rightarrow \neg (p \Rightarrow q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q),$$

Jedino PRAVILO IZVOĐENJA računa $\mathcal{L}$ je tzv. MODUS PONENS:

$$\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$$

(čita se: „Iz A i A $\Rightarrow$ B izvodimo B“ ili „B proizlazi po modus ponensu iz A i A $\Rightarrow$ B“). Umesto reči „po modus ponensu“ upotrebljavamo i skraćenicu „po MP“.

Prema definiciji izvođenja iz prethodne glave, izvođenje u računu $\mathcal{L}$ je svaki konačan niz formula

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

čija svaka formula A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ zadovoljava uslov

1) A_i je aksioma; ili

2) A_i proizlazi po modus ponensu iz neke dve prethodne formule toga niza.

Navodimo jedan primer. Neka je A neka iskazna formula. Uočimo sledeći niz:

$$(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$$

$$A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$

$$A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$

$$A \Rightarrow A$$

čije ćemo članove zvati redom A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Formula A_1 je A2; u njoj treba umesto A, B, C redom staviti A, A $\Rightarrow$ A, A. Formula A_2 je A1; u njoj treba umesto A, B redom staviti A, $A \Rightarrow A$. Formula A_3 se dobija iz A_1 i A_2 po modus ponensu, a formula A_4 je A1. Najzad, formula A_5 dobija se iz A_3 i A_4 po modus ponensu. Na taj način dokazali smo da je A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 izvođenje odnosno ujedno da je A_5 teorema. Formulisaćemo to i posebno.

Lema 1. *Ako je* A *bilo koja iskazna formula, onda*

$$\vdash A \Rightarrow A.$$

2. STAV DEDUKCIJE

U skladu sa definicijom iz prethodne glave u računu $\mathcal{L}$ *formula* F *je posledica skupa formula* $\mathcal{F}$ *ako postoji niz formula*

$$B_1, B_2, \ldots, B_m$$

tako da je $B_m = F$ *i da svaka formula* B_i *toga niza ispunjava uslov:*

1° B_i *je aksioma; ili*

2° B_i *je jedna od formula skupa* $\mathcal{F}$*; ili*

2° B_i *se dobija iz neke dve prethodne formule toga niza po modus ponensu.*

Ako je F posledica formula skupa $\mathcal{F}$, onda pišemo $\mathcal{F} \vdash F$, a u slučaju $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ pišemo i $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash F$. Formule skupa $\mathcal{F}$ zovemo hipoteze, a niz $B_1, B_2, \ldots, B_m$ zovemo IZVOĐENJE (PO HIPOTEZAMA).

Ako je $\mathcal{F} \vdash F$, kažemo i: F je IZVODLJIVA iz $\mathcal{F}$. Ako kažemo F je m—IZVODLJIVA iz $\mathcal{F}$, to znači da jedno izvođenje za $\mathcal{F} \vdash F$ ima m članova. Ovaj pojam uvodimo radi preglednosti dokaza sledećeg osnovnog stava — STAVA DEDUKCIJE (Herbrand, 1930).

Stav 1. Ako je $\mathcal{F}$ neki skup formula i ako $\mathcal{F}, A \vdash B$, onda

$$\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B.$$

Primedba. $\mathcal{F}, A \vdash B$ znači $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B$, a slično obeležavanje usvajamo i u tekstu dokaza.

Dokaz. Označimo sa J(n) sledeći iskaz (koji zavisi od prirodnog broja n):

Za svaku formulu B, ako je B n-izvodljiva iz $\mathcal{F}$, A, onda je formula $A \Rightarrow B$ izvodljiva iz $\mathcal{F}$.

Indukcijom dokazujemo da je J(n) tačan iskaz za svaki prirodan broj n, čime će stav biti dokazan.

Neka je $n=1$. Tada jedno izvođenje formule B iz $\mathcal{T}$, A ima tačno jedan član, pa taj član mora da bude B. Ako je $B \in \mathcal{T}$ ili ako je B aksioma, s obzirom da je $\vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, po modus ponensu dobijamo $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow B$. U slučaju kad je $B = A$, imamo $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow B$, jer je $\vdash A \Rightarrow A$ (lema 1).

Neka je n proizvoljan prirodan broj. Pretpostavimo da je J(k) tačan za sve k koji su manji od n. Dokazaćemo da je iskaz J(n) tačan.

Neka je $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$ jedno izvođenje formule B iz $\mathcal{T}$, A, gde je $B_n = B$. Tada postoje četiri mogućnosti:

1° B je aksioma.

2° B je iz $\mathcal{T}$.

3° B je jednaka A.

4° Postoje i i j koji su manji od n, tako da je formula B_j jednaka $B_i \Rightarrow B$.

U slučajevima 1, 2, 3 dobijamo $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow B$ na potpuno sličan način kao kada je $n=1$. U slučaju 4 imamo: $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow B_i$, $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow B_j$ (po indukcijskoj hipotezi). Prema aksiomi A2 imamo

$$\vdash (A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B)),$$

pa po MP (dvostruka primena) dobijamo $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow B$.

Dakle, prema principu matematičke indukcije proizlazi da je J(n) tačan iskaz za svaki prirodan broj n. $\blacksquare$

U slučaju kada je $n=1$, tačno je: *ako* $A_1 \vdash A$, *onda* $\vdash A_1 \Rightarrow A$, što inače proizlazi iz navedenog dokaza stava dedukcije.

Posledica stava dedukcije je sledeće tvrđenje:

Ako $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$, *onda* $\vdash A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow \ldots (A_n \Rightarrow A)\ldots))$.

Navedeni stav dedukcije ima značajnu ulogu u formiranju raznih teorema računa $\mathcal{L}$, kao što je u građenju tautologija odgovarajuću ulogu imala slična teorema algebre $(\top, \bot)$.

Navodimo neke primere.

Primer 1. Očigledno B, $A \vdash A$, gde su A i B bilo koje formule. Prema stavu dedukcije redom dobijamo

$$B \vdash A \Rightarrow A, \quad \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow A).$$

2. $A,\ A \Rightarrow B,\ \ B \Rightarrow C \vdash C$, jer je niz

$$A,\ A \Rightarrow B,\ \ B,\ B \Rightarrow C,\ C$$

izvođenje po hipotezama (prva, druga i četvrta formula su hipoteze, treća se dobija po modus ponensu iz prethodne dve, dok se poslednja dobija po modus ponensu iz treće i četvrte formule niza).

Prema stavu dedukcije, iz

$$A,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash C$$

dobijamo

$$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C.$$

3. Dokazaćemo $A,\ \neg A \vdash B$, gde su A i B bilo koje formule.
Odgovarajuće izvođenje po hipotezama je niz

(1) $\neg A$	(Hipoteza)
(2) $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	(A1)
(3) $\neg B \Rightarrow \neg A$	(Iz (1) i (2) po MP)
(4) $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(A3)
(5) $A \Rightarrow B$	(Iz (3) i (4) po MP)
(6) A	(Hipoteza)
(7) B	(Iz (5) i (6) po MP)

Iz $A,\ \neg A \vdash B$ dobijamo primenom stava dedukcije

$$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Rezultate primera 2 i 3 formulišemo i odvojeno.

Lema 2. *Ako su* A, B, C *bilo koje formule, onda:*

$$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C.$$

Lema 3. *Ako su* A, B *bilo koje formule, onda* $A,\ \neg A \vdash B$, *kao i* $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

Podsećamo na neka opšta svojstva pojma dedukcije koja dalje često koristimo.

(1) *Ako* $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$, *onda* $A_1, A_2, \ldots, A_n,$

$$A_{n+1}, \ldots, A_{n+k} \vdash A.$$

(2) *Ako* $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$ *i* $A \vdash B$,

onda $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$.

(3) *Ako* $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$ *i ako su* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *teoreme, onda je i* A *teorema.*

Specijalno, prema ovom za iskazni račun L imamo:

(3a) *Ako su* A i $A \Rightarrow B$ *teoreme, onda je* i B *teorema.*

(3b) *Ako su* $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow C$ *teoreme, onda je i* $A \Rightarrow C$ *teorema.*

Ističemo još jednu činjenicu. Ako je $A_1, A_2, \ldots, A_n$ niz čiji su članovi aksiome, teoreme ili su takvi da se mogu dobiti od nekih prethodnih članova po MP, onda je formula A_n teorema; jer se očigledno taj niz može upotpuniti tako da je izvođene teoreme A_n. Dalje često upotrebljavamo i takve nizove čiji pojedini članovi, dakle, mogu biti već dokazane teoreme.

OSNOVNE LEME

Radi daljeg izgrađivanja računa $\mathcal{L}$ potrebne su nam neke leme koje izvodimo u ovoj tački.

Lema 4. *Ako su* A, B *bilo koje formule, onda su sledeće formule teoreme:*

(a) $\neg\neg A \Rightarrow A$, b) $A \Rightarrow \neg\neg A$. (c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$,

(d) $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B))$.

Dokaz. (a) Prethodno dokazujemo $\neg\neg A \vdash A$. Odgovarajuće izvođenje je

(1)	$\neg\neg A$	(Hipoteza)
(2)	$\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$	(Lema 3)
(3)	$\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A$	(Iz (I) i (2) po MP)
(4)	$(\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$	(A3)
(5)	$\neg\neg A \Rightarrow A$	(Iz (3) i (4) po MP)
(6)	A	(Iz (1) i (5) po MP)

gde u zagradi stoji obrazloženje da je niz (1), ..., (6) izvođenje po hipotezama. Prema stavu dedukcije iz $\neg\neg A \vdash A$ dobijamo neposredno $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$.

(b) Prema (a) imamo $\vdash \neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$. Pošto je po A3:

$$(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A),$$

po MP dobijamo

$$\vdash A \Rightarrow \neg\neg A.$$

(c) Dokazujemo prethodno $A \Rightarrow B,\ \neg\neg A \vdash \neg\neg B$. Izvođenje je niz

(1)	$A \Rightarrow B$	(Hipoteza)
(2)	$\neg\neg A$	(Hipoteza)
(3)	$\neg\neg A \Rightarrow A$	(Prema (a))
(4)	A	(Iz (2) i (3) po MP)
(5)	B	(Iz (1) i (4) po MP)
(6)	$B \Rightarrow \neg\neg B$	(Prema (b))
(7)	$\neg\neg B$	(Iz (5) i (6) po MP)

Iz $A \Rightarrow B,\ \neg\neg A \vdash \neg\neg B$, prema stavu dedukcije, neposredno dobijamo

(8) $$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B).$$

Kako je

(9) $$\vdash (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad (A\,3),$$

prema (8) i lemi 2 dobijamo

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

(d) Kako $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$, po stavu dedukcije dobijamo

(10) $$\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B).$$

Na osnovu (c) je

(11) $$\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B)),$$

pa je prema lemi 2

$$\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B)). \ \blacksquare$$

Lema 5. *Ako su* A *i* B *bilo koje formule, onda*

$$A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B \vdash B.$$

Dokaz. Izvodimo prethodno $A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow B$. Izvođenje je niz

(1)	$A \Rightarrow B$	(Hipoteza)
(2)	$\neg A \Rightarrow B$	(Hipoteza)
(3)	$(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg\neg A)$	(Lema 4 (c))
(4)	$\neg B \Rightarrow \neg\neg A$	(Iz (2) i (3) po MP)
(5)	$\neg\neg A \Rightarrow A$	(Lema 4 (a))
(6)	$\neg B \Rightarrow A$	(Iz (4) i (5) prema lemi 2)
(7)	$\neg B \Rightarrow B$	(Iz (1) i (6) prema lemi 2)

Izvešćemo takođe i $A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B \vdash C \Rightarrow B$, gde je C bilo koja formula.

Prema lemi 3 imamo

(8) $$\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C).$$

Prema aksiomi 2 je

(9) $$\vdash (\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C)),$$

pa iz (7), (8), (9) dvostrukom primenom MP dobijamo posledicu

(10) $$\neg B \Rightarrow \neg C.$$

Prema aksiomi 3 je

(11) $$\vdash (\neg B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (C \Rightarrow B),$$

pa iz (10) i (11) po MP dobijamo $C \Rightarrow B$. Dakle, $A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B \vdash C \Rightarrow B$. Pošto je $\vdash B \Rightarrow B$, uzimanjem umesto C formule $B \Rightarrow B$ dobijamo po MP da $A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B \vdash B$. ∎

Sledeća lema je neposredna posledica prethodnih lema. Uvodimo je samo radi preglednijeg izražavanja u dokazu stava o potpunosti iskaznog računa.

Lema 6. *Ako su* A *i* B *bilo koje formule, onda*

(a) $A, B \vdash A \Rightarrow B$, (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$,

(c) $\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$, (d) $\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$.

Dokaz. (a) Izvođenje je niz

B	(Hipoteza)
$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(A1)
$A \Rightarrow B$	(Iz dve prethodne po MP)

(b) Prema lemi 4 (d) je $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B))$, pa odatle po MP neposredno proizlazi $A, \neg B \vdash \neg (A \Rightarrow B)$.

(c) i (d) neposredno proizlaze redom iz leme 3, jer je prema njoj $\neg A \vdash A \Rightarrow B$, odakle i $\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$, odnosno $\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$. ∎

4. GLAVNA INTERPRETACIJA. POTPUNOST. NEPROTIVUREČNOST. ODLUČIVOST

Glavna interpretacija računa $\mathcal{L}$ je algebra $(\top, \bot)$; u tom slučaju znaci $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ interpretiraju se kao odgovarajuće operacije algebre $(\top, \bot)$, dok se iskazna slova $p, q, r, \ldots$ interpretiraju kao elementi skupa $\{\top, \bot\}$.

Ako je A neka formula, onda svakoj interpretaciji njenih iskaznih slova — vrednosti tih slova — odgovara VREDNOST formule. Formulu koja uvek ima vrednost $\top$ zovemo tautologija.

U algebri $(\top, \bot)$ i simboli operacija $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ bili su polazni simboli.[1] Međutim, prema uvedenim definicijama, proizlazi da ako se neka formula algebre $(\top, \bot)$ preslika na odgovarajuću formulu računa $\mathcal{L}$, onda je ta formula tautologija algebre $(\top, \bot)$ ako i samo ako je i slika te formule u računu $\mathcal{L}$ tautologija. Smatramo da su slike, na primer, formula $\mathrm{p}, \mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}, \neg (\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q})$ redom formule $p, p \Rightarrow q, \neg (p \Rightarrow q)$

Neposredno se zaključuje da važi sledeći stav.

Stav 2. *Svaka teorema računa $\mathcal{L}$ je tautologija.*

Dokaz. Aksiome A 1, A 2, A 3 su tautologije, što se neposredno proverava.

Ako su formule A i $A \Rightarrow B$ tautologije, onda je i formula B tautologija prema definiciji operacije $\Rightarrow$ u algebri $(\top, \bot)$. Ovo iskazujemo i ovako: modus ponens čuva tautologije. Zbog ovoga ako je niz $A_1, A_2, \ldots, A_n$ izvođenje, onda je i A_n tautologija. Dakle, teorema računa $\mathcal{L}$ je tautologija. ∎

---

[1] I u toj algebri mogli smo formule definisati isto kao u računu $\mathcal{L}$.

Isto tako, i svaka tautologija je teorema. Za dokaz je potrebna lema 7.

Neka je A formula i neka su $u_1, u_2, \ldots, u_k$ različita iskazna slova, među kojima se nalaze sva iskazna slova formule A (dakle, svi u_i ne moraju biti slova formule A). Označimo, dalje, sa v jednu određenu vrednost $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)$ uređene k-torke $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Neka simbol u_i', $1 \leqslant i \leqslant k$ označava formulu u_i ili $\neg u_i$, prema tome da li je $\tau_i = \top$ ili $\tau_i = \bot$. Slično, neka A' bude A ili $\neg A$, prema tome da li A dobija vrednost $\top$ ili $\bot$ kada iskazna slova dobiju pomenutu vrednost v.

Lema 7. *Za bilo koju vrednost v važi:*

$$u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash A'. \tag{1}$$

Primedba. Pre dokaza navodimo jedan primer za ilustraciju. Neka je A formula $p \Rightarrow q$ i neka su $u_1, u_2, \ldots, u_k$ redom slova p, q. Tada svakoj vrednosti tih slova odgovara po jedno tvrđenje oblika (1). Navodimo ih:

$$p, q \vdash p \Rightarrow q$$

$$p, \neg q \vdash \neg (p \Rightarrow q)$$

$$\neg p, q \vdash p \Rightarrow q$$

$$\neg p, \neg q \vdash p \Rightarrow q$$

U ovom specijalnom slučaju lema 7 je direktna posledica leme 6. U stvari, lema 6 ima osnovnu ulogu u dokazu leme 7.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom prema broju n $(=0, 1, 2, \ldots)$, koji je jednak broju pojavljivanja znakova $\neg$ i $\Rightarrow$ u formuli A. U daljem je v jedna određena vrednost.

Ako je $n=0$, formula A mora biti neko iskazno slovo u_1 i tada (1) glasi

$$u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash u_1',$$

što je tačno, jer $u_1' \vdash u_1'$.

Neka je $n>0$ i neka je lema tačna kad god je broj pojavljivanja pomenutih znakova jednak j i pri tome je $j<n$. Mogu nastupiti sledeći slučajevi.

Slučaj 1. Formula A je oblika $\neg B$, gde je B neka formula. B ima ista iskazna slova kao A, ali je njen broj pojavljivanja znakova $j=n-1$, dakle manji od n, pa je

$$u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash B'. \tag{2}$$

Izvešćemo sledeće:

(3) $$B' \vdash A', \quad \text{odnosno} \quad B' \vdash (\neg B)'.$$

Zaista, ako formula B dobija vrednost $\top$, onda (3) glasi $B \vdash \neg\neg B$, a ovo proizlazi iz leme 4 (a); međutim, ako B dobija vrednost $\perp$, onda (3) glasi $\neg B \vdash \neg B$, što je tačno. Iz (2) i (3) proizlazi

$$u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash A',$$

pa je dokaz završen u ovom slučaju.

Slučaj 2. Formula A je oblika $(B \Rightarrow C)$. Prema indukcijskoj hipotezi je

(4) $$u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash B'; \quad u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash C',$$

jer formule B i C imaju brojeve pojavljivanja znakova $\Rightarrow$, $\neg$ manje od n.

Izvodimo prethodno

(5) $$B', C' \vdash A', \quad \text{odnosno} \quad B', C' \vdash (B \Rightarrow C)'.$$

Prema tome koje vrednosti uzimaju formule B, C, $B \Rightarrow C$, (5) se svodi na jedan od slučajeva

$$B, C \vdash B \Rightarrow C; \quad B, \neg C \vdash \neg (B \Rightarrow C);$$

$$\neg B, C \vdash B \Rightarrow C; \quad \neg B, \neg C \vdash B \Rightarrow C,$$

od kojih je svaki tačan prema lemi 6. Iz (4) i (5) neposredno dobijamo

$$u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash A',$$

pa je indukcijski dokaz završen. ∎

Stav 3. *(Stav potpunosti)*

Formula iskaznog računa $\mathcal{L}$ je tautologija ako i samo ako je teorema.

Dokaz. Iz stava 2 proizlazi dokaz jednog dela tvrđenja. Ostaje da se dokaže da je svaka tautologija teorema. Dokaz koji navodimo pripada L. Kalmáru.

Neka je A neka tautologija i neka su $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sva njena različita slova. Tada za svaku vrednost tih slova imamo (lema 7):

(6) $$u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash A.$$

Za sve one vrednosti v iskaznih slova za koje je vrednost slova u_k jednaka $\top$ imamo

(7) $$u_1', u_2', \ldots, u'_{k-1}, u_k \vdash A,$$

a za sve one vrednosti istih slova za koje u_k dobija vrednost $\perp$, prema (6), dobijamo

(8) $$u_1', u_2', \ldots, u_{k-1}', \neg u_k \vdash A.$$

Iz (7) i (8), prema stavu dedukcije, dobijamo

$$u_1', u_2', \ldots, u_{k-1}' \vdash u_k \Rightarrow A; \quad u_1', u_2', \ldots, u_{k-1}' \vdash \neg u_k \Rightarrow A,$$

odakle, prema lemi 5, dobijamo

(9) $$u_1', u_2', \ldots, u_{k-1}' \vdash$$

i pri tom (9) važi za sve vrednosti slova $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$. Na taj način iz (6) dobijamo (9), a iz (9) slično imamo

$$u_1', u_2', \ldots, u'_{k-2} \vdash A$$

za sve vrednosti slova $u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}$. Posle konačno mnogo koraka, na taj način dobijamo $\vdash A$. ∎

Pošto postoji postupak za utvrđivanje da li je neka formula tautologija ili nije (postupak, uostalom, izvire iz same definicije tautologije), prema dokazanom stavu *u računu $\mathcal{L}$ postoji postupak kojim može da se utvrdi da li je unapred data formula A teorema ili nije.*

Ovu činjenicu ističemo u stavu.

Stav 4. *Iskazni račun $\mathcal{L}$ je odlučiv.*

Račun $\mathcal{L}$ je pored svih navedenih svojstava, i neprotivurečan, i to u dva smisla, koja prethodno definišemo za bilo koju formalnu teoriju.

Neka je $\mathcal{T}$ neka formalna teorija i neka je $\binom{F}{\overline{F}}$ neko preslikavanje u skupu njenih formula (original je F, slika je $\overline{F}$). Osim toga neka postoji postupak formiranja $\overline{F}$ pomoću formule F

Definicija 3. Formalna teorija $\mathcal{T}$ je neprotivurečna u odnosu na preslikavanje $\binom{F}{\overline{F}}$ ako ne postoji nijedan par formula A i $\overline{A}$ takav da su A i $\overline{A}$ teoreme teorije $\mathcal{T}$.

Definicija 4. *Formalna teorija* $\mathcal{T}$ *je* APSOLUTNO NEPROTIVUREČNA *ako postoji bar jedna formula te teorije koja nije teorema.*

U slučaju iskaznog računa neprotivurečnost u odnosu na preslikavanje $\begin{pmatrix} A \\ \neg A \end{pmatrix}$ zovemo, kratko, NEPROTIVUREČNOST. Važi sledeći stav.

Stav 5. *Iskazni račun je neprotivurečan.*

Dokaz. Neka je, obrnuto, račun $\mathcal{L}$ protivurečan, odnosno neka postoje formule A i $\neg$ A tako da su obe teoreme. Prema stavu 2, obe formule su tautologije. Međutim, to je nemoguće, jer nije $\neg \top = \top$. ∎

Iskazni račun $\mathcal{L}$ je i apsolutno neprotivurečan. Pre dokaza navodimo jedan stav čija je neposredna posledica apsolutna neprotivurečnost iskaznog računa.

Stav 6. Neka je $\mathcal{T}$ formalna teorija, koja među polaznim simbolima ima i znake $\Rightarrow$, $\neg$ i u kojoj je jedno pravilo izvođenja modus ponens. Ako je u toj teoriji

$$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B),$$

gde su A i B bilo koje njene formule, onda je ta teorija neprotivurečna u odnosu na preslikavanje $\begin{pmatrix} F \\ \neg F \end{pmatrix}$ ako i samo ako je apsolutno neprotivurečna.

Dokaz. Neka je, najpre, teorija $\mathcal{T}$ neprotivurečna u odnosu na preslikavanje $\begin{pmatrix} F \\ \neg F \end{pmatrix}$. Ako ne bi bila apsolutno neprotivurečna, onda bi svaka formula bila teorema, pa između ostalog i izvesne dve formule oblika A, $\neg$ A. Međutim, onda $\mathcal{T}$ nije neprotivurečna u odnosu na preslikavanje $\begin{pmatrix} F \\ \neg F \end{pmatrix}$. Dakle, iz neprotivurečnosti u odnosu na $\begin{pmatrix} F \\ \neg F \end{pmatrix}$ proizlazi apsolutna neprotivurečnost.

Neka je, zatim, teorija $\mathcal{T}$ apsolutno neprotivurečna. Ako ne bi bila neprotivurečna u odnosu na preslikavanje $\begin{pmatrix} F \\ \neg F \end{pmatrix}$, onda bi postojale formule A, $\neg$ A, koje su obe teoreme. Međutim, ako je B proizvoljna formula iz

$$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B),$$

dvostrukom primenom modus ponensa dobija se $\vdash$ B, pa teorija $\mathcal{T}$ nije apsolutno neprotivurečna, što predstavlja kontradikciju. Tako smo iz apsolutne neprotivurečnosti izveli neprotivurečnost u odnosu na $\binom{F}{\neg F}$. ■

Kako iskazni račun $\mathcal{L}$ ispunjava uslove prethodnog stava, prema stavu 5, dobijamo sledeći stav.

Stav 7. *Iskazni račun $\mathcal{L}$ je apsolutno neprotivurečan.*

Prema stavu potpunosti, svaka tautologija je teorema. *Dokazi stavova* 1, 3, *kao i dokazi lema* 1—7 *jesu takvi da daju ideju kako da se za unapred datu formulu* A, *koja je tautologija, obrazuje njeno izvođenje u računu* $\mathcal{L}$. U daljem izlaganju dajemo neke primere na kojima to detaljnije objašnjavamo.

I. Navodimo primer na kome se od izvođenja za $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_n \vdash F$ obrazuje izvođenje za $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1} \vdash F_n \Rightarrow F$. Pri obrazovanju novog izvođenja na osnovu starog osnovno je imati na umu *dokaz* stava dedukcije.

Neka su A, B, C neke formule. Tada

(1) $$A,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash C.$$

Jedno izvođenje za (1) je

(2)	A	(Hipoteza)
(3)	$A \Rightarrow B$	(Hipoteza)
(4)	B	(Iz (2) i (3) po MP)
(5)	$B \Rightarrow C$	(Hipoteza)
(6)	C	(Iz (4) i (5) po MP).

Izvodimo sledeće:

$\mathcal{G} \vdash A \Rightarrow A$; $\mathcal{G} \vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$; $\mathcal{G} \vdash A \Rightarrow B$; $\mathcal{G} \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$; $\mathcal{G} \vdash A \Rightarrow C$,

gde je $\mathcal{G}$ skup formula $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow C$.

1° Važi $\mathcal{G} \vdash A \Rightarrow A$, jer je $\vdash A \Rightarrow A$. Može se eventualno ponoviti dokaz leme 1. Ovde nastupa mogućnost 3 u dokazu stava 1.

2° Izvođenje za $\mathcal{G} \vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ je

(7)	$A \Rightarrow B$	(Hipoteza iz $\mathcal{G}$)
(8)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow B))$	(A1)
(9)	$A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(Iz (7) i (8) po MP)

Ovde je nastupila mogućnost 2 dokaza stava 1.

3° Izvođenje za $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$ je

(10)	$A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(Izvedena iz $\mathcal{F}$)
(11)	$(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$	(A 2)
(12)	$(A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(Iz (10) i (11) po MP)
(13)	$A \Rightarrow A$	(Lema 1)
(14)	$A \Rightarrow B$	(Iz (12) i (13) po MP)

Imali smo mogućnost 4 iz dokaza stava 1.[1]

4° Izvođenje za $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ je

(15)	$B \Rightarrow C$	(Hipoteza)
(16)	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$	(A1)
(17)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	(Iz (15) i (16) po MP)

(mogućnost 2 iz dokaza stava 1).

5° Izvođenje za $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow C$ (mogućnost 4 dokaza stava 1) je

(18)	$A \Rightarrow B$	(Izvedena iz $\mathcal{F}$)
(19)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	(Izvedena iz $\mathcal{F}$)
(20)	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A 2)
(21)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	(Iz (19) i (20) po MP)
(22)	$A \Rightarrow C$	(Iz (18) i (21) po MP)

Navedeni primer ilustruje kako se, *znajući izvođenje za* $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_n \vdash F$, *može obrazovati izvođenje za* $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1} \vdash F_n \Rightarrow F$.

II. Navodimo primer na kome se za datu formulu A obrazuju izvođenja za $u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash A'$, za bilo koju vrednost v slova $u_1, u_2, \ldots, u_k$ (videti iskaz leme 7).

Neka je A sledeća formula $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$. Za slova $u_1, u_2, \ldots, u_k$ uzimamo p, q. Inspirišući se dokazom leme 7, obrazovaćemo sva izvođenja za $p', q' \vdash F'$, gde F može biti bilo koja podformula formule A, odnosno izvođenja za

(1) $\quad p', q' \vdash p'$; $p', q' \vdash (\neg q)'$; $p', q' \vdash q'$; $p', q' \vdash (\neg p)'$;

$p', q' \vdash (p \Rightarrow \neg q)'$; $p', q' \vdash (q \Rightarrow \neg p)'$; $p', q' \vdash A'$.

Zbog obimnosti postupka, uradićemo to samo za jednu vrednost v slova p, q i to za vrednost $(\top, \bot)$. Tada (1) glasi

(2) $\quad p, \neg q \vdash p$; $p, \neg q \vdash \neg q$; $p, \neg q \vdash \neg q$; $p, \neg q \vdash \neg \neg p$;

$p, \neg q \vdash p \Rightarrow \neg q$; $p, \neg q \vdash q \Rightarrow \neg p$:, $p, \neg q \vdash A$.

[1] Napominjemo da je jedno izvođenje za $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$ sledeće: $A \Rightarrow B$ (hipoteza iz $\mathcal{F}$).

Navodimo izvođenja samo za neke slučajeve.

1° Izvođenje za $p, \neg q \vdash \neg\neg p$:

p	(Hipoteza)
$p \Rightarrow \neg\neg p$	(Lema 4)
$\neg\neg p$	(Iz prethodnih po MP)

2° Izvođenje za $p, \neg q \vdash p \Rightarrow \neg q$, prema dokazu leme 6:

$\neg q$	(Hipoteza)
$\neg q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$	(Al)
$p \Rightarrow \neg q$	(Iz prethodnih po MP)

3° Izvođenje za $p, \neg q \vdash q \Rightarrow \neg p$, prema dokazu leme 6 ili dokazu leme 3:

$\neg q$	(Hipoteza)
$\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$	(Lema 3)
$q \Rightarrow \neg p$	(Iz prethodnih po MP)

4° Izvođenje za $p, \neg q \vdash$ A, prema dokazu leme 6:

$q \Rightarrow \neg p$	(Izvedeno iz hipoteza)
$(q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p))$	(Al)
$(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$	(Iz prethodnih po MP)

Navedeni primer ilustruje kako *mogu da se formiraju* 2^k *izvođenje za*

$$u_1', u_2', \ldots, u'_k \vdash \mathrm{A}',$$

gde simboli imaju značenja kao u lemi 7.

III. Neka je A neka formula koja je tautologija. Ako je v vrednost njenih iskaznih slova, onda mogu da se formiraju ukupno 2^k izvođenja za

$$u_1', u_2', \ldots, u_k' \vdash \mathrm{A}$$

slično kao u primeru II.

Dokaz stava 3 daje ideju kako da se obrazuje *niz koji je izvođenje formule* A *u računu* $\mathcal{L}$.

Skiciramo postupak na primeru tautologije A:

$$(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p).$$

Mogu se obrazovati izvođenja za

$$p, q \vdash \mathrm{A} \qquad \neg p, q \vdash \mathrm{A}$$

$$p, \neg q \vdash \mathrm{A} \qquad \neg p, \neg q \vdash \mathrm{A},$$

pa se mogu obrazovati izvođenja i za

$$p \vdash q \Rightarrow A \qquad \neg p \vdash q \Rightarrow A$$

$$p \vdash \neg q \Rightarrow A \qquad \neg p \vdash \neg q \Rightarrow A.$$

Prema lemi 5, može se obrazovati izvođenje za $q \Rightarrow A,\ \neg q \Rightarrow A \vdash A$, pa se onda mogu obrazovati i izvođenja za $p \vdash A$, $\neg p \vdash A$. Odavde proizlazi da možemo obrazovati izvođenja za $\vdash p \Rightarrow A$, $\vdash \neg p \Rightarrow A$, odnosno, prema lemi 5, i za $\vdash A$.

Najzad, primetimo da se znaci $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$ mogu otkloniti koristeći definicije kojima smo ih uveli.

Iskazni račun $\mathcal{L}$ ima i razne druge algebarske interpretacije osim algebre $(\top, \bot)$. Navodimo jednu od njih.

Neka je E neki skup i neka je $\mathcal{P}$(E) skup svih podskupova skupa A, tzv. PARTITIVNI skup skupa E. Znake $\vee$, $\wedge$, $\neg$ interpretirajmo redom kao skupovne operacije sa imenima: unija, presek, komplement (u odnosu na E). Kao interpretacije formula $A \Rightarrow B$ i $A \Leftrightarrow B$ uzimamo interpretacije formula

$$\neg A \vee B \text{ odnosno } (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B).$$

Ako se iskazna slova interpretiraju kao podskupovi skupa E, onda svakoj vrednosti tih slova odgovara vrednost formule koja je neki podskup skupa E. Pri tom važi stav sličan stavu potpunosti, koji smo dokazali.

Neka formula iskaznog računa $\mathcal{L}$ *je teorema ako i samo ako je vrednost formule uvek jednaka* E.

Ovo je jedna POLIVALENTNA INTERPRETACIJA računa $\mathcal{L}$. Za slučaj kada je E jednočlan skup, onda je $\mathcal{P}$(E) dvočlan, jer je $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset, E\}$. Ako još $\emptyset$ i E označimo redom $\bot$ i $\top$, može neposredno da se zaključi da se opisana interpretacija svodi do na razliku u oznakama na glavnu interpretaciju iskaznog računa.

5. NEZAVISNOST AKSIOMA RAČUNA $\mathcal{L}$

U formalnoj teoriji za neku aksiomu kažemo da je NEZAVISNA od drugih aksioma ako ta aksioma nije teorema druge teorije koja se dobija iz polazne teorije izostavljanjem te aksiome.

U računu $\mathcal{L}$ *svaka od aksioma je nezavisna od drugih*, kao što se zaključuje iz sledećeg dokaza.

(1) Dokaz nezavisnosti A1 od A2 i A3. U skupu S čiji su elementi 0, 1, 2 definišemo operacije $\Rightarrow$ i $\neg$ pomoću tablica

	$\neg$
0	1
1	1
2	0

$\Rightarrow$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	0
2	0	0	0

Neka je A proizvoljna iskazna formula. Ako znake $\Rightarrow$, $\neg$ interpretiramo kao navedene operacije i ako slova interpretiramo kao elemente 0, 1, 2, onda svakoj vrednosti tih slova odgovara vrednost formule A. Formulu A nazovimo *istaknuta* ako uvek ima vrednost 0. Neposrednim proveravanjem može se zaključiti da su A2 i A3 istaknute. Prema definiciji operacije $\Rightarrow$ proizlazi da ako A, A $\Rightarrow$ B imaju vrednost 0, onda mora i B da ima vrednost 0. Zato kažemo i: modus ponens čuva *istaknutost*.

Prema tome, sve posledice A 1 i A 2, odnosno teoreme teorije čije su aksiome A 1 i A 2 i modus ponens pravilo izvođenja, jesu istaknute formule. Međutim, A 1 nije istaknuta jer, na primer, $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ dobija vrednost 2 kada p, q dobijaju vrednosti redom 1, 2. Stoga je formula A1 nezavisna od A 2 i A 3.

(2) Dokaz nezavisnosti A 2 od A 1 i A 3. Ovaj dokaz je sličan prethodnom. U skupu čiji su elementi 0, 1, 2 definišemo operacije $\Rightarrow$ i $\neg$ pomoću tablica

	$\neg$
0	1
1	1
2	1

$\Rightarrow$	0	1	2
0	0	2	1
1	0	2	0
2	0	0	0

Ako za proizvoljnu iskaznu formulu A znake $\Rightarrow$, $\neg$ interpretiramo kao navedene operacije, a iskazna slova kao 0, 1, 2, onda svakoj vrednosti iskaznih slova odgovara vrednost formule A.

Formulu A nazovimo *zapažena* ako ima uvek vrednost 0. Ako su A i A $\Rightarrow$ B zapažene, prema definiciji operacije $\Rightarrow$, proizlazi da je i formula B zapažena. Dakle, modus ponens čuva *zapaženost*. Neposrednim proveravanjem se zaključuje da su formule A 1 i A 3 zapažene. Ako A 2 nije nezavisna od A 1 i A 3 onda je ona zapažena. Međutim, formula $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ nije zapažena, jer uzima vrednost 1 ako slova p, q, r uzmu redom vrednosti 0, 2, 2. Stoga je formula A 2 nezavisna od A 1 i A 3.

(3) Dokaz nezavisnosti A 3 od A 1 i A 2. Sve posledice aksioma A 1 i A 2 su izvesne tautologije. U tim tautologijama može da učestvuje i znak $\neg$. Neka za formulu F simbol $g(\mathrm{F})$ označava formulu dobijenu iz formule F brisanjem svih znakova $\neg$. Tautologije F, koje su posledice A 1 i A 2, imaju svojstvo — što se lako dokazuje — da su za njih i formule $g(\mathrm{F})$ tautologije. Aksioma A 3 nije posledica od A 1 i A 2, jer ona nema opisano svojstvo odnosno $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ jeste tautologija, dok $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ nije.

6. DRUGE AKSIOMATIZACIJE ISKAZNOG RAČUNA

Postoje razni načini aksiomatizacije iskaznog računa. Oni se razlikuju među sobom po izboru polaznih operacijskih simbola, aksioma, kao i pravila izvođenja.

Navodimo nekoliko primera u kojima su polazni simboli operacija neki od $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$.

1° Polazni simboli operacija su $\vee$ i $\neg$. $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ je po definiciji $\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$. Aksiome su

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A};\ \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B};\ \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{B} \vee \mathrm{A};$$
$$(\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}) \Rightarrow (\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{C})$$

(A, B, C su proizvoljne formule) a pravilo izvođenja MP. Ovaj sistem tretiraju Hilbert i Ackermann.

2° Polazni simboli operacija su $\wedge$ i $\neg$ dok je $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ po definiciji $\neg(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$. Aksiome su

$$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} \wedge \mathrm{A};\ \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A};\ (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\neg(\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \Rightarrow \neg(\mathrm{C} \wedge \mathrm{A}))$$

(A, B, C proizvoljne formule), a pravilo izvođenja je MP. Ovaj sistem razvija Rosser.

3° Polazni operacijski simboli su $\Rightarrow$, $\neg$, a ostali su definisani onako kao što smo i mi učinili u računu $\mathcal{L}$. Aksiome su

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}),\ (\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})) \Rightarrow ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C})),$$
$$(\neg \mathrm{A} \Rightarrow \neg \mathrm{B}) \Rightarrow ((\neg \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{A}),$$

(A, B, C proizvoljne formule), a pravilo izvođenja MP. Ovaj sistem razmatra Mendelson.

4. Polazni simboli operacija su $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Aksiome su

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow A$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow B$$

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$$

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

$$B \Rightarrow (A \vee B)$$

$$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$$

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$$

$$\neg \neg A \Rightarrow A$$

(A, B, C su proizvoljne formule).
Inače, $A \Leftrightarrow B$ je, po definiciji, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. MP je pravilo uvođenja. Ovaj sistem razvija Kleene.

Svi navedeni sistemi su ekvivalentni u smislu da kada se u jednom od njih definišu formule sa svim simbolima operacija $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ u skladu sa vezama koje postoje inače između odgovarajućih operacija u algebri $(\top, \perp)$, onda formula F jeste teorema jednog sistema ako i samo ako je teorema i drugih. Sistem 4 izgleda glomazan zbog velikog broja aksioma. Međutim, on ima jedno značajno svojstvo. Ako se u njemu aksioma $\neg \neg A \Rightarrow A$ zameni aksiomom $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, dobija se nov sistem, tzv. INTUICIONISTIČKI ISKAZNI RAČUN. Svaka teorema tog računa je teorema i iskaznog računa $\mathscr{L}$. On je u tom smislu podračun iskaznog računa (uopšte o podračunima videti kod Churcha). Navodimo neke teoreme računa $\mathscr{L}$ koje nisu teoreme intuicionističkog računa

$$\neg \neg p \Rightarrow p, \ (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q), \ p \vee \neg p,$$

$$\neg (p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q.$$

Postoje aksiomatizacije iskaznog računa sa jednom jedinom aksiomom (shema-aksiomom).

Navodimo jedan takav sistem.

1. Polazni simbol operacije je $\uparrow$, aksioma je

$$(A \uparrow (B \uparrow C)) \uparrow ((D \uparrow (D \uparrow D)) \uparrow ((E \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow E) \uparrow (A \uparrow E))))$$

(A, B, C, D, E proizvoljne formule), a pravilo izvođenja: Iz $A \uparrow (B \uparrow C)$ i A sleduje C. Ovaj sistem potiče od J. Nicoda (1917).

Na kraju napomenimo i to da Novikov, Church, Devidé razmatraju razne druge sisteme aksioma.

III. KVANTIFIKATORSKI RAČUN PRVOG REDA. SPECIJALNI KVANTIFIKATORSKI RAČUNI PRVOG REDA

1. AKSIOME. NEPROTIVUREČNOST. STAV DEDUKCIJE

Kvantifikatorski račun prvog reda, u oznaci $\mathcal{K}$, jeste formalni račun čiji su osnovni simboli i formule uvedeni u prvom delu (glava II), a čije su aksiome (shema-aksiome) sledeće:

Ax 1 $\quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

Ax 2 $\quad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

Ax 3 $\quad (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

Ax 4 $\quad (\forall u) A(u) \Rightarrow A(t)$

(term t je slobodan za promenljivu u u formuli A);

Ax 5 $\quad (\forall u)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall u) B)$

(promenljiva u nije slobodna promenljiva formule A), gde su A,B, C proizvoljne formule.

Pravila izvođenja ovog računa su:

(MP) $\quad$ Iz A i $A \Rightarrow B$ sleduje B

(Gen) $\quad$ Iz A sleduje $(\forall u) A$,

gde je u promenljiva.

Navedena pravila izvođenja zovemo redom: MODUS PONENS *i* GENERALIZACIJA, a označavamo ih sa MP i Gen.

Bilo koja teorema iskaznog računa $\mathcal{L}$, *kada se iskazna slova te teoreme zamene proizvoljnim formulama računa* $\mathcal{K}$, *prevodi se u teoremu računa* $\mathcal{K}$. Osim toga pretpostavljamo da se znaci $\Rightarrow$, $\neg$ računa $\mathcal{L}$ prevode u znake $\Rightarrow$, $\neg$ računa $\mathcal{K}$ i da se isto slovo zamenjuje istom formulom. Dokaz proističe iz činjenice što su u računu $\mathcal{K}$ prisutne aksiome Ax 1, Ax 2, Ax 3 i modus ponens kao pravilo izvođenja. Na takav način dobijenu teoremu računa $\mathcal{K}$ zovemo IZVOD odgovarajuće teoreme računa $\mathcal{L}$.

Na primer, sledeće formule su teoreme računa $\mathcal{K}$:

$$A \vee A \Leftrightarrow A, \quad \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B), \quad A \vee \neg A,$$

$$(((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow D) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))),$$

gde su A, B, C, D proizvoljne formule računa $\mathcal{K}$, i one su izvodi odgovarajućih teorema računa $\mathcal{L}$.

Primer 1 Formula F:

$$\neg (\forall x) A \Rightarrow \neg (\forall x) \neg\neg A,$$

sa proizvoljnom formulom A, predstavlja jednu teoremu računa $\mathcal{K}$. Ovo proizlazi iz sledećeg niza formula:

(1) $(\forall x) \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A$ (Ax 4)

(2) $\neg\neg A \Rightarrow A$ (Izvod teoreme računa $\mathcal{L}$)

(3) $((\forall x) \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow ((\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\forall x) \neg\neg A \Rightarrow A))$ (Izvod teoreme računa $\mathcal{L}$)

(4) $(\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\forall x) \neg\neg A \Rightarrow A)$ (Iz (1) i (3) po MP)

(5) $(\forall x) \neg\neg A \Rightarrow A$ (Iz (2) i (4) po MP)

(6) $(\forall x)((\forall x) \neg\neg A \Rightarrow A)$ (Iz (5) po Gen)

(7) $(\forall x)((\forall x) \neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\forall x) \neg\neg A \Rightarrow (\forall x) A)$ (Ax 5)

(8) $(\forall x) \neg\neg A \Rightarrow (\forall x) A$ (Iz (6) i (7) po MP),

(9) $((\forall x) \neg\neg A \Rightarrow (\forall x) A) \Rightarrow (\neg(\forall x) A \Rightarrow \neg (\forall x) \neg\neg A)$ (Izvod teoreme računa $\mathcal{L}$)

$\neg (\forall x) A \Rightarrow \neg(\forall x) \neg\neg A$ (Iz (8) i (9) po MP).

Primetimo da navedeni niz formula postaje potpuno izvođenje teoreme F kada se upotpuni izvođenjima formula (2), (3) i (9).

Navodimo još nekoliko teorema računa $\mathcal{K}$ koje nisu izvodi formula računa $\mathcal{L}$:

$(\forall x)(\forall y) A \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x) A$,

$(\forall x) A \Rightarrow (\exists x) A$,

$(\forall x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x) A \wedge (\forall x) B$,

$(\forall x) A \vee (\forall x) B \Rightarrow (\forall x)(A \vee B)$,

$A(t) \Rightarrow (\exists x) A(x)$ (term t je slobodan za promenljivu x u formuli A),

$$(\exists x)(\forall y)\,A \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\,A,$$

$$((\forall x)(B \Rightarrow C) \wedge (\forall x)(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\forall x)(A \Rightarrow C),$$

$$(((\forall x)(C \Rightarrow B) \wedge (\forall x)(C \Rightarrow A)) \wedge (\exists x)\,C) \Rightarrow (\exists x)(A \wedge B).$$

Prema stavu 4 u prvom delu (glava II, tačka 6), neposredno zaključujemo da su sve teoreme kvantifikatorskog računa prvog reda valjane formule. Takođe je *svaka valjana formula teorema.* To je poznati Gödelov stav, čiji dokaz dajemo u idućoj glavi.

Kao i u slučaju iskaznog računa, neprotivurečnost kvantifikatorskog računa prvog reda u odnosu na preslikavanje $\begin{pmatrix} A \\ \neg A \end{pmatrix}$ zovemo, kratko, *neprotivurečnost.* — Važi sledeći stav.

Stav 1. *Kvantifikatorski račun prvog reda je neprotivurečan.*

Dokaz. Neka su

$$R_1^1,\ R_1^2,\ R_2^1,\ R_1^3,\ R_2^2,\ R_3^1,\ \ldots,\ R_1^i,\ R_2^{i-1},\ \ldots,\ R_i^1,\ \ldots$$

$$p,\quad q,\quad r,\quad p_1,\quad q_1,\quad r_1,\ \ldots$$

redom nizovi svih relacijskih, odnosno izkaznih slova. Za članove ovih nizova koji imaju isti rang kažemo da su odgovarajući simboli (na primer, R_1^1 i p, kao i R_1^3 i p_1 jesu odgovarajući simboli).

Uvodimo preslikavanje f skupa svih formula računa $\mathcal{K}$ na skup formula iskaznog računa $\mathcal{L}$ na sledeći način:

1° Ako je $R_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j)$ elementarna formula računa $\mathcal{K}$, onda je $\mathrm{f}(R_i^j(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_j)) = v$, gde su R_i^j i v odgovarajući simboli.

2° $$\mathrm{f}(A \Rightarrow B) = \mathrm{f}(A) \Rightarrow \mathrm{f}(B)$$

$$\mathrm{f}(\neg A) = \neg\, \mathrm{f}(A),\ \mathrm{f}((\forall u)\,A) = \mathrm{f}(A).$$

Na primer, slike formula

$$R_1^1(x,\ y),\ R_1^1(f_1^2(x,\ y),\ a_3),\ (\forall\, x)\, R_1^1(x,\ z),\ R_1^1(x,\ x) \Rightarrow \neg\, R_1^2(x,\ y)$$

jesu redom sledeće formule:

$$p,\ p,\ p,\ p \Rightarrow \neg\, q.$$

Neposrednim proveravanjem zaključujemo da su slike svih aksioma Ax 1, Ax 2, Ax 3, Ax 4, Ax 5, teoreme računa $\mathcal{L}$. Pošto u računu $\mathcal{L}$ važi: a) f(B) izlazi iz f(A) i f(A $\Rightarrow$ B); b) f(($\forall u$) A) proizlazi iz f(A); onda su i slike svih teorema računa $\mathcal{K}$ izvesne teoreme računa $\mathcal{L}$.

Ako je račun $\mathcal{K}$ protivurečan, onda za neki par formula A i $\neg$ A važi $\vdash$ A, $\vdash \neg$ A. Međutim, tada u računu $\mathcal{L}$ dobijamo $\vdash$ f(A), $\vdash \neg$ f(A) što je nemoguće, jer je račun $\mathcal{L}$ neprotivurečan. Prema tome, račun $\mathcal{K}$ je neprotivurečan. ∎

Primedba. Preslikavanje f, korišćeno u prethodnom dokazu, u daljem izlaganju zovemo *brišuća* funkcija.

Stav dedukcije koji dokazujemo je specijalan slučaj opštijeg stava, koji važi za račun $\mathcal{K}$.

Stav. 2. *Ako je $\mathcal{F}$ neki skup formula računa $\mathcal{K}$,* A *zatvorena formula i ako $\mathcal{F}$,* A $\vdash$ B, *onda $\mathcal{F} \vdash$* A $\Rightarrow$ B.

Dokaz. Slično kao u iskaznom računu, kažemo da je formula B n-*izvodljiva* iz skupa hipoteza $\mathcal{F} \cup \{A\}$ ako postoji bar jedno izvođenje za $\mathcal{F}$, A $\vdash$ B koje ima dužinu n.

Označimo sa I(n) sledeći iskaz:

Za svaku formulu B, ako je B n-*izvodljiva* iz skupa hipoteza $\mathcal{F} \cup \{A\}$, onda je formula A $\Rightarrow$ B izvodljiva iz skupa hipoteza $\mathcal{F}$.

Indukcijom dokazujemo da je I (n) tačan iskaz za svaki prirodan broj n, odnosno na taj način dokazujemo i sam stav.

Neka je n = 1. Tada jedno izvođenje formule B iz $\mathcal{F}$, A ima tačno jedan član, pa taj mora da bude B. Zatim, ako je B $\in \mathcal{F}$ ili ako je B aksioma, s obzirom da je $\vdash$ B $\Rightarrow$ (A $\Rightarrow$ B), koristeći MP dobijamo $\mathcal{F} \vdash$ A $\Rightarrow$ B. Najzad, kada je B = A, imamo $\mathcal{F} \vdash$ A $\Rightarrow$ B, jer je formula A $\Rightarrow$ A teorema računa $\mathcal{K}$.

Neka je n proizvoljan broj. Pretpostavimo da je iskaz I(k) tačan za sve prirodne brojeve k koji su manji od n. Dokazujemo da je tada tačan i iskaz I(n).

Neka je $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$ jedno izvođenje formule B iz $\mathcal{F}$, A, gde je $B_n = B$. Tada postoje mogućnosti:

1° B je aksioma ili B je iz $\mathcal{F}$.

2° B je jednaka A.

3° Postoje brojevi i i j manji od n, tako da je formula B_j jednaka $B_i \Rightarrow B$.

4° Postoji broj k manji od n tako da je B jednaka $(\forall u)\,B_k$, gde je u izvesna promenljiva.

U slučajevima 1°, 2° dobijamo $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$, slično kao pri dokazivanju tačnosti iskaza I(1).

U slučaju 3°, prema indukcijskoj hipotezi, imamo

$$\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B_i \qquad \mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B_j.$$

Prema Ax 2 imamo

$$\vdash (A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B)),$$

pa po MP (dvostruka primena) dobijamo $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$.

U slučaju 4° iz $\mathcal{F}, A \vdash B_k$, prema indukcijskoj hipotezi, imamo $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B_k$, odakle primenom pravila Gen dobijamo

$$\mathcal{F} \vdash (\forall u)\,(A \Rightarrow B_k).$$

Pošto je A zatvorena formula, ispunjeni su uslovi primene Ax 5, koja daje

$$\vdash (\forall u)\,(A \Rightarrow B_k) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall u)\,B_k).$$

Primenom MP dobijamo $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow (\forall u)\,B_k$, tj. $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$. Prema tome, iskaz I(n) je tačan za svaki prirodan broj n. ∎

2. SPECIJALNI KVANTIFIKATORSKI RAČUN PRVOGA REDA. FORMALNA TEORIJA BROJEVA. AKSIOMATSKE TEORIJE SKUPOVA

SPECIJALNI KVANTIFIKATORSKI RAČUN PRVOG REDA je formalna teorija čije su formule neke od formula računa $\mathcal{K}$ (tačno one u kojima učestvuju samo neke određene, ali ne nužno i sve konstante, operacijska i relacijska slova). Aksiome specijalnog računa su, prvo, sve one koje proističu iz shema — aksioma Ax 1, Ax 2, Ax 3, Ax 4, Ax 5 i, drugo, izvesne SPECIJALNE AKSIOME. Specijalne aksiome su, dakle, izvesne formule računa $\mathcal{K}$. Jedina pravila izvođenja su MP i Gen.

Neka je $\mathcal{S}$ izvestan specijalni kvantifikatorski račun prvog reda. Prema definiciji teoreme za slučaj bilo koje formalne teorije, teorema računa $\mathcal{S}$ je svaka formula A tog računa za koju postoji bar jedan konačan niz formula (izvođenje)

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

gde je formula A_n jednaka formuli A i čija svaka formula $A_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ ispunjava uslov:

A_i je aksioma računa $\mathcal{S}$ ili A_i se može dobiti iz nekih prethodnih formula tog niza po MP ili Gen.

Čisti kvantifikatorski račun prvog reda je specijalni kvantifikatorski račun prvog reda koji nema nijednu konstantu i operacijsko slovo, a ima sve ostale simbole kao račun $\mathcal{K}$.

Kvantifikatorski račun prvog reda sa jednakošću je svaki specijalni kvantifikatorski račun prvog reda koji među predikatskim slovima ima i jedno slovo dužine 2, označeno, na primer $=$ (umesto $=(t_1, t_2)$ piše se $t_1 = t_2$), i koji među specijalnim aksiomama ima i sledeće formule:[1]

$$t_1 = t_1, \quad t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1, \quad (t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3) \Rightarrow t_1 = t_3$$

$$(1) \qquad (t_1 = t_1' \wedge t_2 = t_2' \wedge \ldots \wedge t_j = t_j') \Rightarrow f_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j) = f_i^j(t_1', t_2', \ldots, t_j'),$$

$$(t_1 = t_1' \wedge t_2 = t_2' \wedge \ldots \wedge t_j = t_j') \Rightarrow (R_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j) \Rightarrow R_i^j(t_1', t_2', \ldots, t_j')),$$

gde su $t_1, t_2, \ldots, t_j, t_1', t_2', \ldots, t_j'$ termi, f_i^j, R_i^j su operacijska i relacijska slova tog računa.

Neka je $\mathcal{S}$ izvesni specijalni kvantifikatorski račun prvog reda u kome je definisano relacijsko slovo, u oznaci $=$, definicijom oblika

$$x = y \text{ je zamena za A,}$$

gde je A izvesna formula koja ima kao slobodne promenljive jedino x i y i u kome su sve formule (1) teoreme. I takav račun $\mathcal{S}$ zovemo kvantifikatorski račun prvog reda sa jednakošću.

Model nekog specijalnog računa $\mathcal{S}$ je model njegovog skupa specijalnih aksioma, prema definiciji iz prvog dela (glava 2).

Odnosno, *model računa* $\mathcal{S}$ *je ona interpretacija pri kojoj su tačne specijalne aksiome tog računa.*

U slučaju kvantifikatorskih računa prvog reda sa jednakošću uvodimo i tzv. normalni model. *To je onaj model u kome se relacijsko slovo* $=$ *interpretira kao jednakost.*

Neka su M_1 i M_2 modeli računa $\mathcal{S}$ koji imaju redom domene D_1 i D_2.

---

[1] Neke od njih mogu biti teoreme.

Kažemo da su ti modeli IZOMORFNI ako postoji 1—1 preslikavanje f domena D_1 na domen D_2 tako da su ispunjeni uslovi:

(1) Ako su relacije R_1 i R_2 interpretacije istog relacijskog slova dužine *n*, onda:
$R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je tačna $\longleftrightarrow$ $R_2(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ je tačna, gde su x_i elementi domena D_1.

(2) Ako su operacije g_1 i g_2 interpretacije istog operacijskog slova dužine n, onda:
$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je jednak $y_1 \longleftrightarrow g_2(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ je jednak $f(y_1)$.

(3) Ako su elementi a_1 i a_2 interpretacije istog simbola konstante, onda:
$f(a_1)$ je jednak a_2.

Za račun $\mathcal{S}$ kažemo da je KATEGORIČAN ako su svi njegovi modeli izomorfni.

Za račun $\mathcal{S}$ kažemo da je NEPROTIVUREČAN ako u tome računu ne postoje dve formule, A i $\neg$A, tako da su obe teoreme tog računa.

Navodimo neke značajne primere specijalnih kvantifikatorskih računa ističući jedino njihove konstante, operacijska i relacijska slova, kao i njihove specijalne aksiome.

Svaki od navedenih računa $\mathcal{S}$ u vezi je sa izvesnom (neformalnom) matematičkom teorijom. Tu vezu u daljem izlaganju preciziramo. U nekim slučajevima ona prosto znači da je, po našoj veri, model računa $\mathcal{S}$ određen odgovarajućom matematičkom teorijom.

Primer 1. ELEMENTARNA TEORIJA GRUPA $\mathcal{G}$ je specijalni račun prvog reda koji ima relacijsko slovo R_1^2, u drugoj oznaci $=$, operacijsko slovo f_1^2 i konstantu a_1. Umesto $f_1^2(t_1, t_2)$, a_1 redom pišemo $t_1 + t_2$, 0. Specijalne aksiome su:

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

$$x+0=x$$

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (x+y=0)$$

$$x=x$$

$$x=y \Rightarrow y=x$$

$$(x=y \wedge y=z) \Rightarrow x=z$$

$$(x_1=y_1 \wedge x_2=y_2) \Rightarrow x_1+x_2=y_1+y_2.$$

To je račun sa jednakošću.

Jedan (normalni) model računa $\mathcal{G}$ određuju:

1° Domen koji je skup svih celih brojeva.

2° Operacija sabiranje kao interpretacija simbola $+$.

3° Broj nula kao interpretacija simbola 0.

Račun $\mathcal{G}$ je neprotivurečan, što se može dokazati na sledeći način, koristeći brišuću funkciju f iz prethodne glave.

Pretpostavimo da je $\mathcal{G}$ protivurečan, odnosno da su mu izvesne formule A i $\neg$A teoreme. Ovo znači da u predikatskom računu $\mathcal{K}$ imamo:

$$\mathrm{Ax}(\mathcal{G}) \underset{\mathcal{K}}{\vdash} \mathrm{A}, \qquad \mathrm{Ax}(\mathcal{G}) \underset{\mathcal{K}}{\vdash} \neg \mathrm{A},$$

gde smo sa Ax ($\mathcal{G}$) označili skup navedenih (specijalnih) aksioma računa $\mathcal{G}$. Odatle, zamenom svake formule slikom pri preslikavanju f (koje, inače, teoreme i izvođenja predikatskog računa $\mathcal{K}$ prevodi u teoreme i izvođenja iskaznog računa $\mathcal{L}$) dobijamo

$$\{q,\ q \Rightarrow q,\quad q \wedge q \Rightarrow q\} \underset{\mathcal{L}}{\vdash} \mathrm{B},$$

$$\{q,\ q \Rightarrow q,\quad q \wedge q \Rightarrow q\} \underset{\mathcal{L}}{\vdash} \neg\, \mathrm{B},$$

gde je B (jednaka f (A)) izvesna formula iskaznog računa.

Prema stavu dedukcije iskaznog računa imamo

$$\underset{\mathcal{L}}{\vdash} q \Rightarrow \ ((q \Rightarrow q) \ \Rightarrow \ ((q \wedge q \Rightarrow q) \ \Rightarrow \mathrm{B})),$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\vdash} q \Rightarrow \ ((q \Rightarrow q) \ \Rightarrow \ ((q \wedge q \Rightarrow q) \ \Rightarrow \neg\, \mathrm{B})).$$

Dobijene formule su tautologije iskaznog računa, jer su njegove teoreme.

Neka je $\top$ vrednost slova q i neka formula B ima vrednost b (to je $\top$ ili $\bot$) kada njena slova imaju izvesnu izabranu vrednost. Tada dobijene formule imaju vrednosti b i $\neg$ b, odnosno $\top$ i $\bot$. Ovo je kontradikcija, jer su one tautologije.

Primer 2. FORMALNA TEORIJA BROJEVA je specijalni račun prvog reda, u oznaci $\mathcal{A}$, koji ima jedno relacijsko slovo R_1^2, konstantu a_1 i operacijska slova f_1^1, f_1^2, f_2^2. Umesto R_1^2, $a_1, f_1^1(t_1)$,

$f_1^2(t_1, t_2)$, $f_2^2(t_1, t_2)$ redom pišemo $=$, 0, t_1', $t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2$. Specijalne aksiome računa $\mathcal{A}$ jesu

$$(x = y \wedge x = z) \Rightarrow y = z$$

$$x = y \Leftrightarrow x' = y'; \quad x' \neq 0,^1 \; x + 0 = x, \; x + y' = (x+y)'$$

$$x \cdot 0 = 0, \; x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$(\mathrm{A}(0) \wedge (\forall x)\,(\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x'))) \Rightarrow (\forall x)\,\mathrm{A}(x),$$

gde je $\mathrm{A}(x)$ proizvoljna formula računa $\mathcal{A}$.

Među nabrojanim aksiomama poslednju zovemo PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE. To je, u stvari, shema-aksioma, jer $\mathrm{A}(x)$ može biti proizvoljna formula. Iz te aksiome dobijamo pravilo:

Ako su $\mathrm{A}(0)$ *i* $(\forall x)\,(\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x'))$ *teoreme računa* $\mathcal{A}$, *onda je i formula* $(\forall x)\,\mathrm{A}(x)$ *teorema računa* $\mathcal{A}$.

To se može i ovako označiti: $\mathrm{A}(0), (\forall x)\,(\mathrm{A}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x')) \vdash (\forall x)\,\mathrm{A}(x)$. Ovo najadekvatnije odgovara poznatoj matematičkoj indukciji za prirodne brojeve (u koje je dogovorno učvršćena i 0, što se inače u matematičkoj logici čini iz praktičnih razloga).

Međutim, data shema-aksioma sadrži samo prebrojivo mnogo individualnih aksioma, dok se matematička indukcija za prirodne brojeve sastoji iz neprebrojivog skupa aksioma (jer se odnosi na sve podskupove skupa prirodnih projeva).

Navodimo bez dokaza razne teoreme računa $\mathcal{A}$, dakle *posledice skupa hipoteza čiji su članovi navedene aksiome, odnosno formule kvantifikatorskog računa* $\mathcal{K}$.

I $\quad t_1 = t_1, \quad t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1, \quad (t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3) \Rightarrow t_1 = t_3,$

$$(t_1 = t_2 \wedge t_3 = t_4) \Rightarrow t_1 + t_3 = t_2 + t_4,$$

$$(t_1 = t_2 \wedge t_3 = t_4) \Rightarrow t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4,$$

gde su t_1, t_2, t_3, t_4 proizvoljni termi. Zaključujemo:

Račun $\mathcal{A}$ *je račun sa jednakošću.*

II $\quad 0 \cdot t_1 = 0, \; 0 + t_1 = t_1, \; t_1' \cdot t_2 = t_1 \cdot t_2 + t_2, \; t_1 + t_2 = t_2 + t_1, \; t_1 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_1,$

$$t_1' + t_2 = (t_1 + t_2)', \; t_1 + (t_2 + t_3) = (t_1 + t_2) + t_3,$$

$$t_1 \cdot (t_2 + t_3) = t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3, \; (t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3),$$

$$t_1 + t_2 = t_1 + t_3 \Rightarrow t_2 = t_3,$$

$$t_1 + t_2 = 0 \Rightarrow (t_1 = 0 \wedge t_2 = 0), \; (t_1 \neq 0 \wedge t_1 \cdot t_2 = 0) \Rightarrow t_2 = 0,$$

$$(t_1 \neq 0 \wedge t_2 \cdot t_1 = t_3 \cdot t_1) \Rightarrow t_2 = t_3,$$

---

[1] $x' \neq 0$ stoji umesto $\neg\,(x' = 0)$.

gde su t_1, t_2, t_3 proizvoljni termi. Ove teoreme odgovaraju poznatim svojstvima koje, po našem uverenju, imaju prirodni brojevi 0, 1, 2, 3, ...

III Označimo terme $0, 0', 0'', 0''', 0''''$ ... dogovorno sa $0, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \ldots$. Te terme zovemo NUMERALI.

Uvodimo i sledeće definicije:

$$t_1 < t_2 \text{ je zamena za } (\exists u)\ (u \neq 0 \wedge t_1 + u = t_2)$$

$$t_1 \leqslant t_2 \text{ je zamena za } t_1 < t_2 \vee t_1 = t_2$$

$$t_1 > t_2 \text{ je zamena za } t_2 < t_1$$

$$t_1 \geqslant t_2 \text{ je zamena za } t_2 \leqslant t_1$$

$$t_1 \mid t_2 \text{ je zamena za } (\exists u)\ (t_2 = t_1 \cdot u),$$

gde su t_1, t_2 termi i gde je u prva promenljiva osnovnog niza $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n z_n, \ldots$ koja ne učestvuje ni u t_1 ni u t_2.

Tada su i sledeće formule teoreme računa $\mathcal{A}$:

$$t_1 + \overline{1} = t_1', \quad t_1 \cdot \overline{1} = t_1, \quad t_1 \cdot \overline{2} = t_1 + t_1, \quad t_1 \cdot \overline{3} = (t_1 + t_1) + t_1, \ \ldots,$$

$$t_1 + t_2 = \overline{1} \Rightarrow (t_1 = 0 \wedge t_2 = \overline{1}) \vee (t_1 = \overline{1} \wedge t_2 = 0),$$

$$t_1 \cdot t_2 = \overline{1} \Rightarrow (t_1 = \overline{1} \wedge t_2 = \overline{1}), \quad 0 < \overline{1}, \quad \overline{1} < \overline{2}, \quad \overline{2} < \overline{3}, \ \ldots,$$

$$\neg(t_1 < t_1), \quad (t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3) \Rightarrow t_1 < t_3,$$

$$t_1 < t_2 \Rightarrow t_1 + t_3 < t_2 + t_3,$$

$$t_1 \leqslant t_1, \quad t_1 \leqslant t_2 \Leftrightarrow (t_1 + t_3 \leqslant t_2 + t_3),$$

$$(t_1 \leqslant t_2 \wedge t_2 < t_3) \Rightarrow t_1 < t_3,$$

$$t_1 \leqslant t_1', \quad (t_1 = t_2 \vee t_1 < t_2 \vee t_1 > t_2), \quad t_1 \leqslant t_2 \vee t_2 \leqslant t_1,$$

$$t_1 \neq 0 \Leftrightarrow t_1 > 0, \quad (t_1 > 0 \wedge t_2 > 0) \Rightarrow t_1 \cdot t_2 > 0,$$

$$(t_1 \leqslant t_2 \wedge t_2 \leqslant t_1) \Rightarrow t_1 = t_2$$

(t_1, t_2 su termi).

Navedeni skup teorema lako se može proširiti sve novim i novim teoremama, inspirišući se pri tome onim što smatramo da ispunjavaju 0, 1, 2, 3, ... Tako, na primer, teoreme su i formule

$$(x+y)^2 = x^2 + 2\,xy + y^2,$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3\,x^2 y + 3\,xy^2 + y^3, \ \ldots,$$

gde, na primer, x^2, x^3, $2xy$ redom znače $x \cdot x$, $(x \cdot x) \cdot x$, $x \cdot y + x \cdot y$, a slično i ostali delovi formula (tako $x^2 + 2xy + y^2$ je zamena za $(x^2 + 2xy) + y^2$ itd.).

Sve iskazano navodi nas na pomisao da račun $\mathcal{A}$ dobro odgovara sistemu naših prirodnih brojeva, odnosno da mu potpuno opisuje sva svojstva. Međutim, istina o toj vezi nam otkriva neslućenu komplikovanost svojstava koja imaju prirodni brojevi 0, 1, 2, 3, ... Ovo mišljenje potvrđuju razni stavovi koje dokazujemo u tački 6 ove glave.

U ovoj tački dajemo još neka svojstva računa $\mathcal{A}$.

Verujemo da skup prirodnih brojeva 0, 1, 2, 3, ..., u odnosu na operacije sabiranje, množenje i operaciju $'$ za koju $x' = x + 1$ čini normalni model računa $\mathcal{A}$, ako se njegovi simboli $+$, $\cdot$, $'$, interpretiraju redom kao pomenute operacije i ako se konstanta 0 interpretira kao broj 0. Taj model zovemo STANDARDNI MODEL. Svaki drugi neizomorfan sa njim normalni model računa $\mathcal{A}$ zovemo nestandardni model. Verujući da je standardni model model računa $\mathcal{A}$, zaključujemo da je račun $\mathcal{A}$ neprotivurečan, pošto je *neprotivurečan svaki specijalni kvantifikatorski račun prvog reda koji ima model.*

Postoji dokaz neprotivurečnosti računa $\mathcal{A}$, bez pozivanja na model, jedino pomoću meta-teorije koja sadrži veliki deo teorije skupova (teoriju ordinalnih brojeva). Prvi takav dokaz je dao Gentzen 1936.

Pretpostavljajući da je standardni model model računa $\mathcal{A}$, dokazujemo sledeći stav, koristeći stav 5 iduće tačke.

Stav. *Račun $\mathcal{A}$ ima nestandardni model.*

Dokaz. Formirajmo nov račun $\mathcal{A}'$ dodavanjem konstante a_2 i aksioma $a_2 \neq 0$, $a_2 \neq \overline{1}$, $a_2 \neq \overline{2}$, ..., $a_2 \neq \overline{n}$, ..., a sa tim u vezi i svih aksioma koje proističu iz Ax 1 — Ax 5 dozvoljavajući da u formuli $A(x)$ učestvuje i nova konstanta a_2.

Račun $\mathcal{A}'$ je neprotivurečan. Zaista, ako je, obrnuto, račun $\mathcal{A}'$ protivurečan, onda u njemu postoji izvođenje $B_1, B_2, \ldots, B_n$ za neku njegovu formulu oblika $A \wedge \neg A$.

Neka je $\overline{m}$ jedan numeral koji ne učestvuje u tom izvođenju i neka je

$$B_1', B_2', \ldots, B_n'$$

niz formula koji se dobija iz prethodnog kada se u njemu a_2 zameni u svakoj formuli sa $\overline{m}$. Taj niz je izvođenje izvesne formule $A' \wedge \neg A'$. Kako je $\mathscr{A}$ po pretpostavci neprotivurečan račun, na taj način dolazimo do kontradikcije.

Dakle, račun $\mathscr{A}'$ je neprotivurečan. Prema stavu 5 iduće tačke, $\mathscr{A}'$ ima normalni model M. Taj model nije izomorfan sa standardnim modelom, jer ne postoji nijedan prirodan broj koji je različit od svih prirodnih brojeva. ∎

Primer 3. AKSIOMATSKE TEORIJE SKUPOVA.

U svojim prvim istraživanjima tvorac teorije skupova Cantor nije se eksplicitno pozivao na neke aksiome o skupovima.

Međutim. analizom njegovih dokaza može se zaključiti da se skoro sve teoreme koje je on dobio mogu izvesti iz sledećih aksioma:

1 *Dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente.*

2 *Za unapred dato svojstvo postoji skup čiji su elementi baš oni koji imaju to svojstvo* (Aksioma apstrakcije).

3 *Za svaki neprazan skup postoji bar jedna funkcija čiji su originali neprazni podskupovi tog skupa, a slike su elementi originala* (Aksioma izbora).

Aksiomu apstrakcije prvi je formulisao G. Frege (1893). B. Russell je 1901. godine iz te aksiome izveo kontradikciju posmatranjem skupa svih skupova koji imaju svojstvo da nisu sami sebi elementi.

Neka je, dakle po pretpostavci, U skup svih skupova V, koji imaju svojstvo $V \notin V$. Za skup U postoji jedna od dve mogućnosti:

1° $U \in U$. U tom slučaju je U jedan od V-ova, odnosno elemenata skupa U, pa ima svojstvo $U \notin U$.

2° $U \notin U$. U tom slučaju U nije jedan od elemenata skupa U, pa nema svojstvo $U \notin U$, odnosno jeste $U \in U$.

Označimo sa P iskaz $U \in U$. Prema tome, izveli smo tačnost iskaza: $P \rightarrow$ ne P, ne $P \rightarrow P$, odakle na osnovu pravila istinitosti za implikaciju proizlazi da su i P i ne P istiniti.

Primedba. Neka je A oznaka za neko predikatsko slovo dužine dva. Formula

$$(\forall y)(\exists x) \neg (A(x, y) \Leftrightarrow \neg A(x, x))$$

je valjana, što se neposredno dokazuje.

Negacija te formule je ekvivalentna sa sledećom formulom:

(K) $$(\exists y)(\forall x)(A(x, y) \Leftrightarrow \neg A(x, x))$$

Formula (K) je, prema tome, uvek netačna. Uočimo sledeću interpretaciju:

Domen je bilo koji skup i A se interpretira kao relacija $\in$. Tada prema (K) zaključujemo da nije tačno

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow \neg (x \in x)),$$

odnosno da ne postoji skup čiji su elementi skupovi koji nisu sebi elementi. ∎

Istorijski, Burali-Forti je prvi 1897. otkrio paradoks u jednom delu teorije skupova — u teoriji ordinalnih brojeva. Ubrzo zatim (1899) Cantor je našao sličan paradoks u teoriji kardinalnih brojeva.

Iako su matematičari bili jednodušni u pitanju neophodnosti izmena u samim osnovama matematike, u pitanju načina ostvarivanja tih izmena došlo je do dubokih razmimoilaženja.

Prema formalističkom gledištu zasnivanje neke matematičke teorije ne sme da se temelji na intuiciji, već je potrebno stvoriti aksiomatsku bazu i tada je matematička istina jedino ono što proizlazi iz aksioma bez obzira na moguća značenja takvog tvrđenja.

Dakle, za formaliste rešenje problema se sastojalo u izgradnji aksiomatske teorije skupova, iz koje izlaze svi rezultati Cantorove teorije skupova, a istovremeno u onemogućivanju postojanja „skupova" koji dovode do otkrivenih paradoksa.

Mnogi su nastojali da izbegnu paradokse proučavajući dublje njihovu strukturu. Tako je Russell svojom *teorijom tipova* uspešno otklonio uočene paradokse. Strogim prihvatanjem njegove teorije mnogi rezultati matematike postaju neobično složeni. Međutim, zajednička odlika navedenih načina rešavanja je nastojanje da se *sačuvaju* svi postojeći rezultati teorije skupova.

Nasuprot takvim shvatanjima razvio se pravac *intuicionizam*, čijim koncepcijama se uklanjaju paradoksi, ali se zato dovode u pitanje čitave grane klasične matematike.

Jezikom formula predikatskog računa uvode se razne tzv. aksiomatske teorije skupova. Te teorije su specijalni kvantifikatorski računi.

Međutim, ni za jednu od poznatih aksiomatskih teorija ne znamo da li je neprotivurečna.

Navodimo prethodno tzv. NBG sistem, koji je prvobitno uveo von Neumann (1925, 1928), a koji su zatim dopunili R. Robinson (1937), P. Bernays (1937—1954) i K. Gödel (1940).

Račun NBG je specijalni kvantifikatorski račun prvog reda koji ima samo jedno relacijsko slovo R_2^2 (obično se $R_2^2(u, v)$ zamenjuje sa $u \in v$) i *konačno mnogo (individualnih) aksioma*. Izuzetno pri opisivanju tog računa promenljive su $X_1, X_2, X_3, \ldots$, dok za njihove oznake uzimamo $X, Y, Z, \ldots$. Promenljive $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ interpretiramo kao klase, a klasa je određena svojstvom koje poseduju njeni elementi. Inače, ne zahtevamo da svakom svojstvu odgovara klasa. To pretpostavljamo samo za ona svojstva koja su u skladu sa aksiomama računa NBG. Samo neke klase su skupovi, odnosno uvodimo sledeće definicije.

Definicija 1. $\mathrm{M}(X_i)$ *je zamena za* $(\exists X_{i+1})(X_i \in X_{i+1})$, *gde je* $i=1, 2, 3, \ldots$.

$\mathrm{M}(X_i)$ *čitamo*: X_i *je skup*.

Definicija 2. x_i *je zamena za* $\mathrm{M}(X_i)$ $\quad (i=1, 2, \ldots)$.

Na taj način $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ je niz promenljivih kojima u interpretaciji odgovaraju skupovi. Za njihove oznake uzimamo $x, y, z, u, v, w, \ldots$.

Formule

$$(\forall X_i)(\mathrm{M}(X_i) \Rightarrow \mathrm{A}(X_i)), \quad (\exists X_i)(\mathrm{M}(X_i) \wedge \mathrm{A}(X_i))$$

označavamo dogovorno redom $(\forall x_i)\,\mathrm{A}(x_i)$, $(\exists x_i)\,\mathrm{A}(x_i)$, gde je $i=1, 2, \ldots$.

Navodimo aksiome i osnovne definicije računa NBG, dajući pri tom i komentare koji su u skladu sa interpretacijom promenljivih X_i, x_i kao klasa, odnosno skupova, i sa interpretacijom simbola $\in$ relacijom koju možemo zvati „*biti element od*“.

Definicija 3.

$X=Y$ *je zamena za* $(\forall Z)(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y)$

(*Z je prva promenljiva niza* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *koja se razlikuje od* X i Y).

Definicija 4.

$X \subseteq Y$ *je zamena za* $(\forall Z)(Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$

(*Z je prva promenljiva niza* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *koja se razlikuje od* X i Y).

Definicija 5.

$X \subset Y$ *je zamena za* $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.

Definicijama 3, 4, 5 uvedene su jednakost i inkluzije (neprava i prava).

Aksioma T (Aksioma ekstenzije)

$$X_1 = X_2 \Rightarrow (X_1 \in X_3 \Leftrightarrow X_2 \in X_3).$$

Aksioma P (Aksioma egzistencije para)

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(x_4 \in x_3 \Leftrightarrow x_4 = x_1 \vee x_4 = x_2).$$

Za bilo koje skupove x_1, x_2 postoji skup x_3 tako da su x_1, x_2 jedini elementi toga skupa.

Aksioma N (Aksioma egzistencije praznog skupa)

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(x_2 \notin x_1).$$

Iz navedenih aksioma izvode se sledeće teoreme:

$X = X$, $X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X)$, $X = Y \Rightarrow Y = X$,

$(X = Y \wedge Y = Z) \Rightarrow X = Z$, $X = Y \Rightarrow (Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y)$,

$X \in Y \Rightarrow \mathrm{M}(X)$, $X = Y \Leftrightarrow (\forall z)(z \in X \Leftrightarrow z \in Y)$,

$(\forall x)(\forall y)(\exists_1 z)(\forall u)(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$, $(\exists_1 x)(\forall y)(y \notin x)$.

Na osnovu njih zaključujemo da je NBG račun sa jednakošću. Poslednje dve navedene teoreme opravdavaju uvođenje jedne nove konstante, u oznaci $\emptyset$, i novog operacijskog slova za skupovne promenljive, u oznaci $\{\ \}$.

Definicija 6. $z = \{x, y\}$ *je zamena za* $(\forall u)(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$,

gde je u *prva među promenljivim niza* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *koja se razlikuje od* x, y *i* z.

Definicija 7. $x_1 = \emptyset$ *je zamena za* $(\forall x_2)(x_2 \notin x_1)$.

Definicija 8. (x, y) *je zamena za* $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

(x, y) zovemo uređen par redom za x i y. Mogli smo staviiti $(x, y) \overset{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Inače, $\{x\}$ *je zamena za* $\{x, x\}$.

Uređenu trojku (x, y, z) definišemo kao *zamenu za* $((x, y), z)$. Slično, rekurzivno definišemo $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Navodimo niz tzv. *aksioma o egzistenciji klasa*, u kojima se govori o egzistenciji klasa i skupova čiji elementi zadovoljavaju neke uslove.

Aksioma B 1. $(\exists X_1)(\forall x_2)(\forall x_3)((x_2, x_3) \in X_1 \Leftrightarrow x_2 \in x_3)$.

Aksioma B 2. $(\forall X_1)(\forall X_2)(\exists X_3)(\forall x_4)(x_4 \in X_3 \Leftrightarrow x_4 \in X_1 \wedge x_4 \in X_2)$.

Aksioma B 3. $(\forall X_1)(\exists X_2)(\forall x_3)(x_3 \in X_2 \Leftrightarrow x_3 \notin X_1)$.

Aksioma B 4. $(\forall X_1)(\exists X_2)(\forall x_4)(x_4 \in X_2 \Leftrightarrow (\exists x_3)((x_4, x_3) \in X_1))$.

Aksioma B 5. $(\forall X_1)(\exists X_2)(\forall x_3)(\forall x_4)((x_3, x_4) \in X_2 \Leftrightarrow x_3 \in X_1)$.

Aksioma B 6.

$(\forall X_1)(\exists X_2)(\forall x_3)(\forall x_4)(\forall x_5)((x_3, x_4, x_5) \in X_2 \Leftrightarrow (x_4, x_5, x_3) \in X_1)$.

Aksioma B 7.

$(\forall X_1)(\exists X_2)(\forall x_3)(\forall x_4)(\forall x_5)((x_3, x_4, x_5) \in X_2 \Leftrightarrow (x_3, x_5, x_4) \in X_1)$

Koristeći aksiomu T mogu se iz aksioma B_2, B_3, B_4 dobiti teoreme, koje se razlikuju od tih aksioma jedino u tome što u njima stoji $(\exists_1 X_2)$, $(\exists_1 X_3)$ umesto $(\exists X_2)$, $(\exists X_3)$. To opravdava uvođenje novih operacijskih slova u oznaci $\cap, -, \mathcal{D}$ (redom: *presek*, *komplement*, *domen*).

Definicija 9.

$Z = X \cap Y$ *je zamena za* $(\forall u)(u \in Z \Leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y)$.

$Z = \overline{X}$ *je zamena za* $(\forall u)(u \in Z \Leftrightarrow u \notin X)$.

$Z = \mathcal{D}(X)$ *je zamena za* $(\forall u)(u \in Z \Leftrightarrow (\exists v)((u, v) \in X))$,

gde je u *prva među promenljivim* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ *čiji se indeks razlikuje od indeksa: u prvom slučaju od* X, Y, Z, *u drugom slučaju od* X *i* Z, *u trećem slučaju od* X, Z, v.

Definicija 10.

$X \cup Y$ *je zamena za* $\overline{(\overline{X} \cap \overline{Y})}$.

V *je zamena za* $\overline{\emptyset}$.

$X - Y$ *je zamena za* $X \cap \overline{Y}$.

Navodimo neke teoreme koje se izvode pomoću izloženih aksioma.

$\{x, y\} = \{z, u\} \Leftrightarrow (x = z \wedge y = u) \vee (x = u \wedge y = z)$,

$(x, y) = (z, u) \Leftrightarrow (x = z \wedge y = u)$,

$(\forall u)(u \in X \cup Y \Leftrightarrow u \in X \vee u \in Y)$,

$(\forall u)(u \in V)$, $X \cap X = X$, $X \cup X = X$, $X \cap Y = Y \cap X$, $X \cup Y = Y \cup X$,

$X \cap \emptyset = \emptyset$, $X \cap V = X$, $X \cup \emptyset = X$, $X \cup V = V$,

$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$, $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$,

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,

$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $X - X = \emptyset$, $\overline{\overline{X}} = X$,

$V - X = \overline{X}$, $\overline{V} = \emptyset$,

$(\forall X)(\exists Y)(\forall u)(\forall v)((u, v) \in Y \Leftrightarrow (v, u) \in X)$.

Aksioma U (Aksioma egzistencije sume skupa)

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\exists x_4)(x_3 \in x_4 \wedge x_4 \in x_1)).$$

Može se dokazati da važi teorema dobijena iz te aksiome na taj način što se $(\exists x_2)$ zameni sa $(\exists_1 x_2)$. Na osnovu toga možemo uvesti tzv. SUMU skupa x, u oznaci $\bigcup(x)$ ili $\bigcup\limits_{v \in x} v$ na sledeći način:

$$u \in \bigcup(x) \Leftrightarrow (\exists v)(u \in v \wedge v \in x).$$

Aksioma S (Aksioma o podskupovima)

$$(\forall x_1)(\forall X_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(x_4 \in x_3 \Leftrightarrow x_4 \in x_1 \wedge x_4 \in X_2).$$

Za bilo koji skup x_1 i klasu X_2 postoji skup x_3, čiji su elementi zajednički elementi skupa x_1 i klase X_2, tj. presek skupa i klase je skup.

Aksioma W (Aksioma o partitivnom skupu)

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(x_3 \in x_2 \Leftrightarrow x_3 \subseteq x_1).$$

Teorema je i ona formula koja se dobija iz aksiome W kada se $(\exists x_2)$ zameni sa $(\exists_1 x_2)$. Tako, možemo uvesti novo operacijsko slovo, dužine 1, u oznaci $\mathcal{P}(x)$ na sledeći način:

$$y \in \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow y \subseteq x.$$

U tom slučaju su, na primer, teoreme sledeće formule:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \ \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$$
$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

Definicija 11.

Un(X_i) *je zamena za*

$$(\forall x_{i+1})(\forall x_{i+2})(\forall x_{i+3})((x_{i+1}, x_{i+2}) \in X_i$$
$$\wedge (x_{i+1}, x_{i+3}) \in X_i \Rightarrow x_{i+2} = x_{i+3})$$

(i = 1, 2, 3, . . .).

Un(X_i) čitamo: klasa X_i je jednoznačna.

Aksioma R (Aksioma zamene)

$$(\forall x_1)(\mathrm{Un}(X_5) \Rightarrow (\exists x_2)(\forall x_3)(x_3 \in x_2$$
$$\Leftrightarrow (\exists x_4)((x_4, x_3) \in X_5 \wedge x_4 \in x_1))).$$

Dakle, ako je X_5 jednoznačna klasa, tada klasa svih drugih komponenti uređenih parova koji su elementi te klase jeste skup ako je i klasa prvih komponenti neki skup.

Aksioma I (Aksioma beskonačnosti)

$$(\exists x_2)(\emptyset \in x_2 \wedge (\forall x_1)(x_1 \in x_2 \Rightarrow x_1 \cup \{x_1\} \in x_2)).$$

Dakle postoji skup x_2 koji ima element $\emptyset$ i sa svakim elementom x_1 sadrži i element $x_1 \cup \{x_1\}$.

Tako su aksiome računa NBG potpuno navedene. Aksiome su T, P, N, S, U, W, R, I, B 1—B 7.

Inače, aksiome N i S mogu se izvesti iz ostalih aksioma.

AKSIOMATSKA TEORIJA SKUPOVA ZSF (Zermelo-Skolem-Fraenkel) u stvari je podteorija teorije NBG, i to onaj deo koji se odnosi na skupove.

Promenljive su $x_1, x_2, x_3, \ldots$, a jedino relacijsko slovo je $\in$. Aksiome su: *T*, *P*, *N*, *U*, *W*, *I* i jedna shema — aksioma koja odgovara aksiomi *R*.

Ako je F(x, y) *bilo koja formula, onda je aksioma formula* P $\Rightarrow$ Q, *gde su* P i Q *redom sledeće formule*:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\mathrm{F}(x_1, x_3) \wedge \mathrm{F}(x_1, x_2) \Rightarrow x_3 = x_2),$$

$$(\exists x_5)(\forall x_3)(x_3 \in x_5 \Leftrightarrow (\exists x_1)(x_1 \in x_4 \wedge \mathrm{F}(x_1, x_3)).$$

Svaka formula računa ZSF može se smatrati i kao formula računa NBG. *Dokazano je da je* ZSF *neprotivurečan račun ako i samo ako je* NBG *neprotivurečan.*

Aksiomu izbora nismo uključili ni u jedan od tih računa. Za zasnivanje teorije skupova usvaja se i ta aksioma.

Ta aksioma glasi P $\Rightarrow$ Q, gde su P i Q redom sledeće formule:

$$(\forall x_1)(x_1 \in x_2 \Rightarrow x_1 \neq \emptyset \wedge (\forall x_3)(x_3 \in x_2 \wedge x_3 \neq x_1 \Rightarrow x_3 \cap x_1 = \emptyset)),$$

$$(\exists x_4)(\forall x_1)(x_1 \in x_4 \Rightarrow (\exists_1 x_5)(x_5 \in x_1 \cap x_4)).$$

Dakle, ako je x_2 skup međusobno disjunktnih nepraznih skupova, onda postoji skup x_4 koji sadrži po tačno jedan element tih nepraznih skupova.

U teoriji skupova je dugo bio nerešen tzv. PROBLEM KONTINUUMA. Da bi se on prikazao, potrebno je uvesti izvesne definicije, na primer „skup x je beskonačan", „skup x je ekvivalentan sa skupom y". Zadovoljavamo se da običnim rečima opišemo drugu definiciju:

Kažemo da je skup x ekvivalentan sa skupom y ako postoji bar jedno 1—1 *preslikavanje skupa x na skup y.*

Pitanje je da li je tačan sledeći iskaz:

„*Ako je* x *beskonačan skup i* $\mathcal{P}$(x) *njegov partitivan skup, onda ne postoji skup* y *koji ima sledeće svojstvo: skup* x *je ekvivalentan sa nekim podskupom skupa* y, *skup* y *je ekvivalentan sa nekim podskupom skupa* $\mathcal{P}$(x) *i pri tome skup* y *nije ekvivalentan ni sa skupom* x *ni sa skupom* $\mathcal{P}$(x)".

Odgovor na taj problem (*uopšteni problem kontinuuma*) dao je P. Cohen, 1964. g. (*The independence of the continuum hypothesis*; Proc. Nat. Acad. Sci. USA, I — 1963, 50, 1143—1148; II — 1964, 51, 105—110).

Označimo sa C formulu koja na formulskom jeziku predikatskog računa odgovara iskazu pod znacima „ " u navedenom pitanju. P. Cohen dokazao je da ni C ni $\neg$ C nisu teoreme ZSF sistema (u koji je uključena aksioma izbora), odnosno nezavisnost hipoteze kontinuuma od ostalih aksioma sistema ZSF(u koji je uključena aksioma izbora).

Prema tome, možemo proučavati aksiomatske teorije skupova koje imaju aksiomu C, kao i one koje imaju aksiomu $\neg$ C.

Na kraju ove tačke ističemo jednu činjenicu koja važi za svaki specijalni kvantifikatorski račun $\mathcal{S}$ prvog reda.

Označimo sa $Ax(\mathcal{S})$ skup svih specijalnih aksioma računa $\mathcal{S}$. Prema definiciji teoreme uvedenoj za bilo koju formalnu teoriju, neka formula A računa $\mathcal{S}$ je teorema tog računa ako i samo ako je ta ista formula posledica skupa hipoteza $Ax(\mathcal{S})$ u kvantifikatorskom računu $\mathcal{K}$, ili u kraćim oznakama:

(a) $$\vdash_{\mathcal{S}} \mathrm{A} \longleftrightarrow Ax(\mathcal{S}) \vdash_{\mathcal{K}} \mathrm{A},$$

gde je A formula računa $\mathcal{S}$. Možemo pretpostaviti da su sve aksiome zatvorene formule.

Kako u svakom izvođenju učestvuje konačno mnogo aksioma, za neki konačan podskup zatvorenih formula $\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n\} \subseteq Ax(\mathcal{S})$ važi

(b) $$Ax(\mathcal{S}) \vdash_{\mathcal{K}} \mathrm{A} \longleftrightarrow \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n\} \vdash_{\mathcal{K}} \mathrm{A}.$$

Pomenuti podskup zavisi od formule A.

Koristeći (a) i (b) i stav dedukcije dobijamo:

(c) $$\vdash_{\mathcal{S}} \mathrm{A} \longleftrightarrow \vdash_{\mathcal{K}} \mathrm{A}_1 \Rightarrow (\mathrm{A}_2 \Rightarrow (\ldots (\mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{A}) \ldots)),$$

odakle izvodimo zaključak da *svakoj teoremi A specijalnog računa $\mathcal{S}$ odgovara jedna određena teorema računa $\mathcal{K}$*. Odnosno, ispitivanje teorema nekog specijalnog kvantifikatorskog računa $\mathcal{S}$ je u uskoj vezi sa ispitivanjem teorema kvantifikatorskog računa prvog reda $\mathcal{K}$. Na taj način, račun $\mathcal{K}$ ima poseban značaj i zauzima centralno mesto među svim specijalnim kvantifikatorskim računima prvog reda.

3. EGZISTENCIJA MODELA I NEPROTIVUREČNOST. GÖDELOV STAV. SKOLEM-LÖWENHEIMOV STAV

Neka je $\mathcal{S}$ neki specijalan kvantifikatorski račun prvog reda i neka je $\mathcal{S}'$ formalna teorija koja ima sve simbole kao i teorija $\mathcal{S}$ i još dodatne konstante $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$.

S tim u vezi, skupovi formula, kao i aksioma teorije $\mathcal{S}'$, jesu nadskupovi odgovarajućih skupova formula i aksioma teorije $\mathcal{S}$. Tako, na primer, u $\mathcal{S}'$ je aksioma svaka formula oblika $(\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(b_1)$ koja se dobije iz Ax 4 ako se umesto t uzme b_1.

Dozvoljavamo da račun $\mathcal{S}$ ima i neke druge aksiome, a ne samo one koje proizlaze po shemama Ax 1—Ax 5.

Svaki takav račun $\mathcal{S}'$ zovemo *dopuna* računa $\mathcal{S}$. Važi sledeća lema.

Lema 1. *Ako je specijalan kvantifikatorski račun $\mathcal{S}$ neprotivurečan, onda postoji njegova dopuna $\mathcal{S}'$, koja je takođe neprotivurečan račun i u kojoj je tačan iskaz:*

Ako formula $A(u)$ ima kao slobodnu promenljivu jedino u i ako je formula $\neg(\forall u)\, A(u)$ teorema računa $\mathcal{S}'$, onda u računu $\mathcal{S}'$ postoji term t takav da je i formula $\neg A(t)$ teorema tog računa.

Dokaz. Članove niza promenljivih $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \ldots$ označimo redom $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$. Neka je

$$\begin{array}{cccccc}
F^1(s_1), & F^2(s_1), & F^3(s_1), & \ldots, & F^n(s_1), & \ldots \\
F^1(s_2), & F^2(s_2), & F^3(s_2), & \ldots, & F^n(s_2), & \ldots \\
F^1(s_3), & F^2(s_3), & F^3(s_3), & \ldots, & F^n(s_3), & \ldots \\
. & . & . & ,\ldots. & . & ,\ldots \\
F^1(s_n), & F^2(s_n), & F^3(s_n), & \ldots, & F^n(s_n), & \ldots \\
. & . & . & ,\ldots, & . & ,\ldots
\end{array}$$

skup svih formula obrazovanih od simbola računa S i od dodatnih konstanti $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ i pri tome formula $F^i(s_j)$ ima jedinu slobodnu promenljivu s_j. Taj skup formula je prebrojiv.

Označimo sa $F_k(s_{i_k})$ k-ti član niza čiji su članovi redom:

$$F^1(s_1),\ F^2(s_1),\ F^1(s_2),\ F^3(s_1),\ F^2(s_2),\ F^1(s_3), \ldots,$$

$$F^l(s_1),\ F^{l-1}(s_2), \ldots,\ F^2(s_{l-1}),\ F^1(s_l), \ldots, \quad (l = 1, 2, \ldots)$$

i sa $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_n}, \ldots$, sledeći niz konstanti:

1° b_{j_1} je onaj b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ koji ne učestvuje u formuli $F_1(s_{i_1})$ i pri tom od svih takvih b_i ima najmanji indeks.

2° b_{j_2} je onaj b_i (i = 1, 2, . . .) koji ne učestvuje u formulama $F_1(s_{i_1})$, $F_2(s_{i_2})$, razlikuje se od b_{j_1} i pri tom ima najmanji indeks od svih takvih b_i.

⋮

k° b_{j_k} je onaj b_i (i = 1, 2, . . .) koji ne učestvuje u formulama $F_1(s_{i_1})$, $F_2(s_{i_2})$, . . . , $F_k(s_{i_k})$, razlikuje se od svih $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_{k-1}}$ i pri tome ima najmanji indeks od svih b_i koji imaju ta svojstva.

⋮

Označimo sa $\mathcal{S}'$ dopunu računa $\mathcal{S}$ koja između ostalih aksioma ima i sledeće aksiome A_k:

$$\neg(\forall s_{i_k}) F_k(s_{i_k}) \Rightarrow \neg F_k(b_{j_k}). \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Lema je dokazana ako dokažemo da je $\mathcal{S}'$ neprotivurečan, pošto, prema A_k, ako je $\vdash \neg(\forall s_{i_k}) F_k(s_{j_k})$, onda je $\vdash \neg F_k(b_{j_k})$, gde je b_{j_k} određen term.

Označimo sa $\mathcal{S}_k$ (k = 0, 1, 2, . . .) dopunu računa $\mathcal{S}$ kome su dodate aksiome $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ali ne i $A_{k+1}, \ldots$. Dakle, $\mathcal{S}_0$ je polazni račun $\mathcal{S}$ sa dodatnim konstantama $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ i sa aksiomama koje proističu iz shema Ax 1—Ax 5.

Indukcijom po k dokazujemo da su svi računi $\mathcal{S}_k$ (k = 0, 1, 2, . . .) neprotivurečni.

Neka je k = 0. Ako je $\mathcal{S}_0$ protivurečan, onda postoji formula A u $\mathcal{S}_0$ takva da je $\underset{\mathcal{S}_0}{\vdash} A \wedge \neg A$. Neka je

$$B_1, B_2, \ldots, B_m \qquad (B_m \text{ je } A \wedge \neg A)$$

jedno izvođenje za tu teoremu i neka je x_p jedna promenljiva koja ne učestvuje u tom izvođenju. Pretpostavimo da se sve učestvujuće konstante b_i u navedenom izvođenju zamene sa x_p. Tada se dobija niz formula računa $\mathcal{S}$:

$$\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_m \qquad (\overline{B}_m \text{ je } \overline{A} \wedge \neg \overline{A})$$

koji je izvođenje u tom računu (jer opisana zamena prevodi aksiome računa $\mathcal{S}_0$ u aksiome računa $\mathcal{S}$ i čuva pravila izvođenja; na primer, $\overline{B}$ proizlazi iz $\overline{A}$ i $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$). Tako dobijamo da u računu $\mathcal{S}$ postoji teorema $\overline{A} \wedge \neg \overline{A}$, što je nemoguće, jer je $\mathcal{S}$ neprotivurečan prema pretpostavci. Dakle, $\mathcal{S}_0$ je neprotivurečan račun.

Neka je k broj veći od 0 i neka je $\mathcal{S}_{k-1}$ neprotivurečan račun (indukcijska hipoteza).

Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_k$ protivurečan račun. Onda su sve formule tog računa njegove teoreme. Specijalno je $\underset{\mathcal{S}_k}{\vdash} \neg A_k$, odakle, prema načinu na koji se od računa $\mathcal{S}_{k-1}$ prelazi na račun $\mathcal{S}_k$, imamo $A_k \underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} \neg A_k$. Pošto je A_k *zatvorena* formula, prema stavu dedukcije proizlazi

$$\underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} A_k \Rightarrow \neg A_k.$$

U iskaznom računu imamo tautologiju $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$. Stoga je $\underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} \neg A_k$, tj.

$$\underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} \neg (\neg (\forall s_{i_k}) F_k (s_{i_k}) \Rightarrow \neg F_k (b_{j_k})).$$

Prema tautologijama $\neg (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$, $\neg (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow q$, dobijamo

(1) $$\underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} \neg (\forall s_{i_k}) F_k (s_{i_k}), \quad \underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} F_k (b_{j_k}).$$

Neka je

$$B_1, B_2, \ldots, B_m$$

jedno izvođenje za teoremu $F_k (b_{j_k})$ računa $\mathcal{S}_{k-1}$ i neka je x_p promenljiva koja ne učestvuje u tom dokazu. Ako se b_{j_k} zameni sa x_p u svim formulama B_i, onda dobijamo nov niz, koji je izvođenje formule $F_k (x_p)$ računa $\mathcal{S}_{k-1}$.

Na taj način je $\underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} F_k (x_p)$, odakle, prema pravilu Gen, dobijamo $\underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} (\forall x_p) F_k (x_p)$.

Kako je term s_{i_k} slobodan za promenljivu x_p u formuli $F_k (x_p)$, to, prema Ax 4, dobijamo $\underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} F_k (s_{i_k})$. Prema pravilu Gen, imamo

$$\underset{\mathcal{S}_{k-1}}{\vdash} (\forall s_{i_k}) F_k (s_{i_k}).$$

Odavde, prema (1), dobijamo

$$\vdash_{\mathcal{S}_{k-1}} \neg (\forall s_{i_k})\, F_k (s_{i_k}), \quad \vdash_{\mathcal{S}_{k-1}} (\forall s_{i_k})\, F_k (s_{i_k}),$$

šta je nemoguće, jer je $\mathcal{S}_{k-1}$ neprotivurečan račun.

Na taj način su svi $\mathcal{S}_k$ neprotivurečni računi.

Odatle zaključujemo da je i račun S' neprotivurečan, jer izvođenje za neku njegovu formulu oblika $A \wedge \neg A$ mora biti i izvođenje u nekom računu $\mathcal{S}_k$, gde je k dovoljno veliki, a to je nemoguće, jer je svaki $\mathcal{S}_k$ neprotivurečan. ∎

Kako je $(\exists u)\, A(u)$, po definiciji, formula $\neg (\forall u) \neg A(u)$, kao posledicu dokazane leme imamo sledeću lemu — *lemu o egzistencijalnom kvantifikatoru.*

Lema 2. *Ako je specijalan kvantifikatorski račun* $\mathcal{S}$ *neprotivurečan, onda postoji njegova dopuna* $\mathcal{S}'$, *koja je takođe neprotivurečan račun i u kome je tačan iskaz:*

Ako formula $A(u)$ *ima kao slobodnu promenljivu jedino u i ako je* $(\exists u)\, A(u)$ *teorema računa* $\mathcal{S}'$, *onda u* $\mathcal{S}'$ *postoji term t takav da je i formula* $A(t)$ *teorema tog računa.*

Lema 3. *Ako zatvorena formula* $\neg F$ *nije teorema specijalnog računa* $\mathcal{S}$, *onda je neprotivurečan račun* $\mathcal{S}_1$, *koji se dobija iz računa* $\mathcal{S}$ *dodavanjem nove aksiome* F.

Dokaz. Pretpostavimo da je račun $\mathcal{S}_1$ protivurečan. U tom slučaju postoji neka formula A tog računa tako da je $\vdash_{\mathcal{S}_1} A$, $\vdash_{\mathcal{S}_1} \neg A$. Koristeći tautologiju $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$, odnosno teoremu

$$\vdash_{\mathcal{S}_1} (A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg F,$$

dobijamo $\vdash_{\mathcal{S}_1} \neg F$. Prema načinu obrazovanja računa $\mathcal{S}_1$ zaključujemo $F \vdash_{\mathcal{S}} \neg F$. Primenom stava dedukcije imamo $\vdash_{\mathcal{S}} F \Rightarrow \neg F$, odakle na osnovu tautologije $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$ dobijamo $\vdash_{\mathcal{S}} \neg F$, što je kontradikcija. Dakle, račun $\mathcal{S}_1$ je neprotivurečan. ∎

Definicija 1. *Specijalni kvantifikaiorski račun prvog reda* $\mathcal{S}$ *zovemo* POTPUN *ako svaka zatvorena formula* A *zadovoljava uslov:*

$$\vdash_{\mathcal{S}} A \quad \textit{ili} \quad \vdash_{\mathcal{S}} \neg A.$$

Definicija 2. *Specijalni kvantifikatorski račun prvog reda* $\bar{\mathcal{S}}$ *zovemo* PROŠIRENJE *specijalnog kvantifikatorskog računa prvog reda* $\mathcal{S}$ *ako oba računa imaju iste simbole i ako je svaka teorema računa* $\mathcal{S}$ *ujedno i teorema računa* $\bar{\mathcal{S}}$.

Dokazujemo sledeću, tzv. *lemu* Lindenbauma.

Lema 4. *Neprotivurečan specijalni kvantifikatorski račun prvog reda* $\mathcal{S}$ *ima neprotuvurečno i potpuno proširenje* $\bar{\mathcal{S}}$.

Dokaz. Skup svih zatvorenih formula računa $\mathcal{S}$ je prebrojiv. Neka je $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ niz čiji su članovi sve pomenute zatvorene formule. Definišimo niz $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n, \ldots$ specijalnih kvantifikatorskih računa prvog reda na sledeći način. Neka $\mathcal{S}_0$ bude $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_n$ određeni račun. Tada je $\mathcal{S}_{n+1}$ isti kao $\mathcal{S}_n$ ako je $\underset{\mathcal{S}_n}{\vdash} \neg F_{n+1}$, a u drugom slučaju $\mathcal{S}_{n+1}$ se dobija iz $\mathcal{S}_n$ prihvatanjem da je i formula F_{n+1} aksioma.

Svaki od računa $\mathcal{S}_n$ je neprotivurečan. Dokaz izvodimo indukcijom po n. Prema pretpostavci je $\mathcal{S}_0$ (tj. $\mathcal{S}$) neprotivurečan. Neka je $\mathcal{S}_n$ neprotivurečan. Razlikujemo dva slučaja.

I SLUČAJ $\mathcal{S}_{n+1} = \mathcal{S}_n$. Tada je $\mathcal{S}_{n+1}$ neprotivurečan.

II SLUČAJ $\mathcal{S}_{n+1} \neq \mathcal{S}_n$. Prema načinu na koji smo definisali $\mathcal{S}_{n+1}$, formula $\neg F_{n+1}$ nije teorema računa $\mathcal{S}_n$. Na osnovu leme 3, račun $\mathcal{S}_{n+1}$ je neprotivurečan. Dakle, ako je $\mathcal{S}_n$ neprotivurečan, onda je i $\mathcal{S}_{n+1}$ neprotivurečan, odnosno svi računi $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n, \ldots$ su neprotivurečni.

Označimo sa $\bar{\mathcal{S}}$ račun čiji su simboli isti kao simboli računa $\mathcal{S}$ i čije su aksiome, aksiome svih računa $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n \ldots$.

Račun $\bar{\mathcal{S}}$ je neprotivurečan, jer izvođenje za neku njegovu formulu oblika $A \wedge \neg A$ mora biti i u izvesnom $\mathcal{S}_n$, što je nemoguće.

Pošto je račun $\bar{\mathcal{S}}$ i potpuno proširenje računa $\mathcal{S}$, lema je potpuno dokazana. ∎

Sledeći stav — *stav o vezi između egzistencije modela i neprotivurečnosti* ima poseban značaj.

Stav 1. *Svaki neprotivurečan specijalni kvantifikatorski račun* $\mathcal{S}$ *prvog reda ima prebrojiv model.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}'$ dopuna računa $\mathcal{S}$, obrazovana kao u dokazu leme 1, odnosno dodavanjem konstanti $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ i aksioma A_k:

$$\neg (\forall s_i) F_k(s_{i_k}) \Rightarrow \neg F_k(b_{j_k}).$$

Dopuna $\mathcal{S}'$ je neprotivurečan račun. Označimo sa $\mathcal{E}$ potpuno neprotivurečno proširenje računa $\mathcal{S}'$, koje, prema lemi Lindenbauma, postoji. Neka je M skup svih zatvorenih terma iz $\mathcal{S}'$, tj. terma koji ne sadrže promenljive. U tom skupu uvodimo na sledeći način operacije i relacije.

1° Ako je f_i^j operacijsko slovo računa $\mathcal{S}$ i ako su $t_1, t_2, \ldots, t_j$ neki zatvoreni termi istog računa, onda je term $f_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j)$ rezultat operacije, u oznaci f_i^j, nad termima $t_1, t_2, \ldots, t_j$, odnosno

$$\mathrm{f}_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j) \overset{\text{def}}{=} f_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j).$$

Tako, na primer,

$$\mathrm{f}_1^2(a_1, f_1^1(b_1)) = f_1^2(a_1, f_1^1(b_1)), \ \mathrm{f}_1^1(f_3^1(a_1)) = f_1^1(f_3^1(a_1)).^1$$

Na taj način, svakom operacijskom slovu f_i^j računa $\mathcal{E}$ dodeljuje se po jedna operacija dužine j skupa M.

2° Ako je R_i^j relacijsko slovo računa $\mathcal{S}$ i ako su $t_1, t_2, \ldots, t_j$ neki zatvoreni termi, onda kažemo: $t_1, t_2, \ldots, t_j$ tim redom su u relaciji R_i^j ako i samo ako je formula $R_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j)$ teorema računa $\mathcal{E}$.

Dakle, svakom relacijskom slovu R_i^j odgovara po jedna relacija dužine j skupa M, u oznaci R_i^j, za koju je

(2) $$\mathrm{R}_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j) = \top \longleftrightarrow \vdash_{\mathcal{E}} R_i^j(t_1, t_2, \ldots, t_j).$$

Interpretirajmo operacijska i relacijska slova računa $\mathcal{E}$ kao navedene operacije i relacije skupa M, a za interpretaciju konstanti uzimamo iste konstante. Tako dobijamo interpretaciju I računa $\mathcal{E}$, kao i računa $\mathcal{S}$. Dokazaćemo da u odnosu na tu interpretaciju važi: *zatvorena formula A je tačna pri interpretaciji I ako i samo ako je formula A teorema teorije* $\mathcal{E}$.

Dakle, kraće,

(3) $$A \text{ je tačna} \longleftrightarrow \vdash_{\mathcal{E}} A$$

[1] Primetimo da su f i f različiti simboli.

Označimo sa d(A) broj znakova $\Rightarrow$, $\neg$, $\forall$ koji se pojavljuju u formuli A. Dokaz izvodimo indukcijom prema broju d.

Neka je $d(A)=0$. Tada je iskaz tačan, jer je A elementarna formula, pa se uslov (3) svodi na (2).

Pretpostavimo sada da je iskaz tačan za svaku zatvorenu formulu B čiji je broj $d(B)<n$. Dokazujemo da je navedeni iskaz tačan za svaku zatvorenu formulu A za koju je $d(A)=n$.

Pri tome razlikujemo tri slučaja.

Slučaj 1. Formula A je oblika $\neg B$. Tada, prema indukcijskoj hipotezi, imamo

$$B \text{ je tačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} B,$$

odnosno odatle

$$B \text{ je netačna} \longleftrightarrow \text{nije } \underset{\mathscr{C}}{\vdash} B,$$

što, na osnovu potpunosti računa $\mathscr{C}$, daje

$$B \text{ je netačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} \neg B,$$

odnosno

$$A \text{ je tačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} A.$$

Slučaj 2. Formula A je oblika $B \Rightarrow C$. Pošto je A zatvorena formula, takve su i formule B i C. Prema indukcijskoj hipotezi i na osnovu potpunosti računa $\mathscr{C}$, imamo:

$$B \text{ je tačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} B, \quad B \text{ je netačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} \neg B,$$

$$C \text{ je tačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} C, \quad C \text{ je netačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} \neg C,$$

odakle neposredno dobijamo

$$B \Rightarrow C \text{ je netačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} B, \ \underset{\mathscr{C}}{\vdash} \neg C;$$

tj.

$$B \Rightarrow C \text{ je netačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} \neg (B \Rightarrow C)$$

odnosno

$$A \text{ je tačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{C}}{\vdash} A.$$

Slučaj 3. A je oblika $(\forall s_n)$ B. Mogu nastupiti dva slučaja.

Slučaj 3 a. Formula B je zatvorena. Tada, prema indukcijskoj hipotezi, imamo:

$$\text{B je tačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{E}}{\vdash} \text{B}.$$

Pošto: 1° B je tačna $\longleftrightarrow$ A je tačna, i

2° $\underset{\mathscr{E}}{\vdash} \text{B} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{E}}{\vdash} \text{A}$,

onda

$$\text{A je tačna} \longleftrightarrow \underset{\mathscr{E}}{\vdash} \text{A}.$$

Slučaj 3 b. B nije zatvorena formula. U tom slučaju formula A je, prema oznakama dokaza leme 1, oblika $(\forall s_{i_p}) F_p (s_{i_p})$, gde je p neki prirodan broj.

Neka je A tačna pri interpretaciji I, ali nije $\underset{\mathscr{E}}{\vdash}$ A. Prema potpunosti, imamo $\underset{\mathscr{E}}{\vdash} \neg$ A, tj. $\underset{\mathscr{E}}{\vdash} \neg (\forall s_{i_p}) F_p (s_{i_p})$.

Među aksiomama A_k:

$$\neg (\forall s_{i_k}) F_k (s_{i_k}) \Rightarrow \neg F_k (b_{j_k})$$

(za izvestan prirodan broj k) nalazi se i aksioma oblika

$$(4) \qquad \neg (\forall s_{i_p}) F_p (s_{i_p}) \Rightarrow \neg F_p (b_{j_p}).$$

Iz (4) dobijamo $\underset{\mathscr{E}}{\vdash} \neg F_p (b_{j_p})$. Pošto je A tačna, to je, prema Ax 4, i formula $F_p(b_{j_p})$ tačna. Prema indukcijskoj hipotezi, ta formula je teorema, odnosno $\underset{\mathscr{E}}{\vdash} F_p (b_{j_p})$, što dovodi do kontradikcije, jer $\underset{\mathscr{E}}{\vdash} \neg F_p (b_{j_p})$.

Prema tome, ako je A tačna formula pri interpretaciji I, onda je $\underset{\mathscr{E}}{\vdash}$ A.

Pretpostavimo da je A netačna i da je $\underset{\mathscr{E}}{\vdash}$ A. Pošto je formula $(\forall s_{i_p}) F_p (s_{i_p})$ netačna pri interpretaciji I čiji je domen skup zatvorenih terma, onda je za neki zatvoreni term t formula $F_p(t)$ netačna. Iz $\vdash_{\mathscr{E}} (\forall s_{i_p}) F_p(s_{i_p})$ prema Ax 4 dobijamo $\vdash_{\mathscr{E}} F_p(t)$, odakle prema indukcijskoj hipotezi dobijamo da je formula $F_p(t)$ tačna. Prema dobijenoj kontradikciji zaključujemo: ako je A netačna, onda formula A nije teorema računa $\mathscr{E}$.

Prema tome, indukcijom je dokazano za svaku zatvorenu formulu A računa $\mathscr{E}$:

$$\text{A je tačna pri interpretaciji } I \longleftrightarrow \vdash \text{A}.$$

Na taj način interpretacija I je model (prebrojiv) računa $\mathscr{E}$, pa prema tome i polaznog računa $\mathscr{S}$. ∎

Neka je $\mathscr{S}$ neki specijalni kvantifikatorski račun prvog reda koji ima model. Dve formule oblika A i $\neg$ A ne mogu biti teoreme tog računa, jer bi u protivnom obe bile tačne, odakle bi se dobijalo $\neg \top = \top$.

Prema ovome tvrđenju i na osnovu dokazanog stava, zaključujemo:

Račun je neprotivurečan ako i samo ako ima model. Sledeći, tzv. Löwenheim-Skolemov stav, pronađen je pre stava 1.

Stav 2. *Ako specijalni kvantifikatorski račun prvog reda ima model, onda on ima i prebojiv model.*

Dokaz. Ako $\mathscr{S}$ ima model, onda je $\mathscr{S}$ neprotivurečan. Prema stavu 1, $\mathscr{S}$ ima prebrojiv model. ∎

Prelazimo na dokaz poznatog Gödelovog stava, koji glasi:

Formula A *kvantifikatorskog računa prvog reda* $\mathscr{K}$ *je valjana ako i samo ako je ona i teorema tog računa.*

Pošto smo dokazali da je svaka teorema računa $\mathscr{K}$ takođe i valjana formula, ostaje jedino da se dokaže sledeći stav.

Stav 3. *Ako je formula* A *kvantifikatorskog računa prvog reda* $\mathscr{K}$ *valjana, onda je ta formula i teorema istog računa.*

Dokaz. Neka je A_1 zatvorenje formule A (v. tačku 5, glava II, prvi deo). Pošto je A valjana, to je A_1 valjana. Pretpostavimo da A_1 nije teorema računa $\mathscr{K}$. Neka je $\mathscr{S}$ račun koji se dobija iz računa $\mathscr{K}$ uzimanjem formule $\neg A_1$ za specijalnu aksiomu. Račun $\mathscr{S}$ je neprotivurečan na osnovu leme 3.

Prema stavu 1, taj račun ima model i u tom modelu je formula $\neg A_1$ tačna. Ovo je kontradikcija, jer je A_1 valjana formula. Dakle, A_1 je teorema, a prema Ax 4 je i formula A teorema. ∎

Koristeći stav 1 dokazujemo i sledeći stav, kojim se uspostavlja veza između pojma semantička posledica, koji je uveden u prvom delu (glava II, tačka 5), i pojma posledica (odnosno i tzv. SINTAKTIČKA posledica) uvedenog u glavi o formalnim teorijama. Inače, sve formule su iz kvantifikatorskog računa $\mathcal{K}$. Ne umanjujući opštost, pretpostavljamo da je formula F zatvorena.

Stav 4. *Neka je $\mathcal{F}$ neki skup formula računa $\mathcal{K}$ i neka je F izvesna zatvorena formula istog računa. Tada*

$$\mathcal{F} \models F \longleftrightarrow \mathcal{F} \vdash_{\mathcal{K}} F.$$

Dokaz. Pretpostavimo, najpre da je $\mathcal{F} \models F$. Označimo sa $\mathcal{S}$ specijalni kvantifikatorski račun prvog reda za koji je $\mathcal{F}$ skup specijalnih aksioma. Ako je taj račun protivurečan, onda su u tom računu teoreme sve njegove formule pa $\vdash_{\mathcal{S}} F$, odakle $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{K}} F$. Ako je $\mathcal{S}$ neprotivurečan, onda postoje dve mogućnosti.

1° Formula F jeste teorema računa $\mathcal{S}$. U ovom slučaju dokazali smo $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{K}} F$.

2° Formula F nije teorema računa $\mathcal{S}$. Račun $\mathcal{S}_1$ dobijen iz računa $\mathcal{S}$ dodavanjem aksiome $\neg F$ neprotivurečan je na osnovu leme 3. Prema stavu 1, račun $\mathcal{S}_1$ ima model. U modelu su tačne sve aksiome računa $\mathcal{S}_1$, odnosno sve formule skupa $\mathcal{F}$, kao i formula $\neg F$. Međutim, to je nemoguće, jer je $\mathcal{F} \models F$, pa je i formula F tačna u tom modelu.

Pošto slučaj 2° ne može nastupiti, zaključujemo da iz $\mathcal{F} \models F$ proizlazi $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{K}} F$.

Neka je zatim, $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{K}} F$. Tada je formula F teorema računa $\mathcal{S}$ čiji je skup specijalnih aksioma jednak skupu $\mathcal{F}$. Stoga je formula F tačna pri nekoj interpretaciji ako su pri istoj interpretaciji tačne sve formule iz skupa $\mathcal{F}$. Dakle, $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{K}} F \longrightarrow \mathcal{F} \models F$, pa je stav potpuno dokazan. ∎

Najzad dokazujemo *stav o vezi između egzistencije normalnog modela i neprotivurečnosti specijalnog računa $\mathcal{S}$ sa jednakošću.*

Stav 5. *Neprotivurečan račun $\mathcal{S}$ sa jednakošću ima konačan ili prebrojiv normalan model.*

Dokaz. Prema stavu 1, račun $\mathcal{S}$ ima prebrojiv model M. Relacija $=$, prema definiciji računa sa jednakošću (prethodna tačka), ima svojstva:

$$x=x, \quad x=y \Rightarrow y=x, \quad (x=y \wedge y=z) \Rightarrow x=z,$$

pa je $=$ relacija ekvivalencije skupa M. Označimo sa $\overline{x}$ klasu ekvivalencije elementa x, a sa $\overline{M}$ skup svih klasa ekvivalencije. Skup $\overline{M}$ je konačan ili prebrojiv.

Neka su f, R intepretacije u modelu M redom za operacijsko slovo f dužine m i relacijsko slovo R dužine n. U skupu $\overline{M}$ definišimo na sledeći način operaciju $\overline{f}$ dužine m i relaciju $\overline{R}$ dužine n:

$$\overline{f}\,(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m) \overset{\text{def}}{=} \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)},$$

$$\overline{R}\,(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \overset{\text{def}}{=} R\,(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Koristeći definiciju računa sa jednakošću, neposredno zaključujemo da $\overline{M}$ čini normalni model računa $\mathcal{S}$, smatrajući da su $\overline{f}$, $\overline{R}$ intepretacije redom slova f, R i da je interpretacija ma koje individualne konstante a jednaka $\overline{a}$. ∎

Primedba. Kaže se da je model $\overline{M}$ obrazovan od modela M *kontrakcijom*.

4. GÖDELOVI BROJEVI. ARITMETIZACIJA. DEFINICIJA REKURZIVNIH FUNKCIJA

Svakom osnovnom simbolu s kvantifikatorskog računa prvog reda $\mathcal{K}$ na sledeći način dodeljujemo prirodan broj, u oznaci $g(s)$, tzv. *Gödelov broj simbola s.*

$$g(\,(\,)=3; \quad g(\,)\,)=5; \quad g(\,,\,)=7; \quad g(\neg)=9, \; g(\Rightarrow)=11$$

$$g(u_k)=5+8\,k \quad (k=1, 2, \ldots)$$

$$(u_1, u_2, \ldots \text{ je } x, y, z, \ldots, x_n, y_n, z_n, \ldots)$$

$$g(a_k)=7+8\,k \quad (k=1, 2, \ldots)$$

$$g(f_k^n)=9+8\,(2^n 3^k) \quad (k, n \geqslant 1)$$

$$g(R_k^n)=11+8\,(2^n 3^k) \quad (k, n \geqslant 1).$$

Prema tom dogovoru imamo, na primer, $g(x)=13$, $g(y)=21$, $g(a_5)=47$, $g(R_1^1)=59$.

Neposredno se proverava da su različitim simbolima dodeljeni različiti prirodni brojevi i da su svi dodeljeni brojevi neparni.

Neka je $s_1 s_2 \ldots s_l$ konačan niz simbola, odnosno reč računa $\mathcal{K}$. Za Gödelov broj te reči, u oznaci $g(s_1 s_2 \ldots s_l)$ uzimamo $2^{g(s_1)}\, 3^{g(s_2)} \ldots p_l^{g(s_l)}$, gde je $2, 3, \ldots, p_l$ niz uzastopnih prostih brojeva.

Na primer;

$$g(R_1^1(x,\ a_5))=2^{g(R_1^1)}\cdot 3^{g((\,)}\cdot 5^{g(x)}\cdot 7^{g(,)}\cdot 11^{g(a_5)}\cdot 13^{g(\,))}$$

$$=2^{59}\cdot 3^3\cdot 5^{13}\cdot 7^7\cdot 11^{47}\cdot 13^5$$

$$g(((\,)=2^{(\,(\,)}\cdot 3^{g(\,(\,)}=2^3\cdot 3^3=216$$

Između ostalog, svakoj formuli računa $\mathcal{K}$ dodeljen je jedan prirodan broj — Gödelov broj te formule.

Neka je $w_1 w_2 \ldots w_l$ konačan niz reči računa $\mathcal{K}$. Za Gödelov broj tog niza reči, u oznaci $g(w_1 w_2 \ldots w_l)$ uzimamo $2^{g(w_1)}\ 3^{g(w_2)} \ldots \ldots p_l^{g(w_l)}$. Na taj način, između ostalog, svakom konačnom nizu formula odgovara neki Gödelov broj. Isto tako, svakom izvođenju teorije $\mathcal{K}$ dodeljuje se po jedan prirodan broj.

Opisanim postupkom dodeljuje se svakom simbolu, reči, konačnom nizu reči računa $\mathcal{K}$ po jedan prirodan broj.

Funkcija g je 1—1 preslikavanje skupa simbola, reči, konačnih nizova reči računa $\mathcal{K}$ u skup prirodnih brojeva. To preslikavanje nije preslikavanje *na* skup prirodnih brojeva jer, na primer, 10 nije Gödelov broj.

Tom idejom je Gödel (1931) izvršio prevođenje mnogih problema izvesne formalne teorije na probleme relacija među prirodnim brojevima 0, 1, 2, ... Ta ideja je presudna u rešavanju mnogih problema matematičke logike.

Inače, preslikavanje g koje smo naveli samo je jedan primer tzv. ARITMETIZACIJE.

Definicija 1. ARITMETIZACIJA *formalne teorije* $\mathcal{G}$ *je svako* 1 — 1 *preslikavanje skupa osnovnih simbola, reči, konačnih nizova reči teorije* $\mathcal{G}$ *u skup prirodnih brojeva koje ima sledeća svojstva:*

1° *g je izračunljiva.*

2° *postoji postupak kojim se može utvrditi da li za dati pri-*

rodan broj n *postoji objekat* x *takav da je* $g(x) = n$; *a takođe i postupak za nalaženje objekta* x.

Upotrebljeni način dodeljivanja prirodnih brojeva osnovnim simbolima računa $\mathcal{K}$ nije jedini moguć. Isto takođe moguć je svaki drugi način koji ispunjava uslove date definicije.

U prethodnoj definiciji pojmovi *izračunljiva funkcija* i *postupak* su intuitivni.

Intuitivno, izračunljiva funkcija je ona za koju postoji postupak kojim se od originala dobija slika. Na primer, takve su funkcije određene jednakostima

$$f(x) = x + 2, \quad g(x, y) = x^y + \max(x, y)$$

Takva je i funkcija za koju je $f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ako je $x = a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_n \cdot 10^n$, gde su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ iz skupa brojeva $0, 1, \ldots, 9$.

REKURZIVNE FUNKCIJE, čiju definiciju navodimo, spadaju u klasu izračunljivih funkcija. Te funkcije su, inače, izvesna preslikavanja skupova N^k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ u skup N (prirodnih brojeva).

Funkcije određene jednakostima

$N(x) = 0$ (nula-funkcija)

$S(x) = x + 1$ (naslednik-funkcija)

$U_i^j(x_1, x_2, \ldots, x_j) = x_i$ (projekcijska funkcija)

$(i, j = 1, 2, 3, \ldots; \; i \leqslant j)$

zovemo POLAZNE funkcije.

Neka su f, g, h funkcije za koje važe jednakosti

$$(1) \quad \begin{aligned} & f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) \end{aligned}$$

za sve prirodne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.

Tada kažemo da se *funkcija* f *dobija pomoću funkcija* g *i* h *rekurzijom*. Za $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kažemo da su parametri rekurzije. Ako njih nema, onda jednakosti (1) glase:

$$f(0) = k,$$

$$f(y+1) = h(y, f(y)),$$

gde je k neki prirodan broj.

Inače, jednakosti (1) jedinstveno određuju funkciju f pomoću funkcija g i h.

Neka je g funkcija koja ima sledeće svojstvo:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)(\exists y)(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0).$$

Neka

$$\mu y(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0)$$

označava, za date brojeve

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

najmanji broj y za koji je

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0.$$

Tada jednakost

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\mu y(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0)$$

jedinstveno određuje funkciju f. Kažemo u tom slučaju da je *funkcija* f *dobijena pomoću* μ*-operatora (od funkcije* g).

Neka su g, $h_1, h_2, \ldots, h_k$ date funkcije.

Tada jednakost

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=g(h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

jedinstveno određuje funkciju f. *Kažemo da je ta funkcija određena supstitucijom pomoću funkcija* g, $h_1, h_2, \ldots, h_k$.

Definicija 2. *Za funkciju* f: $N^k \to N$, *gde je* k *neki pozitivan prirodni broj, kažemo da je* REKURZIVNA *ako postoji bar jedan konačan niz funkcija*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \qquad (f_n \text{ je jednaka } f)$$

tako da svaka funkcija f_i *toga niza zadovoljava uslov:*

1° f_i *je polazna funkcija; ili*

2° f_i *se određuje pomoću nekih prethodnih članova niza rekurzijom, supstitucijom ili* μ*-operatorom.*

Primer. Funkcija f: $f(x, y)=x+y$ je rekurzivna. Njoj odgovara sledeći niz:

$$U_1^1, S, f,$$

jer je $f(x, 0)=x$, $f(x, y+1)=S(f(x, y))$.

Dokazuje se, na primer, da su sledeće funkcije rekurzivne:

$$f(x, y) = x \cdot y, \quad g(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{ako } x \geqslant y \\ 0 & \text{ako } x < y. \end{cases}$$

$$h(x, y) = x^y, \quad k(x, y) = max(x, y).$$

Church *je postavio hipotezu* (Churchova *teza*) *da je skup rekurzivnih funkcija jednak* (*intuitivnom*) *skupu izračunljivih funkcija.*

Poznate su mnoge činjenice koje idu u prilog te hipoteze.

Neka je α neka relacija dužine n skupa prirodnih brojeva i neka je f sledeća funkcija (tzv. KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA relacije α):

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{ako} \quad \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \top \\ 0 & \text{ako} \quad \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bot \end{cases}$$

Za relaciju α *kažemo da je rekurzivna ako je njena funkcija* f_α *rekurzivna.*

5. RELACIJE I PRESLIKAVANJA PRIRODNIH BROJEVA PREDSTAVLJIVI U FORMALNOJ TEORIJI BROJEVA I RAČUNU $\mathcal{Q}$

Definicja 1. *Relacija* α *dužine n skupa prirodnih brojeva je* PREDSTAVLJIVA *u formalnoj teoriji brojeva* $\mathcal{A}$ *ako postoji bar jedna formula* $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *računa* $\mathcal{A}$ *koja ima jedine slobodne promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tako da su ispunjeni sledeći uslovi:*

1° *Ako su redom prirodni brojevi* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *u relaciji* α, *onda je* $\vdash_{\mathcal{A}} A(\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n)$.

2° *Ako redom prirodni brojevi* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *nisu u relaciji* α, *onda je* $\vdash_{\mathcal{A}} \neg A(\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n)$.

Na primer relacija jednakost, predstavljiva je u računu $\mathcal{A}$ formulom $x_1 = x_2$. Slično, relacija u oznaci $\leqslant$ predstavljiva je formulom $x_1 \leqslant x_2$. Naravno, svaka relacija α skupa prirodnih brojeva nije predstavljiva u računu $\mathcal{A}$. Razlog je, na primer, što je skup svih formula računa $\mathcal{A}$ prebrojiv, dok skup svih relacija skupa prirodnih brojeva nije prebrojiv.

Neka je M neki podskup skupa prirodnih brojeva. Njemu odgovara sledeća relacija, u oznaci μ:

Prirodan broj x *je u relaciji* $\mu \longleftrightarrow x \in M$.

Kažemo, *skup* M *je predstavljiv u računu* $\mathcal{A}$ ako je relacija μ predstavljiva u istom računu. Isti skup je *rekurzivan* ako je relacija μ rekurzivna.

Dokazuje se, na primer, da su u računu $\mathcal{A}$ predstavljivi sledeći skupovi: skup parnih prirodnih brojeva i skup prostih brojeva. U daljem izlaganju koristićemo sledeću činjenicu. Ako su predstavljivi skupovi A i B, onda je predstavljiv i skup $A \cap B$. Zaista ako su $A(x_1)$ i $B(x_1)$ formule koje predstavljaju redom skupove A i B, onda je skup $A \cap B$ predstavljiv formulom $A(x_1) \wedge B(x_1)$, što se neposredno proverava.

Neka je f preslikavanje skupa N^n u skup N, gde je N skup svih prirodnih brojeva.

Definicija 2. *Preslikavanje* f *je* PREDSTAVLJIVO *u formalnoj teoriji brojeva* $\mathcal{A}$ *ako postoji bar jedna formula* $A(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ *čije su jedine slobodne promenljive* $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, *tako da su ispunjeni sledeći uslovi:*

1° *Ako* $f(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m_{n+1}$,

onda $\vdash_{\mathcal{A}} A(\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_n, \overline{m}_{n+1})$.

2° $\vdash_{\mathcal{A}} (\exists_1 x_{n+1}) A(\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n, x_{n+1})$

Na primer, funkcija za koju je $f(x) = x^2$ predstavljiva je formulom $x_2 = x_1^2$, dok je funkcija određena jednakošću $f(x, y) = x$ predstavljiva formulom $x_3 = x_1 \wedge x_2 = x_2$.

U daljem izlaganju u vezi sa određenim specijalnim kvantifikatorskim računom pojavljuju se:

I. Binarna relacija γ skupa prirodnih brojeva, definisana na sledeći način:

Prirodan broj m *je u relaciji* γ *sa prirodnim brojem* n *ako i samo ako je* m *Gödelov broj neke formule* $A(x_1)$ *čija je jedina slobodna promenljiva* x_1, *dok je broj* n *Gödelov broj nekog izvođenja formule* A (m), *ukoliko je ta formula teorema.*

II. Funkcija d skupa prirodnih brojeva, koja ispunjava uslov:

Ako je m *Gödelov broj formule* $A(x_1)$ *čija je jedina slobodna promenljiva* x_1, *onda je* d (m) *Gödelov broj formule* $A(\overline{m})$.

III. *Skup For čiji su elementi svi oni prirodni brojevi koji su Gödelovi brojevi formula računa* $\mathcal{A}$.

Inače, pojaviće nam se i pojmovi predstavljivost neke relacije ili preslikavanja prirodnih brojeva ne samo u odnosu na račun $\mathcal{A}$ već i u odnosu na neki račun $\mathcal{S}$ specijalni kvantifikatorski račun sa jednakošću koji ima iste simbole kao račun $\mathcal{A}$. Ti pojmovi se uvode definicijama koje su slične već navedenim i dobijenim iz njih kada se na odgovarajući način račun $\mathcal{A}$ zameni računom $\mathcal{S}$. Radi toga ih ne ponavljamo.

Među računima $\mathcal{S}$ značajno mesto zauzima račun $\mathcal{Q}$ čiji je autor R. Robinson (1950) i koji ima sledeće specijalne aksiome (*konačno mnogo*):

Q_1 $\quad x_1 = x_1.$

Q_2 $\quad x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1.$

Q_3 $\quad (x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3) \Rightarrow x_1 = x_3.$

Q_4 $\quad x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2'.$

Q_5 $\quad x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \wedge x_3 + x_1 = x_3 + x_2).$

Q_6 $\quad x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 \wedge x_3 \cdot x_1 = x_3 \cdot x_2).$

Q_7 $\quad x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2.$

Q_8 $\quad 0 \neq x_1'.$

Q_9 $\quad x_1 \neq 0 \Rightarrow (\exists x_2)(x_1 = x_2').$

Q_{10} $\quad x_1 + 0 = x_1.$

Q_{11} $\quad x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'.$

Q_{12} $\quad x_1 \cdot 0 = 0.$

Q_{13} $\quad x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1.$

Bez dokaza navodimo sledeća tvrđenja koja koristimo u daljem izlaganju.

1° *Relacija* γ *(koja se odnosi na formule računa* $\mathcal{A}$*) predstavljiva je izvesnom formulom* $\Gamma(x_1, x_2)$ *u računu* $\mathcal{A}$.

2° *Funkcija* d *(koja se odnosi na formule računa* $\mathcal{Q}$*) predstavljiva je izvesnom formulom* $D(x_1, x_2)$ *u tom računu.*

3° *Skup For, čiji su elementi oni prirodni brojevi koji su Gödelovi brojevi formula računa* $\mathcal{Q}$*, predstavljiv je u računu* $\mathcal{Q}$.

4° *Neki skup* S *prirodnih brojeva predstavljiv je u računu* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako je predstavljiv u računu* $\mathcal{Q}$.

Ta se tvrđenja obično dokazuju korišćenjem teorije rekurzivnih funkcija.

Dokazuje se obično, najpre. za svaku od pomenutih funkcija i relacija da su rekurzivne, pa se, dalje, koristi sledeći osnovni stav:

Funkcija ili relacija skupa prirodnih brojeva predstavljiva je u računu $\mathcal{A}$ *(računu* $\mathcal{Q}$*) ako i samo ako je rekurzivna.*

6. NEPOTPUNOST FORMALNE TEORIJE BROJEVA

Dokazujemo, pod izvesnim pretpostavkama, da u formalnoj teoriji brojeva $\mathcal{A}$ postoji zatvorena formula F takva da ni F ni $\neg$ F nisu teoreme te teorije — odnosno dokazujemo NEPOTPUNOST te teorije.

Prethodno uvodimo pojam ω-neprotivurečnosti za teoriju $\mathcal{A}$.

Definicija 1. *Kažemo da je* $\mathcal{A}$ ω-NEPROTIVUREČNA *ako je ispunjen sledeći uslov za svaku formulu* $A(u)$ *(u* je *promenljiva): Ako su sve formule* $A(0), A(\overline{1}), A(\overline{2}), \ldots, A(\overline{n}), \ldots$ *teoreme, onda formula* $(\exists u)\neg A(u)$ *nije teorema.*

Ako prihvatimo standardni model kao model formalne teorije brojeva, onda odatle proizlazi da je ta teorija ω-neprotivurečna. Inače, ω-neprotivurečnost povlači neprotivurečnost, odnosno važi stav.

Stav 1. *Ako je račun* $\mathcal{A}$ *ω-neprotivurečan onda je on i neprotivurečan.*

Dokaz. Uočimo sledeću formulu $A(x): x=x \Rightarrow x=x$. U računu $\mathcal{A}$ sve sledeće formule su teoreme: $0=0 \Rightarrow 0=0$, $\overline{1}=\overline{1} \Rightarrow \overline{1}=\overline{1}, \ldots,$ $\overline{n}=\overline{n} \Rightarrow \overline{n}=\overline{n}, \ldots$, pa kako je, prema pretpostavci, račun $\mathcal{A}$ ω-neprotivurečan, formula $(\exists x)\neg(x=x \Rightarrow x=x)$ nije teorema. Dakle, u računu $\mathcal{A}$ postoji bar jedna formula koja nije teorema. Stoga je $\mathcal{A}$ neprotivurečan račun. ∎

Neka je γ relacija dužine 2, uvedena u prethodnoj tački, i neka je $\Gamma(x_1, x_2)$ formula računa $\mathcal{A}$ koja je predstavlja. Dakle:

1° *Prirodan broj m je u relaciji* γ *sa brojem n ako i samo ako je ispunjen uslov:* m *je Gödelov broj neke formule* $A(x_1)$ *koja ima jedinu slobodnu promenljivu* x_1, *a* n *je Gödelov broj nekog izvođenja formule* $A(\overline{m})$, *ukoliko je ona teorema.*

2° *Ako je* m *u relaciji* γ *sa* n, *onda je* $\vdash_{\mathcal{A}} \Gamma(\overline{m}, \overline{n})$, *a ako* m *nije u relaciji* γ *sa* n, *onda je* $\vdash_{\mathcal{A}} \neg \Gamma(\overline{m}, \overline{n})$.

Uočimo sledeću formulu $A(x_1)$:

(1) $$(\forall x_2) \neg \Gamma(x_1, x_2).$$

Neka je m njen Gödelov broj. Tada je $A(\overline{m})$ sledeća formula:

(2) $$(\forall x_2) \neg \Gamma(\overline{m}, x_2).$$

U onome što sledi, osnovnu ulogu ima zatvorena formula (2).

Dokazujemo sledeći stav čiji je autor K. Gödel (1931).

Stav 2. (1) *Ako je račun* $\mathcal{A}$ *neprotivurečan, tada formula* (2) *nije teorema tog računa.*

(2) *Ako je račun* $\mathcal{A}$ ω*-neprotivurečan, tada formula* $\neg$(2) *nije teorema tog računa.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ neprotivurečan račun i da je $\vdash_{\mathcal{A}} (\forall x_2) \neg \Gamma(\overline{m}, x_2)$. Neka je n Gödelov broj bilo kog izvođenja te teoreme u raćunu $\mathcal{A}$. Tada je broj m u relaciji γ sa brojem n. Pošto formula $\Gamma(x_1, x_2)$ predstavlja relaciju γ, to je $\vdash_{\mathcal{A}} \Gamma(\overline{m}, \overline{n})$.

Međutim, iz $\vdash_{\mathcal{A}} (\forall x_2) \neg \Gamma(\overline{m}, x_2)$, prema Ax 4, dobijamo da je $\vdash_{\mathcal{A}} \neg \Gamma(\overline{m}, \overline{n})$. Tako imamo $\vdash_{\mathcal{A}} \Gamma(\overline{m}, \overline{n})$ i $\vdash_{\mathcal{A}} \neg \Gamma(\overline{m}, \overline{n})$, što je nemoguće, jer je $\mathcal{A}$ neprotivurečan račun. Dakle, (2) nije teorema računa $\mathcal{A}$.

(2) Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ ω-neprotivurečan i da je $\vdash_{\mathcal{A}} \neg(\forall x_2) \neg \Gamma(\overline{m}, x_2)$, odnosno $\vdash_{\mathcal{A}} \neg$(2). Kako je, prema stavu 1, račun $\mathcal{A}$ neprotivurečan, to nije $\vdash_{\mathcal{A}}$ (2). Prema tome, nijedan prirodan broj n ne može biti Gödelov broj nekog izvođenja formule (2). Na osnovu definicije relacije γ, za svaki prirodan broj n imamo: m nije u relaciji γ sa n.

Kako formula $\Gamma(x_1, x_2)$ predstavlja relaciju γ, formula $\neg \Gamma(\overline{m}, \overline{n})$ je teorema za svaki prirodan broj n. Pošto je $\mathcal{A}$ ω-neprotivurečan, sledeća formula nije teorema:

$(\exists x_2) \neg\neg \Gamma(\overline{m}, x_2)$, odnosno nije teorema formula $(\exists x_2)\ \Gamma(\overline{m}, x_2)$. Ovo dovodi do kontradikcije, jer smo pretpostavili da je teorema formula $\neg(\forall x_2)\neg\ \Gamma(\overline{m}, x_2)$ odnosno $(\exists x_2)\, \Gamma(\overline{m}, x_2)$. Dakle, $\neg$(2) nije teorema računa A. ∎

Iz dokazanog stava proizlazi da ni (2) ni $\neg$(2) nisu teoreme računa A ako je taj račun ω-neprotivurečan.

Primedba. Za formulu (2) se na sledeći način zaključuje da je *tačna* formula u odnosu na standardni model.

Pretpostavimo da je (2) netačna formula. To znači da je tačna formula $(\exists x_2)\Gamma(\overline{m}, x_2)$, odnosno da je prirodan broj m u relaciji γ sa izvesnim prirodnim brojem n. Na osnovu toga zaključujemo da je formula

$$(\forall x_2)\neg\Gamma(x_1, x_2)$$

teorema. Stoga je teorema i formula (2). Međutim, to je, prema dokazanom stavu, nemoguće.

J. Rosser (1936) dokazao je samo uz pretpostavku neprotivurečnosti računa $\mathcal{A}$ da u tom računu postoji zatvorena formula F takva da nijedna od formula F, $\neg$ F nije teorema tog računa.

Postavlja se pitanje da li se uzimanjem (2) ili $\neg$ (2) za aksiomu od računa $\mathcal{A}$ prelazi na nov račun koji je potpun. Odgovor je negativan, jer važi sledeće tvrđenje. Neka je $\mathcal{A}_1$ račun dobijen iz računa $\mathcal{A}$ uzimanjem nekog skupa formula Ax za skup novih aksioma. Račun $\mathcal{A}_1$ je nepotpun ako je skup svih Gödelovih brojeva formula skupa Ax predstavljiv u računu $\mathcal{A}$.

Dokaz je sličan navedenom. To se tvrđenje i ovako iskazuje: formalna teorija brojeva je *esencijalno nepotpuna.*

Dokazuje se da su i ranije navedene aksiomatske teorije skupova nepotpune, kao i esencijalno nepotpune.

7. NEODLUČIVOST FORMALNE TEORIJE BROJEVA I KVANTIFIKATORSKOG RAČUNA PRVOG REDA

U ovoj tački dokazujemo neodlučivost formalne teorije brojeva i kvantifikatorskog računa prvog reda, u smislu koji je preciziran definicijom 1. Pri tome koristimo hipotezu da je formalna teorija brojeva neprotivurečna.

U dokazima se pojavljuje funkcija d, koju smo uveli u tački 5 ove glave.

Ponavljamo osnovno o toj funkciji:

(1) *Ako je* n *Gödelov broj formule* $A(x_1)$ *koja ima* x_1 *kao jedinu slobodnu promenljivu, onda je* $\mathrm{v}=\mathrm{d}(\mathrm{n})$ *Gödelov broj formule* $A(\overline{\mathrm{n}})$.

(2) *Funkcija* d *je po definiciji, predstavljiva u nekom računu* $\mathcal{S}$ *sa jednakošću koji ima iste simbole kao račun* $\mathcal{A}$ *ako u tom računu postoji formula* $D(x_1, x_2)$ *čije su jedine slobodne promenljive* x_1 *i* x_2 *takva da su ispunjeni uslovi:*

1° *Ako je* $\mathrm{v}=\mathrm{d}(\mathrm{u})$, *onda je* $\vdash_{\mathcal{S}} \mathrm{D}(\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}})$.

2° $\vdash_{\mathcal{S}} (\exists_1 x_2)\, D(\overline{\mathrm{u}}, x_2)$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ neki račun sa jednakošću koji ima iste simbole kao formalna teorija brojeva. Neka je $\mathrm{T}_{\mathcal{S}}$ skup svih Gödelovih brojeva teorema računa $\mathcal{S}$.

Prema definiciji koju smo dali za predstavljivost nekog skupa prirodnih brojeva, taj skup je predstavljiv u $\mathcal{S}$ ako postoji neka formula $T(x_1)$ u računu $\mathcal{S}$ sa jedinom slobodnom promenljivom x_1, takva da su ispunjeni uslovi:

3° *Ako* $\mathrm{n} \in \mathrm{T}_{\mathcal{S}}$, *onda* $\vdash_{\mathcal{S}} T(\overline{\mathrm{n}})$.

4° *Ako* $\mathrm{n} \notin \mathrm{T}_{\mathcal{S}}$, *onda* $\vdash_{\mathcal{S}} \neg\, T(\overline{\mathrm{n}})$.

Važi sledeća lema.

Lema 1. *Ako je* $\mathcal{S}$ *neprotivurečan račun sa jednakošću koji ima iste simbole kao račun* $\mathcal{A}$ *i ako je funkcija* d *predstavljiva u tom računu onda skup* $\mathrm{T}_{\mathcal{S}}$ *nije predstavljiv u računu* $\mathcal{S}$.

Dokaz. Pretpostavimo da su d i $\mathrm{T}_{\mathcal{S}}$ predstavljivi u $\mathcal{S}$ i uočimo sledeću formulu $A(x_1)$:

$$(\forall x_2)\,(D(x_1, x_2) \Rightarrow \neg\, T(x_2)).$$

Neka je u njen Gödelov broj. Uočimo i formulu $\mathrm{A}(\overline{\mathrm{u}})$:

$$(\forall x_2)\,(D(\overline{\mathrm{u}}, x_2) \Rightarrow \neg\, T(x_2))$$

i označimo sa v njen Gödelov broj. Prema definiciji funkcije d, imamo $\mathrm{v}=\mathrm{d}(\mathrm{u})$, odakle prema 1° dobijamo

$$\vdash_{\mathcal{S}} D(\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}). \tag{3}$$

Za formulu $A(\overline{u})$ postoje dve mogućnosti:

$$\text{(a)} \quad \vdash_{\mathcal{S}} A(\overline{u}), \qquad \text{(b) nije } \vdash_{\mathcal{S}} A(\overline{u}).$$

U prvom slučaju iz $\vdash_{\mathcal{S}} (\forall x_2)\,(D(\overline{u}, x_2) \Rightarrow \neg\, T(x_2))$, na osnovu Ax 4, imamo $\vdash_{\mathcal{S}} D(\overline{u}, \overline{v}) \Rightarrow \neg\, T(\overline{v})$, pa koristeći MP prema (3) dobijamo $\vdash_{\mathcal{S}} \neg\, T(\overline{v})$.

U drugom slučaju v nije element skupa $T_{\mathcal{S}}$, pa prema 4° imamo $\vdash_{\mathcal{S}} \neg\, T(\overline{v})$.

Dakle, u oba slučaja dobijamo

$$\vdash_{\mathcal{S}} \neg\, T(\overline{v}). \tag{4}$$

Pošto je, prema (3), $\vdash_{\mathcal{S}} D(\overline{u}, \overline{v})$, pomoću 2° dobijamo

$$\vdash_{\mathcal{S}} D(\overline{u}, x_2) \Rightarrow x_2 = \overline{v}. \tag{5}$$

koristeći tautologiju $(p \wedge (p \wedge q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Kako je

$$\vdash_{\mathcal{S}} \neg\, T(\overline{v}),$$

na osnovu definicije računa sa jednakošću dobijamo

$$\vdash_{\mathcal{S}} x_2 = \overline{v} \Rightarrow \neg\, T(x_2). \tag{6}$$

Iz (5) i (6) dobijamo $\vdash_{\mathcal{S}} D(\overline{u}, x_2) \Rightarrow \neg\, T(x_2)$, odakle pomoću pravila Gen proizlazi $\vdash_{\mathcal{S}} (\forall x_2)(D(\overline{u}, x_2) \Rightarrow \neg\, T(x_2))$, odnosno $\vdash_{\mathcal{S}} A(\overline{u})$. Dakle, $v \in T_{\mathcal{S}}$, pa prema 3° dobijamo $\vdash_{\mathcal{S}} T(\overline{v})$, što je kontradikcija, jer važi (4) i jer je pretpostavljeno da je $\mathcal{S}$ neprotivurečan račun.

Prema tome, skup $T_{\mathcal{S}}$ nije predstavljiv u $\mathcal{S}$, pa je lema potpuno dokazana. ∎

Definicija 1. *Za neki specijalni kvantifikatorski račun prvog reda $\mathcal{S}$ kažemo da je* NEODLUČIV *ukoliko skup* $T_{\mathcal{S}}$ *svih Gödelovih brojeva teorema tog računa nije predstavljiv u formalnoj teoriji brojeva* $\mathcal{A}$.

Prema tvrđenju navedenom u prošloj tački, račun $\mathcal{S}$ je neodlučiv ukoliko skup $T_{\mathcal{S}}$ nije rekurzivan odnosno nije izračunljiv (ako usvojimo Churchovu tezu).

Funkcija d je predstavljiva u računima $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{A}$. Prema lemi 1, kao posledice dobijamo:

Stav 1. *Formalna teorija brojeva je neodlučiva ako je neprotivurečna.*

Lema 2. *Račun $\mathcal{Q}$ je neodlučiv ako je neprotivurečan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{Q}$ odlučiv. Tada je skup svih Gödelovih brojeva teorema tog računa predstavljiv u računu $\mathcal{A}$, odnosno i u računu $\mathcal{Q}$. Međutim, na osnovu leme 1 dolazimo do kontradikcije, jer je i funkcija d predstavljiva u računu $\mathcal{Q}$. ∎

Označimo sa $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$ specijalni kvantifikatorski račun prvog reda koji nema specijalnih aksioma i koji ima iste simbole kao račun $\mathcal{Q}$, odnosno račun $\mathcal{A}$.

U dokazu sledeće leme koristimo tvrđenje koje navodimo bez dokaza:

Neka je F jedna formula računa $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$ i neka je T_1 skup svih Gödelovih brojeva nekih formula A računa $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$. Ako je T_2 skup svih Gödelovih brojeva formula $(F \Rightarrow A)$, onda je T_1 predstavljiv skup u računu $\mathcal{Q}$ ukoliko je u njemu predstavljiv skup T_2.

Lema 3. *Račun $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$ je neodlučiv.*

Dokaz. Računi $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$ i $\mathcal{Q}$ imaju iste simbole i razlikuju se u tome što $\mathcal{Q}$ ima druge aksiome. Račun $\mathcal{Q}$ ima konačno mnogo specijalnih aksioma $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{13}$. Označimo sa F formulu koja je zatvorenje formule $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_{13}$. Teoreme računa $\mathcal{Q}$ su, u stvari, sve posledice formule F u računu $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$.

Neka je A neka formula. Tada

$$\vdash_{\mathcal{Q}} A \longleftrightarrow F \vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}} A,$$

odakle prema stavu dedukcije dobijamo

$$\vdash_{\mathcal{Q}} A \longleftrightarrow \vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}} (F \Rightarrow A). \tag{7}$$

Označimo redom sa T_1, T_2 skupove Gödelovih brojeva teorema računa $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$. Ako je n Gödelov broj formule A, neka n* označava Gödelov broj formule ($F \Rightarrow A$). Tada prema (7) dobijamo za svaki prirodan broj n

$$(8) \qquad n \in T_1 \longleftrightarrow n^* \in T_2 \text{ i } n \in For\,.$$

Prema (8), predstavljivost skupa T_2 u računu $\mathcal{A}$ povlači predstavljivost skupa T_1 u istom računu, jer je skup *For* predstavljiv u računu $\mathcal{K}$. Pošto T_1 nije predstavljiv u računu $\mathcal{Q}$, to ni T_2 ne može biti predstavljiv, odnosno račun $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$ je neodlučiv.

Koristeći ovu lemu dokazujemo stav čiji je autor A. Church (1936).

Stav 2. *Kvantifikatorski račun prvog reda $\mathcal{K}$ je neodlučiv.*

Dokaz. Prema Gödelovom stavu potpunosti računa $\mathcal{K}$, neka formula F računa $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$ je teorema tog računa ako i samo ako je valjana formula, odnosno ako i samo ako je teorema računa $\mathcal{K}$. Dakle, za formule F računa $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$ važi uslov

$$(9) \qquad \underset{\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}}{\vdash} F \longleftrightarrow \underset{\mathcal{K}}{\vdash} F\,.$$

Označimo redom sa T_1, T_2 skupove Gödelovih brojeva teorema računa $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$, odnosno teorema računa K. Tada prema (9) dobijamo $T_1 = T_2 \cap For$.

Pretpostavimo da je račun $\mathcal{K}$ odlučiv. U tom slučaju je skup T_2 predstavljiv u računu $\mathcal{A}$. Kako je u istom računu predstavljiv i skup *For*, to je prema jednakosti $T_1 = T_2 \cap For$ i skup T_1 predstavljiv u računu $\mathcal{A}$. Međutim, to je nemoguće, jer smo dokazali da je račun $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}}$ neodlučiv.

Na taj način račun $\mathcal{K}$ nije odlučiv. ∎

U odnosu na standardni model, sve formule računa $\mathcal{A}$ delimo na *tačne* i *netačne*.

Tarski je dokazao da *skup svih Gödelovih brojeva tačnih formula nije rekurzivan*, odnosno nije predstavljiv u računu $\mathcal{A}$.

Sa ovim u vezi ostalo je otvoreno pitanje (veliki Fermatov problem) da li postoje pozitivni prirodni brojevi x, y, z, n takvi da je

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{i da je } n \geqslant 3\,.$$

KRATAK ISTORIJSKI PREGLED

Nezavisno jedni od drugih mnogi su kulturni narodi starog veka izgradili svoju filozofiju i matematiku. Istraživanja u 19. veku upoznala su nas sa vrlo dubokim filozofskim spekulacijama i razvijenom matematikom Kineza, Egipćana, Persijanaca, a naročito Indusa. Za njihovu matematiku ne može se reći da se jedino sastoji iz skupa zadataka rešenih empirijski, dosetkom bez minimuma logičkih rasuđivanja.

Međutim, na razvitak evropske matematike i mišljenja uopšte gotovo jedino je dejstvovala grčka matematika i filozofija. Grci su prvi izložili mnoge probleme koji nas i danas interesuju, oni su prvi našli sredstva rasuđivanja kojima još i danas operišemo.

Rađanje grčke logike pada u četvrti vek pre naše ere. Prvim većim logičarima smatraju se Parmenid, Zenon, Sokrat, Platon, Euklid iz Megare. Tako u Parmenida nailazimo na formulaciju zakona isključenja trećeg, a Zenonovi dokazi pomoću *reductio ad absurdum* znameniti su i u naše vreme.

Taj period razvitka dostiže vrhunac genijalnim stvaranjem Aristotela (384—322; glavno delo *Organon*). Njemu je prvom uspelo da sistematizuje i *kodifikuje* metode rasuđivanja, koje ili nisu bile poznate ili nisu bile jasne njegovim prethodnicima. Glavna njegova teza je da se svako korektno rasuđivanje može svesti na sistematsku primenu nevelikog broja određenih pravila, koja inače ne zavise od prirode objekata na koja se odnosi rasuđivanje (ta nezavisnost se postiže označavanjem pojmova i sudova *slovima*).

Na primer, silogizam: *Iz premisa* aMS *i* iMP *proizlazi* iSP; može se primeniti proizvoljno mnogo puta interpretirajući M, P, S (aAB, iAB su šifre redom za rečenične sheme: Svaki A je B, neki A je B).

Ipak, Aristotel je svojom *formalnom* logikom uspeo da kodifikuje samo jedan deo korektnih zaključivanja.

Aristotelov autoritet u logici bio je toliko neprikosnoven da je to čak smetalo razvitku logike; nikakve „suparničke" logike nisu mogle dugo vremena da dobiju odgovarajući značaj. To prvenstveno važi za tzv. megarsko-stoičku školu koju je osnovao Euklid iz Megare negde oko 400. g. pre naše ere i koja je trajala do 200. g. pre naše ere. Glavno dostignuće tih logičara je uvođenje *iskaznog računa* u smislu bliskom današnjem. Oni su formulisali pravila koja se odnose na potpuno proizvoljne iskaze i dubokom analizom su sva ta pravila izveli iz pet polaznih, nedokazanih. Njihov uticaj je bio neznatan i njihovi rezultati su zaboravljeni sve dok nisu bili u novoj logici ponovo dokazani.

Radovi Aristotela i njegovih sledbenika nisu imali velikog uticaja na grčku matematiku.

Originalnost Grka, od samog početka njihove matematičke misli, je u *svesnim* pokušajima da se pronikne u logiku matematičkih dokaza. Dokazi koje nalazimo kod velikih grčkih klasičara Euklida, Arhimeda, Apolonija u logičkom smislu gotovo su jednaki današnjim (*dokaz je konačan niz čiji je svaki član: aksioma ili već dokazana teorema ili se može dobiti iz izvesnih prethodnih članova niza pomoću nekog određenog pravila izvođenja*).

Poznogrčki i rimski period u razvitku logike odlikuju se uglavnom poboljšavanjem i sistematizovanjem onoga što je već ranije urađeno. Taj period završava se oko 6. veka naše ere.

Sledećih šest vekova za logiku znače potpuni mir.

Od 12. do 15. veka nastupa period *skolastičke* logike. Vredno je pomenuti da logičari te škole jasno odvajaju veštački jezik logičkih simbola od prirodnog jezika na kome su izražena pravila operisanja sa simbolima (tzv. teorija supozicija).

Nov period, period tzv. *klasične* logike, je u znaku *vraćanja* Aristotelu kao jedinom autoritetu. Uticaj pobornika te logike oseća se čak i do naših dana.

Može se sa dovoljno razloga reći da su doprinosi klasične logike neznatni.

Matematička simbolika uvedena u 17. veku od strane Vietea i Descartesa je inspirisala mnoge pokušaje simboličkih zapisa logičkih rasuđivanja i matematičkih dokaza. Do Leibniza su svi ti pokušaji vrlo površni i bez velikog značaja.

Leibniz (1646—1716), filozof i matematičar, sa uspehom se trudio da formalnu logiku izvuče iz ćorsokaka u kome se našla. Celog je svog života radio na projektima formalizacije jezika i mišljenja. Pri tome on formalizovani jezik shvata kao niz znakova za koji je od značaja samo povezanost znakova; dakle u *današnjem smislu.*

Maštao je i o stvaranju logičke mašine koja bi umesto nas vršila dokaze, koristeći formalizovani jezik. Kod njega nailazimo i na ideju aritmetizacije termina — ideju koju je u novije vreme koristio Gödel u svojim istraživanjima. Radio je na algebraizaciji Aristotelove logike i tako se približio onom što danas zovemo Boolleova algebra.

Na žalost, veliki broj Leibnizovih radova nije publikovan sve do početka ovog veka, pa je njihov neposredan uticaj bio neznatan.

Za osnivača savremene (formalne, simboličke) logike može se smatrati Boole (1815—1864) čiji su prethodnici Hamilton i de Morgan.

Njegova osnovna ideja je, da prihvatajući skupovno gledište[1] treba neposredno operisati sa skupovima.

Ako su x i y oznake za skupove, Boole sa xy označava njihov *presek*, a sa x+y, ukoliko su skupovi *bez zajedničkih elemenata*, njihovu *uniju*. Uvodi *univerzalan* i *prazan* skup koje označava redom 1 i 0. Sa 1—x označava *komplement* skupa označenog sa x. Logičku implikaciju interpretira kao skupovnu inkluziju.

---

[1] U Aristotelovoj rečeničnoj shemi: „Svaki A je B"; A i B su oznake za pojmove i iskaz „Svaki A je B" znači da se pojam B može pripisati svakom objektu kome je moguće pripisati pojam A (na primer: A — pojam „kvadrat"; B — pojam „četvorougao"). Za tu rečeničnu shemu možemo uvesti dve interpretacije.

U slučaju tzv. *sadržinske*, koju je Aristotel prvenstveno koristio, shvatamo da je pojam A složen pojam kome pripada pojam B (kao „potpojam"; „biti kvadrat" ima osim drugih — i jednu odliku „biti četvorougao").

U slučaju tzv. *skupovne* (*obimske*) interpretacije uvode se skupovi objekata na koje su primenljivi pojmovi A i B. Ako te skupove označimo redom $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, onda „Svaki A je B" se interpretira: „Svaki element skupa $\mathcal{A}$ je element skupa $\mathcal{B}$". Aristotelu je bila poznata i ta interpretacija.

Oba gledišta, na prvi pogled izgledaju jednako prirodna. Međutim, prva je interpretacija više puta bila uzročnik teškoćama u razvitku logike.

Slična važi i za ostale Aristotelove rečenične sheme.

U drugoj polovini 19. veka Booleov sistem su dopunili i usavršili de Morgan, Peirce, Schröder. Boole i njegovi sledbenici su svoje napore upravljali na izgradnju Booleove algebre i malo su se zanimali mogućnošću primene tih rezultata u matematici. Njihova simbolika nije podesna i dovoljna za opisivanje mnogih matematičkih rasuđivanja. Tako su oni samo delimično stvorili logički račun o kome je maštao Leibniz.

Frege i Peirce su uveli promenljive i kvantifikatore i tako su došli do podesnijeg formalizma za opisivanje matematičkog teksta.

Frege je 1879. prvi formulisao iskazni račun kao *logistički* sistem (odnosno kao formalnu teoriju). Njegovi se radovi odlikuju izvanrednom tačnošću i podrobnošću analize pojmova. Međutim, simbolika mu je tipografski jako komplikovana i nepodesna za matematičku praksu. To je jako umanjilo uticaj Fregea na njegove savremenike.

Peano je sa svojim saradnicima izgradio mnogo podesniji formalizovan jezik. Njihovi simboli $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ i drugi i danas su u upotrebi.

Danas je najviše rasprostranjen formalizovan jezik koji su uveli 1910. Russell i Whitehead u svom kapitalnom delu „Principia Mathematica".

Savremeni snažan razvitak matematičke logike, sa raznovrsnom primenom u matematici, kibernetici i mnogim drugim naukama kao i u praksi, usmerili su svojim dostignućima najveći logičari našeg veka Hilbert, Tarski, Carnap, Church, Gödel, Markov i drugi.