Об обобщении логического программирования на произвольное множество дизъюнкций

С.Б. Прешич

Пусть F - произвольное множество пропозициональных дизъюнкций $A_1 \vee ... \vee A_n$, где каждое A_i - пропозициональная буква, ее отрицание, символ $\top$ ("истина") или символ $\perp$ ("ложь"). Пусть ψ - либо литерал (то есть буква или ее отрицание), либо символ $\perp$. Наша задача следующая: выяснить, в каком случае выполняется секвенция

$$(1) \qquad F \vdash \psi$$

Пусть p - некоторая пропозициональная буква. Множество F будем обозначать через $F(p)$. Тогда мы имеем следующие логические эквиваленции

$$(2) \qquad (i) \quad F(p) \vdash p \Longleftrightarrow F(\perp) \vdash \perp, \qquad (ii) \quad F(p) \vdash \neg p \Longleftrightarrow F(\top) \vdash \perp$$

Доказательство см. в [1, Лемма 1].

Пример 1. *Применяя (2) к секвенции*

$$p \vee \neg q \vee r \vee s, \quad q \vee \neg p \vee s, \quad s \vee p \vee t, \quad q \vee \neg r \vee t, \quad \neg p \vee s \vdash p,$$

получим следующую новую секвенцию

$$\neg q \vee r \vee s, \quad q \vee s, \quad q \vee \neg r \vee t \vdash \perp$$

Заметим, что таким образом из дизъюнкций $q \vee \neg p \vee s$, $\neg p \vee s$ *мы получили* $\top$, $\top$ *и, следовательно, они отброшены. С другой стороны, из дизъюнкций* $p \vee \neg q \vee r \vee s$, $s \vee p \vee t$, *в которых мы также можем* *применить подстановку* $p \longrightarrow \perp$, *получены дизъюнкции* $\neg q \vee r \vee s, \quad q \vee s$. *Эти дизъюнкции будем называть* пробужденными.

В общем случае, если мы применим (2) к секвенциям вида

$$p \vee A_1,\ p \vee A_2, ..., \quad \neg p \vee B_1, \quad \neg p \vee B_2, ..., \quad C_1,\ C_2, ... \vdash p$$

$$p \vee A_1,\ p \vee A_2, ..., \quad \neg p \vee B_1, \quad \neg p \vee B_2, ..., \quad C_1,\ C_2, ... \vdash \neg p,$$

где A_i, B_j, C_k – дизъюнкции, не содержащие $p, \neg p$, то получим следующие секвенции

$$A_1,\ A_2, ..., \quad C_1,\ C_2, ... \vdash \perp; \qquad B_1,\ B_2, ..., \quad C_1,\ C_2, ... \vdash \perp$$

соответственно. В первом случае $A_1,\ A_2, ...$ будем называть пробужденными, а во втором случае такими будут дизъюнкции $B_1,\ B_2, ...$

В статье [1] (также и в [2]) для разрешения общего вопроса вида (1) описан так называемый PL-алгоритм. В этом алгоритме значительную роль играет понятие пробужденных дизъюнкций. Именно, начиная с вопроса вида (1) на следующем шаге алгоритм продолжает работу с пробужденными дизъюнкциями, взятыми, например, слева направо (как в Прологе). Но возникает вопрос, как это сделать. Мы будем пользоваться следующей логической эквиваленцией

$$(3)\ \mathcal{F}, \quad A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_k \ \vdash \perp \iff \mathcal{F} \vdash \neg A_1 \ \textbf{и}\ \mathcal{F} \vdash \neg A_2 \ \textbf{и}\ ...\ \textbf{и}\ \mathcal{F} \vdash A_k,$$

где $\mathcal{F}$ – множество формул, A_i – формулы. Доказательство см. в [1, Лемма 2]. В самом деле, PL-алгоритм использует эквиваленции (2), (3) а также следующий факт

$$(4) \qquad \mathcal{F},\ \perp \vdash \perp \iff \vdash \top,$$

то есть справедлива любая секвенция вида $\mathcal{F},\ \perp \vdash \perp$

Теперь сформулируем основную теорему о полноте ([1, 2, Теорема 1])

Теорема. *Пусть* $\mathcal{F}$ *– произвольное множество дизъюнкций и* ψ *- литерал или символ* $\perp$. *Тогда:*

> ψ *есть логическое следствие множества* $\mathcal{F}$ *в том и только в том случае, когда, начиная с секвенции* $\mathcal{F} \vdash \psi$ *и применяя эквиваленции (2), (3), (4) слева направо конечное число раз, мы получим секвенцию* $\vdash \top$.

Более того:

(5) PL-алгоритм остановится, если мы в результате получим секвенцию $\vdash\perp$.

Конечно, в последнем случае мы сделаем заключение, что начальная секвенция $\mathcal{F} \vdash \psi$ не справедлива. Теперь приведем некоторые примеры.

Пример 2. *Найти истиностное значение данной секвенции:*

$$(j) \quad p \vdash p, \quad (jj) \quad p \vdash q, \quad (jjj) \quad p \vee \neg q \vee r,\ q \vee r,\ \neg r\ \vdash p,$$

$$(jv) \quad q \vee r,\ p \vee \neg q,\ p \vee \neg r\ \vdash p, \quad (v) \quad p \vee \neg q,\ \neg p \vee q,\ \neg p \vee \neg q,\ p \vee q\ \vdash\perp$$

Ответ. (j) За один шаг, в силу (2), получим $\perp\vdash\perp$. Следовательно, данная секвенция истинна. (jj) Применяя (2), получим секвенцию $p\vdash\perp$. Теперь применим (3) и получим секвенцию $\vdash \neg p$. Снова применим (2) и получим $\vdash\perp$. Значит, в силу (5), данная секвенция ложна. (jjj) Прежде всего применим (2) и получим следующую секвенцию $\neg q \vee r,\ q \vee r,\ \neg r \vdash\perp$. Дизъюнкция $\neg q \vee r$ стала пробужденной. С помощью (3) получим следующие секвенции, обозначенные через $A,\ B$:

$$A: \quad q \vee r, \neg r \vdash q, \qquad B: \quad q \vee r, \neg r \vdash \neg r$$

Применяя (2) к A, получим секвенцию $r, \neg r \vdash\perp$ и r стала пробужденной. В силу (3) получим секвенцию $\neg r \vdash \neg r$, отсюда, в силу (2), получим $\perp\vdash\perp$. Значит, A – истинная секвенция.

Для B с помощью (2) получим $\perp\vdash\perp$. Значит, B также истинна. Заключение: данная секвенция (jjj) истинна. (jv) На первом шаге применим (2) и получим секвенцию $\neg q,\ \neg r,\ q \vee r \vdash\perp$, в которой дизъюнкции $\neg q,\ \neg r$ стали пробужденными. Далее, в силу (3), получим секвенцию $\neg r,\ q \vee r \vdash q$. Применяя (2), получим секвенцию $r,\ \neg r \vdash\perp$, и теперь r стала пробужденной. С помощью (3) получим секвенцию $r \vdash r$, отсюда имеем $\perp\vdash\perp$. Значит, данная секвенция истинна. (v) Применяя (3) к первой дизъюнкции $p \vee \neg q$, получим следующие секвенции

$$A: \quad \neg p \vee q,\ \neg p \vee \neg q,\ p \vee q \vdash \neg p; \qquad B: \quad \neg p \vee q,\ \neg p \vee \neg q,\ p \vee q \vdash q;$$

Теперь мы легко можем продолжить алгоритм на $A,\ B$ и получить, что A и B истинны, откуда вытекает, что (v) – истинная дизъюнкция.

В следующем примере рассматриваются предикатные формулы.

Пример 3. *Найти истиностное значение секвенции*

$$\neg\alpha(x)\vee\beta(f(x)),\quad \neg\beta(x)\vee\gamma(g(x)),\quad \alpha(c),\quad \neg\gamma(x)\ \vdash\perp,$$

где x – переменная, c – символ константы, f, g – символы функций и α, β, γ – предикатные символы.

Ответ. Обозначим левую сторону данной секвенции через $F(x)$. Пусть $\overline{F(x)}$ обозначает множество всех дизъюнкций, полученных из $F(x)$, когда x "пробегает" Эрбрановское множество термов: $c,\ f(c),\ g(c),\ f(g(c)),\ldots$. В самом деле, мы должны работать с дизъюнкциями - членами этого множества $\overline{F(x)}$. На первом шаге к дизъюнкции $\alpha(c)$ применим (3) и получим:

$$\neg\alpha(x)\vee\beta(f(x)),\quad \neg\beta(x)\vee\gamma(g(x)),\quad \neg\gamma(x)\ \vdash\neg\alpha(c)$$

Чтобы применить (2), воспользуемся алгоритмом унификации и получим дизъюнкцию $\beta(f(c))$, которая становится пробужденной. Следовательно, имеем такую секвенцию

$$\beta(f(c)),\quad \neg\alpha(x)\vee\beta(f(x)),\quad \neg\beta(x)\vee\gamma(g(x)),\quad \neg\gamma(x)\ \vdash\perp.$$

Теперь применим (3) и получим:

$$\neg\alpha(x)\vee\beta(f(x)),\quad \neg\beta(x)\vee\gamma(g(x)),\quad \neg\gamma(x)\ \vdash\neg\beta(f(c)).$$

Применим (2) и получим:

$$\gamma(g(f(c)),\quad \neg\alpha(x)\vee\beta(f(x)),\quad \neg\beta(x)\vee\gamma(g(x)),\quad \neg\gamma(x)\ \vdash\perp.$$

С помощью (3) получим:

$$\neg\alpha(x)\vee\beta(f(x)),\quad \neg\beta(x)\vee\gamma(g(x)),\quad \neg\gamma(x)\ \vdash\neg\gamma(f(g(c))).$$

Теперь, с помощью (2), получим:

$$\perp,\quad \neg\alpha(x)\vee\beta(f(x)),\quad \neg\beta(x)\vee\gamma(g(x)),\quad \neg\gamma(x)\ \vdash\neg\perp.$$

Так как и левая, и правая стороны содержат $\perp$, заключаем, что данная секвенция истинна.

Список литературы

[1] S. B. Prešić *How to generalize logic programming to arbitrary set of clauses*, Publ. de l' Inst. Math. NS 61(75), Belgrade, 1997, p 137-152

[2] S. B. Prešić *Generalizing logic programming to arbitrary set of clauses*, Sci. Rev. Belgrade, 19/29, 1996, p 75-81