МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
5 (20) 1968, стр. 205—216

Славиша Б. Прешић

ЈЕДАН ИТЕРАТИВНИ ПОСТУПАК ЗА ФАКТОРИЗАЦИЈУ ПОЛИНОМА

(Саопштено 13. децембра 1967.)

1. У овом чланку се доказују и проширују резултати који су кратко изложени у [2]. Осим тога наводи се и више примера. На поступак који излажем инспирисали су ме резултати Д. Марковића [1].

2. Нека је

$$P = x^n + p_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + p_1\, x + p_0 \tag{1}$$

полином на пољу комплексних бројева чији су корени $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ међусобно различити. Тада је

$$P = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \tag{2}$$

Нека су $a,\ b, \ldots,\ l$ $(a \leqslant b \leqslant \cdots \leqslant l)$ природни бројеви такви да је $n = a + b + \cdots + l$. Постоје полиноми $A,\ B, \ldots,\ L$ чији су степени редом $a,\ b, \ldots,\ l$ тако да је

$$P = AB\cdots L. \tag{3}$$

Једнакост (3) зовемо $a - b - \cdots - l$ факторизација полинома P. Тако, (2) је $1 - 1 - \cdots - 1$ факторизација. Ако је, на пример, P полином четвртог степена онда он има једну $1-1-1-1$ факторизацију, шест $1-1-2$ факторизација, четири $1-3$ факторизације, три $2-2$ факторизације.

Претпоставимо да у једнакости $n = a + b + \cdots + l$ има $s + 1$ сабирака. Дефинисаћемо низове полинома $A(k),\ B(k), \ldots,\ L(k)$, где је $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

$$A(k) = x^a + \alpha_{a-1}(k)\, x^{a-1} + \cdots + \alpha_0(k),$$

$$B(k) = x^b + \beta_{b-1}(k)\, x^{b-1} + \cdots + \beta_0(k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L(k) = x^l + \lambda_{l-1}(k)\, x^{l-1} + \cdots + \lambda_0(k),$$

који ће под извесним условима конвергирати ка $A,\ B, \ldots,\ L$.

За полиноме $A(k),\ B(k), \ldots,\ L(k)$ постављамо следеће услове

$$\begin{aligned} &A(k+1)\, B(k)\cdots L(k) + A(k)\, B(k+1)\cdots L(k) + \cdots \\ &+ A(k)\, B(k)\cdots L(k+1) - s\, A(k)\, B(k)\cdots L(k) = P, \end{aligned} \tag{C_k}$$

где је $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

Сваки од тих услова представља систем n једначина у којима учествују коефицијенти полинома P, $A(k)$, $A(k+1)$, $B(k)$, $B(k+1)$, ..., $L(k)$, $L(k+1)$; односно, под извесним условима, свака од једначина (C_k) се може свести на еквивалентан систем диференцијских једначина облика:

$$
(J_k)\quad
\begin{aligned}
&\alpha_{a-1}(k+1)=\\
&=F_{a-1}(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_0(k+1)=\\
&=F_0(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\beta_{b-1}(k+1)=\\
&=G_{b-1}(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\beta_0(k+1)=\\
&=G_0(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_{l-1}(k+1)=\\
&=H_{l-1}(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_0(k+1)=\\
&=H_0(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\qquad\qquad\qquad (k=0,1,2,\ldots),
\end{aligned}
$$

где су $F_{a-1}, \ldots, F_0, G_{b-1}, \ldots, G_0, \ldots, H_{l-1}, \ldots, H_0$ извесне рационалне функције. То је узроковано и чињеницом што су услови (C_k) линеарни по $\alpha_{a-1}(k+1), \ldots, \alpha_0(k+1), \beta_{b-1}(k+1), \ldots, \beta_0(k+1), \ldots, \lambda_{l-1}(k+1), \ldots, \lambda_0(k+1)$.

Итеративни поступак који излажемо је дефинисан једнакостима (J_k).

3. Претходно наводимо једнакости (J_k) у случају $1-1-\cdots-1$ факторизације. У овом случају полиноме $A(k)$, $B(k)$, ..., $L(k)$ означавамо редом $x-a_1(k)$, $x-a_2(k)$, ..., $x-a_n(k)$. Услов (C_k) гласи:

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad &(x-a_1(k+1))(x-a_2(k))\cdots(x-a_n(k))\\
&+(x-a_1(k))(x-a_2(k+1))\cdots(x-a_n(k))\\
&+\cdots+(x-a_1(k))(x-a_2(k))\cdots(x-a_n(k+1))\\
&-(n-1)(x-a_1(k))(x-a_2(k))\cdots(x-a_n(k))=P.
\end{aligned}
$$

Претпоставимо да су $a_1(k)$, $a_2(k)$, ..., $a_n(k)$ међусобно различити. Претходна једнакост, за $x=a_1(k)$, даје

$$(a_1(k)-a_1(k+1))(a_1(k)-a_2(k))\cdots(a_1(k)-a_n(k))=P\,\big|_{x=a_1(k)},$$

одакле је

$$a_1(k+1)=a_1(k)-\frac{P\,\big|_{x=a_1(k)}}{(a_1(k)-a_2(k))\cdots(a_1(k)-a_n(k))}.$$

Уопште, ако ставимо $Q(x)=(x-a_1(k))(x-a_2(k))\cdots(x-a_n(k))$ имамо

$$(5)\qquad a_i(k+1)=a_i(k)-\frac{P(a_i(k))}{Q'(a_i(k))},\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где Q' значи извод полинома Q и где $P(a_i(k))$, $Q'(a_i(k))$ стоје редом уместо $P\big|_{x=a_i(k)}$, $Q'\big|_{x=a_i(k)}$. Добијене формуле одређују $a_1(k+1)$, $a_2(k+1)$, $\ldots$, $a_n(k+1)$ који задовољавају једнакост (4) из разлога што су обе стране једнакости (4) полиноми степена n чији је члан уз највећи степен једнак 1 и који имају једнаке вредности за n различитих вредности $a_i(k)$ слова x.

Добијене формуле одређују све чланове низова $a_1(k)$, $a_2(k)$, $\ldots$, $a_n(k)$ помоћу првих чланова $a_1(0)$, $a_2(0)$, $\ldots$, $a_n(0)$. Примећујемо сличност формула (5) са познатим Њутновим формулама:

$$a_i(k+1)=a_i(k)-\frac{P(a_i(k))}{P'(a_i(k))}$$

Основна је разлика у томе што су низови $a_1(k), a_2(k), \ldots, a_n(k)$ међусобно независни у случају Њутнових формула.

4. Разматрамо, сада, услове (C_k) у општем случају. Ради простијег излагања уводимо следеће n-торке, које даље зовемо *вектори*

$$\boldsymbol{p}\overset{\text{def}}{=}(\alpha_{a-1},\ \ldots,\ \alpha_0,\ \beta_{b-1},\ \ldots,\ \beta_0,\ \ldots,\ \gamma_{l-1},\ \ldots,\ \gamma_0),$$

$$\boldsymbol{p}(k)\overset{\text{def}}{=}(\alpha_{a-1}(k),\ \ldots,\ \alpha_0(k),\ \beta_{b-1}(k),\ \ldots,\ \beta_0(k),\ \ldots,\ \gamma_{l-1}(k),\ \ldots,\ \gamma_0(k)),$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Услови (C_k) одређују зависност између координата вектора $\boldsymbol{p}(k)$ и $\boldsymbol{p}(k+1)$.

Нека је $\boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{p}$, односно $A(0)=A$, $B(0)=B$, $\ldots$, $L(0)=L$. Услов (C_0) даје

$$(6)\quad A(1)B\cdots L+AB(1)\cdots L+\cdots+AB\cdots L(1)-s\,AB\cdots L=AB\cdots L.$$

Пошто је

$$AB\cdots L+AB\cdots L+\cdots+AB\cdots L-s\,AB\cdots L=AB\cdots L,$$

закључујемо да једначина (6) има бар једно решење по $(A(1), B(1), \ldots, L(1))$ које је једнако $(A, B, \ldots, L)$. Доказујемо да је то, и једино решење. Услов (6) (полиномна једнакост) за $x=x_A$, где је x_A било који корен полинома A даје

$$\overline{A}(1)=\frac{\overline{P}}{\overline{B}\cdots\overline{L}}$$

где — значи вредност односног полинома за $x=x_A$. Међутим,

$$\overline{P}=\overline{A}\,\overline{B}\cdots\overline{L},$$

па је

$$\overline{A}(1)=\overline{A}=0.$$

Полиноми A и $A(1)$ имају све заједничке корене. Како су то полиноми са чланом уз највећи степен једнаким 1, то важи једнакост $A = A(1)$. Слично $B(1) = B, \ldots, L(1) = L$.

Услов (6) представља систем n линеарних једначина чије су непознате коефицијенти полинома $A(1), B(1), \ldots, L(1)$. Према доказаном, тај систем има јединствено решење. Отуда је његова детерминанта различита од 0. Детерминанта система је различита од 0 и у извесној околини V вектора $\boldsymbol{p}$.

Дакле, *у извесној околини V вектора $\boldsymbol{p}$ важе једнакости облика* (J_k) (*уз услов* $\boldsymbol{p}(k) \in V$) *где су* $F_{a-1}, \ldots, F_0, G_{b-1}, \ldots, G_0, \ldots, H_{l-1}, \ldots, H_0$ *одређене рационалне функције*.

Уведимо ознаке:

$$\boldsymbol{r} = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n),$$

$$F_{a-1}(\boldsymbol{r}) = F_{a-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_0(\boldsymbol{r}) = F_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$G_{b-1}(\boldsymbol{r}) = G_{b-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_0(\boldsymbol{r}) = G_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_{l-1}(\boldsymbol{r}) = H_{l-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$H_0(\boldsymbol{r}) = H_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n);$$

$$F(\boldsymbol{r}) = (F_{a-1}(\boldsymbol{r}), \ldots, F_0(\boldsymbol{r}), G_{b-1}(\boldsymbol{r}), \ldots, G_0(\boldsymbol{r}), \ldots, H_{l-1}(\boldsymbol{r}), \ldots, H_0(\boldsymbol{r})).$$

Тада једнакости (J_k) дају

$$\boldsymbol{p}(k+1) = F(\boldsymbol{p}(k)), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \ \boldsymbol{p}(k) \in V). \tag{7}$$

Функција F је дефинисана у околини V и у њој има парцијалне изводе по координатама било код реда. Потражићемо парцијалне изводе првог реда када је $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}$.

Диференцирањем једнакости (C_k) по $\mu(k)$ где је $\mu(k)$ било која координата вектора $\boldsymbol{p}(k)$ добијамо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A(k+1)}{\partial \mu(k)} B(k) \cdots L(k) + A(k+1) \frac{\partial}{\partial \mu(k)} (B(k) \cdots L(k)) \\ &+ \frac{\partial A(k)}{\partial \mu(k)} \left(\frac{B(k+1)}{B(k)} + \cdots + \frac{L(k+1)}{L(k)} - s \right) B(k) \cdots L(k) \\ &+ A(k) \frac{\partial}{\partial \mu(k)} \left(\left(\frac{B(k+1)}{B(k)} + \cdots + \frac{L(k+1)}{L(k)} - s \right) B(k) \cdots L(k) \right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Нека је $A(k) = A, B(k) = B, \ldots, L(k) = L$. Тада је $A(k+1) = A, B(k+1) = B, \ldots, L(k+1) = L$. Једнакост (8) за $x = x_A$, где је x_A било који корен полинома A, даје $\frac{\partial}{\partial \mu(k)}(A(k+1))=0$. Дакле, полином $\frac{\partial}{\partial \mu(k)}(A(k+1))$ има a корена. Он је нула-полином јер је његов степен једнак $a-1$. Слично

$$\frac{\partial}{\partial \mu(k)}(B(k+1))=0, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mu(k)}(L(k+1))=0.$$

Према томе *функција* $F(\boldsymbol{r})$ *има за* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}$ *све парцијалне изводе првог реда једнаке* 0.

Према *Тајлоровој* формули имамо

$$F(\boldsymbol{r})=F(\boldsymbol{p})+O(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}\|^2) \quad (\boldsymbol{r}\in \boldsymbol{V})$$

тј.

$$F(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{p}+O(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}\|^2); \quad (\boldsymbol{r}\in \boldsymbol{V}).$$

На основу једнакости (7) имамо

$$\boldsymbol{p}(k+1)-\boldsymbol{p}=O(\|\boldsymbol{p}(k)-\boldsymbol{p}\|^2) \quad (\boldsymbol{p}=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{p}(k))$$

Користећи ту једнакост и једнакости (C_k) непосредно закључујемо:

I. *Ако постоје* $\lim_{k\to\infty} A(k)$, $\lim_{k\to\infty} B(k), \ldots, \lim_{k\to\infty} L(k)$, *онда*

$$P=\lim_{k\to\infty} A(k)\cdot \lim_{k\to\infty} B(k)\cdots \lim_{k\to\infty} L(k),$$

односно $\lim_{k\to\infty} A(k)$, $\lim_{k\to\infty} B(k), \ldots, \lim_{k\to\infty} L(k)$ *су фактори полинома* P.

II. *Постоји извесна околина* $\boldsymbol{V}$ *вектора* $\boldsymbol{p}$ *таква да низ* $p(k)$ *одређен условом* $\boldsymbol{p}(k+1)=F(\boldsymbol{p}(k))$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ *конвергира ка* $\boldsymbol{p}$ *уколико је* $\boldsymbol{p}(0)\in\boldsymbol{V}$. *У том случају конвергенција је квадратна.*

5. Наводимо обрасце (J_k) за случај полинома

$$x^6+p_5x^5+p_4x^4+p_3x^3+p_2x^2+p_1x+p_0$$

и његове факторизације 2—2—2. Полиноме $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ означавамо редом

$$x^2+a_nx+b_n,\ x^2+c_nx+d_n,\ x^2+e_nx+f_n.$$

Обрасци гласе:

$$\begin{aligned} &a_{n+1}=a_n+\frac{A_n}{\Delta_n},\ b_{n+1}=b_n+\frac{B_n}{\Delta_n},\\ (9)\qquad &c_{n+1}=c_n+\frac{C_n}{\Delta_n},\ d_{n+1}=d_n+\frac{D_n}{\Delta_n},\\ &e_{n+1}=e_n+\frac{E_n}{\Delta_n},\ f_{n+1}=f_n+\frac{F_n}{\Delta_n},\\ &\qquad\qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \end{aligned}$$

где су Δ_n, A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n следеће детерминанте:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c_n+e_n & 1 & a_n+e_n & 1 & c_n+a_n & 1 \\ f_n+e_n c_n+d_n & c_n+e_n & f_n+e_n a_n+b_n & a_n+e_n & b_n+a_n c_n+e_n & c_n+a_n \\ c_n f_n+d_n e_n & f_n+e_n c_n+d_n & a_n f_n+b_n e_n & f_n+e_n a_n+b_n & c_n b_n+d_n a_n & b_n+a_n c_n+d_n \\ d_n f_n & c_n f_n+d_n e_n & b_n f_n & a_n f_n+b_n e_n & d_n b_n & c_n b_n+d_n a_n \\ 0 & d_n f_n & 0 & b_n f_n & 0 & d_n b_n \end{vmatrix}$$

$$A_n=\begin{vmatrix} \alpha_n & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_n & 1 & a_n+e_n & 1 & c_n+a_n & 1 \\ \gamma_n & c_n+e_n & f_n+e_n a_n+b_n & a_n+e_n & b_n+a_n c_n+d_n & c_n+a_n \\ \delta_n & f_n+e_n c_n+d_n & a_n f_n+b_n e_n & f_n+e_n a_n+b_n & c_n b_n+d_n a_n & b_n+a_n c_n+d_n \\ \varepsilon_n & c_n f_n+d_n e_n & b_n f_n & a_n f_n+b_n e_n & d_n b_n & c_n b_n+d_n a_n \\ \varphi_n & d_n f_n & 0 & b_n f_n & 0 & d_n b_n \end{vmatrix}$$

$$B_n=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_n & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c_n+e_n & \beta_n & a_n+e_n & 1 & c_n+a_n & 1 \\ f_n+e_n c_n+d_n & \gamma_n & f_n+e_n a_n+b_n & a_n+e_n & b_n+a_n c_n+d_n & c_n+a_n \\ c_n f_n+d_n e_n & \delta_n & a_n f_n+b_n e_n & f_n+e_n a_n+b_n & c_n b_n+d_n a_n & b_n+a_n c_n+d_n \\ d_n f_n & \varepsilon_n & b_n f_n & a_n f_n+b_n e_n & d_n b_n & c_n b_n+d_n a_n \\ 0 & \varphi_n & 0 & b_n f_n & 0 & d_n b_n \end{vmatrix}$$

$$C_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_n & 0 & 1 & 0 \\ c_n+e_n & 1 & \beta_n & 1 & c_n+a_n & 1 \\ f_n+e_n c_n+d_n & c_n+e_n & \gamma_n & a_n+e_n & b_n+a_n c_n+d_n & c_n+a_n \\ c_n f_n+d_n e_n & f_n+e_n c_n+d_n & \delta_n & f_n+e_n a_n+b_n & c_n b_n+d_n a_n & b_n+a_n c_n+d_n \\ d_n f_n & c_n f_n+d_n e_n & \varepsilon_n & a_n f_n+b_n e_n & d_n b_n & c_n b_n+d_n a_n \\ 0 & d_n f_n & \varphi_n & b_n f_n & 0 & d_n b_n \end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha_n & 1 & 0 \\ c_n+e_n & 1 & a_n+e_n & \beta_n & c_n+a_n & 1 \\ f_n+e_n c_n+d_n & c_n+e_n & f_n+e_n a_n+b_n & \gamma_n & b_n+a_n c_n+d_n & c_n+a_n \\ c_n f_n+d_n e_n & f_n+e_n c_n+d_n & a_n f_n+b_n e_n & \delta_n & c_n b_n+d_n a_n & b_n+a_n c_n+d_n \\ d_n f_n & c_n f_n+d_n e_n & b_n f_n & \varepsilon_n & d_n b_n & c_n b_n+d_n a_n \\ 0 & d_n f_n & 0 & \varphi_n & 0 & d_n b_n \end{vmatrix}$$

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha_n & 0 \\ c_n+a_n & 1 & a_n+e_n & 1 & \beta_n & 1 \\ f_n+e_n c_n+d_n & c_n+e_n & f_n+e_n a_n+b_n & a_n+e_n & \gamma_n & c_n+a_n \\ c_n f_n+d_n e_n & f_n+e_n c_n+d_n & a_n f_n+b_n e_n & f_n+e_n a_n+b_n & \delta_n & b_n+a_n c_n+d_n \\ d_n f_n & c_n f_n+d_n e_n & b_n f_n & a_n f_n+b_n e_n & \varepsilon_n & c_n b_n+d_n a_n \\ 0 & d_n f_n & 0 & b_n f_n & \varphi_n & d_n b_n \end{vmatrix}$$

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha_n \\ c_n+a_n & 1 & a_n+e_n & 1 & c_n+a_n & \beta_n \\ f_n+e_n c_n+d_n & c_n+e_n & f_n+e_n a_n+b_n & a_n+e_n & b_n+a_n c_n+d_n & \gamma_n \\ c_n f_n+d_n e_n & f_n+e_n c_n+d_n & a_n f_n+b_n e_n & f_n+e_n a_n+b_n & c_n b_n+d_n a_n & \delta_n \\ d_n f_n & c_n f_n+d_n e_n & b_n f_n & a_n f_n+b_n e_n & d_n b_n & \varepsilon_n \\ 0 & d_n f_n & 0 & b_n f_n & 0 & \varphi_n \end{vmatrix}$$

У тим детерминантама α_n, β_n, γ_n, δ_n, ε_n, φ_n одређени су обрасцима:

$$\alpha_n = p_5 - (e_n + a_n + c_n); \quad \beta_n = p_4 - (f_n + d_n + b_n + a_n c_n + (a_n + c_n) e_n),$$

$$\gamma_n = p_3 - ((a_n + c_n) f_n + (d_n + a_n c_n + b_n) e_n + a_n d_n + b_n c_n),$$

$$\delta_n = p_2 - ((d_n + a_n c_n + b_n) f_n + (a_n d_n + b_n c_n) e_n + b_n d_n),$$

$$\varepsilon_n = p_1 - ((a_n d_n + b_n c_n) f_n + b_n d_n e_n), \quad \varphi_n = p_0 - b_n d_n f_n,$$

6. На крају дајемо примере. Коришћена је машина Elliott 803 Југословенског института за економска истраживања у Београду. Захваљујем се Томиславу Ракићу на предусретљивости и помоћи коју ми је пружио.

Пример I. Нека је P следећи полином

$$P = x^4 - 18\,x^3 + 104\,x^2 - 222\,x + 135$$

Његови корени су 1, 3, 5, 9. У ,,таблицама" које наводимо прве врсте одређују прве чланове низова који имају граничне вредности наведене корене. У првом случају већ у петом кораку се постиже тражена тачност, а у другом случају то се дешава у шестом кораку.

	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,5	2,6	4,2	8,1
1	1,309668	3,131948	4,838669	8,719715
2	0,997929	2,954510	5,041347	9,006184
3	1,000025	2,999006	5,000985	8,999984
4	1,000000	3,000000	5,000000	9,000000
5	1,000000	3,000000	5,000000	9,000000

	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	1,8	7	11
1	0,974026	2,056856	6,340659	8,628459
2	1,012253	2,725047	5,131259	9,131442
3	0,998709	2,981489	5,018484	9,001317
4	1,000006	2,999816	5,000180	8,999998
5	1,000000	3,000000	5,000000	9,000000
6	1,000000	3,000000	5,000000	9,000000

Пример II. Нека је P следећи полином

$$P = x^6 + 5\,x^5 + 11\,x^4 + 15\,x^3 + 14\,x^2 + 10\,x + 4$$

Он има следеће факторе

$$x^2 + 1,\ \ x^2 + 3\,x + 2,\ \ x^2 + 2\,x + 2$$

чији је производ једнак P. ,,Таблице" које наводимо показују у шест посматраних случајева како низови a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n дефинисани формулама (9) конвергирају ка одговарајућим коефицијентима наведених фактора.

(1)

0	−1.00000	0.000000	4.00000	3.00000	1.50000	2.50000
1	−0.033333	0.533333	3.40476	2.40476	1.62857	2.15714
2	−0.106743	0.926656	3.08758	2.08758	1.80567	1.81248
3	−0.012071	1.00465	3.00330	2.00330	2.00877	1.98837
4	−0.000005	1.00008	2.99997	1.99997	2.00003	1.99981
5	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000
5	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000

(2)

0	1.00000	2.00000	2.50000	3.00000	2.00000	4.00000
1	0.750000	3.25000	3.25000	4.62500	1.00000	−4.00000
2	0.583564	2.32360	2.97042	3.49920	1.44601	−1.84774
3	0.531463	1.57767	2.64851	2.65236	1.82003	−0.548375
4	0.426826	1.01104	2.26244	1.98728	2.31073	0.621438
5	−0.009334	0.697997	1.87046	1.68502	3.13887	2.27775
6	−0.012971	1.01734	2.06442	2.02660	2.94856	1.89711
7	0.000407	1.00046	1.99858	1.99408	3.00101	2.00203
8	0.000000	0.999999	2.00000	2.00000	3.00000	1.99999
9	0.000000	1.00000	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000
10	0.000000	1.00000	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000

(3)

0	−1.00000	2.00000	4.00000	1.00000	2.50000	4.00000
1	−0.456216	1.29466	3.05463	1.00892	2.40159	3.37523
2	−0.117973	1.06004	2.83400	1.30755	2.28398	2.67495
3	−0.011794	1.01058	2.88255	1.71505	2.12924	2.17704
4	0.000117	1.00065	2.98721	1.97552	2.01267	1.99863
5	0.000006	0.999998	3.00018	2.00034	1.99982	1.99966
6	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000
7	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000

(4)

0	1.00000	1.200000	2.90000	2.10000	3.00000	2.50000
1	0.442549	1.04732	5.72494	4.25408	−1.16749	−0.658990
2	0.570634	0.976762	4.08971	2.97103	0.339653	0.654645
3	1.65513	−0.049701	3.32874	2.32011	0.016134	2.20975
4	1.81037	0.751021	2.81380	1.80276	0.375826	1.40498
5	1.78223	1.93600	2.94941	1.72109	0.268358	0.801234
6	2.02214	1.98008	3.03840	2.08046	−0.060538	1.01492
7	2.00183	2.00081	2.99972	1.99942	−0.001553	0.999907
8	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	−0.000001	1.00000
9	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	0.000000	1.00000
10	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	0.000000	1.00000

(5)

0	1.00000	−3.00000	6.00000	5.00000	1.00000	7.00000
1	1.30000	−2.50000	3.11111	2.11111	0.588889	4.94444
2	0.901300	−0.473003	3.32196	2.32196	0.776742	2.75723
3	1.10256	0.359004	3.00662	2.00662	0.890826	1.58237
4	1.17397	1.50171	2.99855	1.99855	0.827480	0.522267
5	1.55496	0.471967	3.00015	2.00015	0.444888	1.69048
6	1.54560	1.40619	2.99992	1.99992	0.454478	0.891279
7	2.31422	2.24693	3.00001	2.00001	−0.314225	0.889419
8	2.03883	2.02561	3.00000	2.00000	−0.038828	0.977710
9	2.00072	2.00052	3.00000	2.00000	−0.000719	0.999467
10	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	−0.000000	1.00000
11	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	0.000000	1.00000

(6)

0	−1.00000	−2.00000	−3.00000	−4.00000	−5.00000	−1.00000
1	15.5016	35.9847	131.494	11.1543	44.8011	−26.1659
2	15.0694	34.7574	−86.2266	−7.32941	76.1572	−44.2417
3	15.3060	35.4290	−44.9431	−3.82560	34.6371	−20.3104
4	16.5279	38.8983	−23.9270	−2.04415	12.3991	−7.49852
5	−63.8935	−189.705	−12.7910	−1.10626	81.6845	−47.5591
6	−25.3332	−80.0983	−13.3102	−1.15054	43.6434	−25.5559
7	−2.29443	−14.6138	−16.7956	−1.44847	24.0900	−14.2322
8	−2.99014	−16.6077	−5.16425	−0.436684	13.1544	−7.81064
9	25.7917	65.2235	−28.1236	−2.32494	7.33188	−4.16017
10	11.7309	25.2198	−14.7423	−1.23283	8.01143	−4.53213
11	−53.6645	−160.239	−7.65488	−0.669335	66.3193	−35.5282
12	−22.2332	−71.1078	−7.83992	−0.684831	35.0731	−18.9024
13	−5.35827	−23.2621	−8.79886	−0.765553	19.1571	−10.4085
14	−46.0139	−138.680	40.3059	3.47719	10.7080	−5.81675
15	−23.0149	−73.3709	16.6453	1.43516	11.3696	−6.16358
16	−11.0384	−39.3281	−3.17293	−0.276179	19.2113	−10.2475
17	−1.89853	−13.4819	−3.54046	−0.300216	10.4390	−5.47441
18	9.46202	18.6902	−10.2930	−0.821057	5.83095	−2.57796
19	−22.1539	−70.2743	−5.15739	−0.474943	32.3113	−13.6183
20	−6.96781	−27.5594	−5.49016	−0.502225	17.4580	−7.37553
21	3.67273	2.36009	−8.41996	−0.752602	9.74723	−4.04118
22	3.71217	2.38848	−3.52027	−0.640674	4.80810	−2.80438

23	3.93332	2.55229	−0.674674	−0.555883	1.75135	−2.79279
24	0.258700	−0.614594	11.2805	4.78801	−6.53916	−33.1327
25	0.225710	−0.643857	5.81449	2.45844	−1.04020	−15.9022
26	0.078165	−0.774745	2.25337	0.983443	2.66847	−8.83523
27	−1.01432	−1.71693	2.37400	1.24594	3.64032	7.85202
28	0.182710	−1.12180	2.18295	0.840324	2.63334	3.40872
29	0.904940	0.238444	2.14697	0.301569	1.94809	2.07544
30	−5.77768	−4.10875	8.81605	13.6545	1.96163	1.91336
31	−2.41870	−1.87112	5.45492	6.89896	1.96378	1.91354
32	−0.713584	−0.621895	3.73995	3.47644	1.97363	1.91697
33	0.081129	0.315547	2.90294	1.80533	2.01593	1.96095
34	−0.092749	1.05782	3.07916	2.15848	2.01359	2.02524
35	−0.006630	0.998930	3.00615	2.01232	2.00048	2.00175
36	−0.000020	0.999972	3.00002	2.00005	2.00000	2.00000
37	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000
38	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000

Пример III. Нека је P полином

$$x^6+2x^5+4x^3+6x^3+5x^2+4x+2$$

чији су фактори x^2+1, x^2+2, $(x+1)^2$. Овај пример је сличан претходном. Основна је разлика у томе што овај полином нема четири различита корена (-1 је двоструки корен)

Вероватно и у општем случају за изложени поступак није нужно претпоставити да су сви корени $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ međусобно различити већ (?) да су тражени фактори $A, B, \ldots, L$ међусобно различити.

(1)

0	0.100000	1.20000	1.90000	1.30000	0.400000	1.50000
1	0.233290	0.785739	2.02365	0.845885	−0.256935	2.32386
2	0.058887	0.946129	2.01580	1.03039	−0.074686	2.02788
3	0.007018	1.00217	1.99916	0.998813	−0.006182	1.99356
4	−0.000060	1.00003	2.00000	1.00000	0.000058	1.99993
5	0.000000	1.00000	2.00000	1.00000	−0.000000	2.00000
6	0.000000	1.00000	2.00000	1.00000	.000000	2.00000

(2)

0	1.00000	−0.500000	3.00000	1.20000	0.100000	1.50000
1	1.89881	0.282413	−0.035383	−0.840020	0.136560	1.56393
2	0.452845	−1.10407	1.44679	0.455104	0.100368	1.65865
3	1.21833	0.946750	0.707805	−0.273400	0.073865	1.75565
4	0.079455	−0.333149	1.85281	0.855429	0.067751	1.89555
5	−0.664030	1.53610	2.62372	1.61202	0.040307	1.94122
6	−0.177133	1.05949	2.17872	1.17534	−0.001587	1.93583
7	−0.006232	0.990321	2.01497	1.01469	−0.008741	1.99707
8	0.000120	0.999856	2.00001	1.00001	−0.000131	1.99998
9	0.000000	1.00000	2.00000	1.00000	−0.000000	2.00000
10	0.000000	1.00000	2.00000	1.00000	0.000000	2.00000

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марковић Д., *О приближној факторизацији полинома*, Весник Друш. Мат. Физ. НРС 8, No 1/2, 1955, 53—58.

[2] Prešić S. B., *Un procédé iteratif pour la factorisation des polynomes*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 862—863.

ONE ITERATIVE METHOD OF POLYNOMIAL FACTORIZATION

Slaviša B. Prešić

Summary

Let

$$P = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \tag{I}$$

be a polynomial in x, whose coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ are complex numbers having roots $x_1, x_2, \ldots, x_n$ which are different from one another.

Let $a, b, \ldots, l$ be natural numbers such that $n = a + b + \cdots + l$.

If

$$P = AB \cdots L \tag{II}$$

where $A, B, \ldots, L$ are polynomials of degree $a, b, \ldots, l$ respectively, we say that (II) is an $a—b— \cdots —l$ factorization of P. Thus

$$P = (x—x_1)(x—x_2)\cdots(x—x_n)$$

is an $1—1— \cdots —1$ factorization of P.

In this paper we give one iterative method for obtaining $a—b— \cdots —l$ factorizations.

This method, in short, is contained in what follows.

We begin with $A(0), B(0), \ldots, L(0)$ of degree $a, b, \ldots, l$ respectively (approximative factors) whereas the polynomials $A(k), B(k), \ldots, L(k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ are determined by the polynomial equality

$$A(k+1)B(k)\cdots L(k) + A(k)B(k+1)\cdots L(k) + \cdots + A(k)B(k)\cdots L(k+1)$$
$$—sA(k)B(k)\cdots L(k) = P \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(where $s+1$ is the number of numbers $a, b, \ldots, l$).

In the case of an $1—1— \cdots —1$ factorization we have the following formulas:

$$a_i(k+1) = a_i(k) —$$
$$— \frac{P \mid \text{for } x = a_i(k)}{(a_i(k) — a_1(k))\cdots(a_i(k)—a_{i-1}(k))(a_i(k)—a_{i+1}(k))\cdots(a_i(k)—a_n(k))}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

(polynomials $A(k), B(k), \ldots, L(k)$ are denoted by $x—a_1(k),\ x—a_2(k), \ldots,$ $x—a_n(k)$ respectively).

In the case of $P=x^6+p_5x^5+p_4x^4+p_3x^3+p_2x^2+p_1x+p_0$ and a 2—2—2 factorization, the polynomials $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ are denoted by $x^2+a_nx+b_nx^2+$ $+c_nx+d_n$, $x^2+c_nx+f_n$. The sequences a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n are determined by formulas (9) in the Serbo-Croatian text.

The main result for the general $a—b—\cdots l$ factorization:

If $\lim\limits_{k\to 8} A(k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} B(k), \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} L(k)$ *exist then they are the factors of* P *and their product is equal to* P. *The convergence is quadratic* (*i. e. the condition* $p(k+1)-p=O(\|p(k)-p\|^2)$; $p=\lim\limits_{k\to\infty} p(k)$ *is valid where* $p(k)$ *is n-dimensional vector having the coefficients of* $A(k)$, $B(k), \ldots, L(k)$, *respectively, for coordinates*).

Some exemples are given (**Пример I, Пример II, Пример III,** in Serbo-Croatian text).